

✓

HELVETICA PHYSICA ACTA

SOCIETATIS PHYSICAE HELVETICAE
COMMENTARIA PUBLICA

VOLUMEN XXV

BASILEAE • IN AEDIBUS BIRKHAEUSER
MCMLII

HELVETICA
PHYSICA ACTA
Copyright 1952 by: Schweizerische Physikalische Gesellschaft
Société Suisse de Physique
Società Fisica Svizzera

Druck von Emil Birkhäuser & Cie., AG., Basel

Spektrometrische Messung von β - β -Koinzidenzen

von O. Huber, F. Humbel, H. Schneider und A. de Shalit*), ETH., Zürich.

(22. IX. 1951.)

Summary. A β - β -coincidence arrangement which uses the high resolving power of a lens spectrometer is described. A scintillation counter is added as a β -detector near the radioactive source of the lens spectrometer. Coincidences are registered between the counts of this detector and the electrons of a chosen energy in the GEIGER-MÜLLER counter of the spectrometer. It was found that this arrangement is sufficient for establishing decay-schemes, even though coincidences are measured between a selected electron-line and all other emitted β -radiation. Some applications are discussed, and the coefficients of the internal conversion of the γ -rays and X-rays are given for some isotopes.

§ 1. Einleitung.

Der Zerfall eines radioaktiven Kernes führt häufig ausser einem eventuellen direkten Übergang in den Grundzustand noch über einen Teil der angeregten Niveaux des Folgekernes. Wenn es daher gelingt, das Therm-schema der radioaktiven Umwandlung zu bestimmen, so lassen sich dadurch die angeregten Zustände von Atomkernen energiemässig festlegen. Mit Hilfe der Theorie des β -Zerfalles und durch Messungen (Konversion, Lebensdauer, Richtungskorrelation, K/L -Verhältnis), welche die Multipolordnung der γ -Übergänge ergeben, ist es oft möglich, Drehimpuls und Parität der angeregten Zustände festzulegen. Diese angeregten Niveaux müssen sehr genau bekannt sein, wenn sie mit theoretischen Voraus-sagen (z. B. Einteilchenmodell) verglichen werden sollen.

Für die eindeutige Festlegung der Folge der angeregten Niveaux genügt es oft nicht — besonders in komplizierten Fällen —, lediglich Energie und Intensität der emittierten Strahlungen zu bestimmen. Koinzidenzmessungen liefern weitere Aussagen und sie haben sich für Untersuchungen, deren Ziel die erwähnte Aufgabe ist, sehr fruchtbar erwiesen. Bei komplizierten Zerfällen treten zahlreiche Kombinationen von Ereignissen, die Koinzidenzen geben, auf. Es ist dann von Bedeutung, festlegen zu können, welcher Partner mit welchem gekoppelt ist.

*) From The Hebrew University, Jerusalem.

Wir haben daher eine Apparatur gebaut, welche gestattet, Koinzidenzen zwischen β -Teilchen eines definierten engen Energiebereiches und β -Teilchen des gesamten emittierten Spektrums (kontinuierliches β -Spektrum + Spektrum der Konversionselektronen) zu messen. Die Energieselektion des einen Partners erfolgt durch ein Spektrometer. Es lässt sich eine Anordnung treffen, die bei gutem Energieauflösungsvermögen eine hohe Lichtstärke aufweist.

Mit dieser Apparatur kann festgestellt werden, ob die Emission einzelner Konversionslinien mit anderen Linien oder einem kontinuierlichen β -Spektrum in Koinzidenz erfolgt. Auch lassen sich, wenn zufällig Konversionslinien verschiedener γ -Übergänge zusammenfallen (z. B. eine K_1 und eine L_2 -Linie), die Konversionen getrennt messen, was sonst mit den üblichen Methoden nicht getan werden kann. Die Anordnung erweist sich als sehr geeignet für die Messung von Konversionskoeffizienten.

Mit dieser Apparatur ist es gelungen den Zerfall der Hg^{197} -Isomere abzuklären¹⁾. Die Apparatur soll im folgenden näher beschrieben und in bezug auf weitere Anwendungsmöglichkeiten diskutiert werden. Für einige Isotope ist der Konversionskoeffizient sowie der Koeffizient der inneren Konversion der Röntgenstrahlung gemessen worden.

§ 2. Beschreibung der Apparatur zur Messung von β - β -Koinzidenzen.

a) Allgemeines.

Eine neuere Methode zur Messung von β - β -Koinzidenzen mit auswählbaren β -Energien, stellt das Scintillationsspektrometer²⁾ dar. Da der vom Scintillationszähler herrührende elektrische Impuls im wesentlichen zur registrierten Elektronenenergie proportional ist³⁾, lässt sich durch die Auswahl eines Impulsamplitudenintervalls zugleich eine Auswahl der Elektronenenergie vornehmen. Der Vorteil eines solchen Scintillationsspektrometers liegt in der grossen Lichtstärke und im guten Koinzidenzauflösungsvermögen. Wegen den statistischen Schwankungen in Kristall und Multiplier ist es jedoch schwierig, damit ein gutes Energieauflösungsvermögen zu erzielen.

Die Kombination zweier Linsenspektrometer⁴⁾ ergibt zwar ein gutes Energieauflösungsvermögen für beide Koinzidenzpartner, jedoch wird die Lichtstärke der Anordnung für Koinzidenzen klein.

In dieser Arbeit wird eine Apparatur beschrieben, welche gestattet β - β -Koinzidenzen in einem Spektrometer zu messen, indem

der Koinzidenzpartner des Spektrometerzählrohres in einem Scintillationszähler registriert wird. Man erhält auf diese Weise für Koinzidenzen sowohl ein gutes Energieauflösungsvermögen, als auch eine grosse Lichtstärke. Wie spätere Betrachtungen zeigen werden, genügt eine solche Anordnung, um die Koinzidenzpartner einander zuordnen zu können.

b) Ausführung.

Die Anordnung, wie wir sie verwenden, um β - β -Koinzidenzen zu messen, ist in Fig. 1 dargestellt. In einem Linsenspektrometer⁵⁾ wurde auf der einen Seite der radioaktiven Quelle, im Abstand von 6 mm ein Anthracenkristall montiert und dessen Lichtblitze in einem Photomultiplier (1P21) registriert. Zwischen diesen Impulsen und jenen des Spektrometerzählrohres können β - β -Koinzidenzen registriert werden. Auf diese Weise kann das Energieauf-

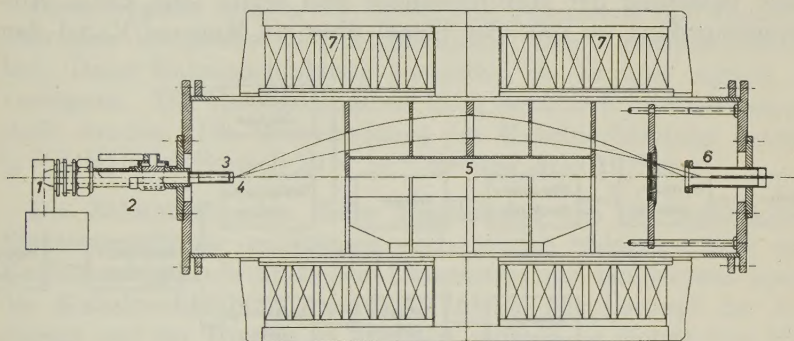


Fig. 1.

Messanordnung für β - β -Koinzidenzen.

- | | |
|--------------------------|-----------------|
| 1 Photomultiplier (1P21) | 4 Quelle. |
| 2 Lichtleiter. | 5 Bleizylinder. |
| 3 Anthracenkristall. | 6 Zählrohr. |
| 7 Magnetwicklung. | |

lösungsvermögen des Spektrometers auch für Koinzidenzen voll ausgenutzt werden. Weil der Raumwinkel des Scintillationszählers bei unserer Geometrie 14% beträgt, ist diese Anordnung für Koinzidenzen sehr lichtstark. Die Lichtimpulse im Anthracenkristall sind von sehr kurzer Dauer (ca. $3 \cdot 10^{-8}$ sec)⁶⁾, so dass das Zählvermögen pro Zeiteinheit des Scintillationszählers von den elektronischen Hilfsgeräten abhängt. In unserem Falle ist die Quellenstärke im wesentlichen durch die Anzahl der zufälligen Koinzidenzen, d. h. durch das Auflösungsvermögen der Koinzidenzapparatur begrenzt.

Da der Multiplier nicht im Magnetfeld des Spektrometers arbeiten kann, werden ihm die Lichtimpulse des Kristalls (\varnothing 12 mm, Dicke 2 mm) über einen Lucitlichtleiter (\varnothing 14 mm, Länge 280 mm) zugeführt. Zur Verbesserung des optischen Wirkungsgrades ist der Kristall und ein Teil des Lichtleiters mit einer Silberfolie von $0,24 \text{ mg cm}^{-2}$ abgedeckt. Lichtleiter und Multiplier sind von einem lichtdichten Metallgehäuse umgeben. Eine Kühlschlange am Gehäuse in Verbindung mit einem Kühlsystem sorgt für konstante Temperatur, von welcher der thermische Nulleffekt der Photokathode abhängt.

c) Elektronischer Teil.

Aus dem Blockschema der Fig. 2 ist der Aufbau des elektronischen Teiles ersichtlich. Die Impulse des Multipliers werden unmittelbar einer Kathodenfolgestufe zugeführt. Diese gewährleistet eine minimale Belastung der Multiplieranode und ergibt eine kleine Ausgangsimpedanz, so dass das Signal über ein längeres Kabel dem

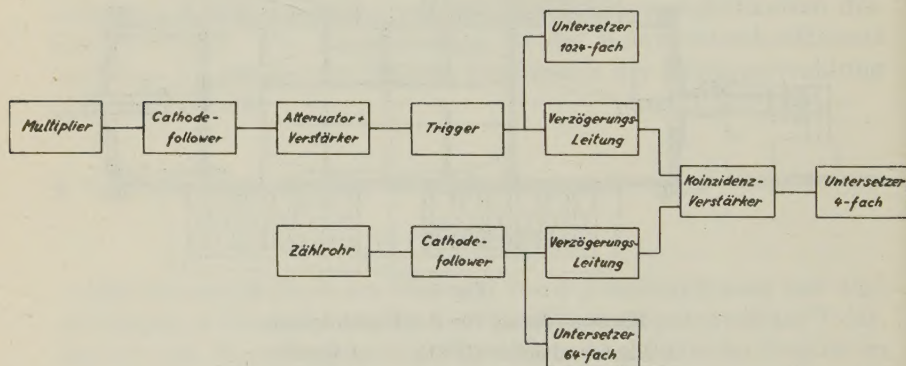


Fig. 2.
Blockschema.

Verstärker zugeführt werden kann. Der niederohmige Arbeitswiderstand der Kathodenfolgestufe wird als praktisch frequenzunabhängiger Spannungsteiler benutzt. Die Signalamplituden können damit jeweils um einen Faktor 2 bis zu 2^5 unterteilt werden. Wie später noch besprochen wird, kann mit diesem Attenuator eine gewisse Auswahl der Energie der β -Strahlung auf der Seite des Multiplierkanals getroffen werden. Der nachfolgende Verstärker besteht aus zwei gegengekoppelten Schleifen⁷⁾. Die Gesamtverstärkung beträgt $\mu = 3200$, die Bandbreite 0,1–5 MHz und somit wird die Risetime $t_r = 6 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$.

Am Verstärkereingang ist eine vorgespannte Diode so eingeschaltet, dass sie die Eingangsamplituden begrenzt und auf diese Weise eine Übersteuerung des Verstärkers verhindert. Eine Schmitt-Triggerstufe⁸⁾ am Verstärkerausgang wandelt alle Impulse, die einen vorgeschriebenen Schwellwert überschreiten, in Impulse konstanter Amplitude und gleicher Flankensteilheit um. Werden diese Impulse auf eine Koinzidenzmischstufe und gleichzeitig auf einen Untersetzer gegeben, so hat man die Gewissheit, alle und nur jene Einzelstöße zu registrieren, die koinzidenzfähig sind. Würden, im Gegensatz dazu, ohne Schmitt-Trigger, die verstärkten Impulse verschiedener Amplituden direkt auf eine Koinzidenzmischstufe und den Untersetzer gegeben, so hätte man zwei verschiedene Ansprechpegel und eine Übereinstimmung wäre nur mittels Eichmessungen zu erreichen.

Diese Impulse speisen also direkt den Untersetzer und ebenfalls, über eine künstliche Kabelnachbildung⁹⁾, den Koinzidenzverstärker. Diese Kabelnachbildung gestattet, die Impulse zeitlich zu verzögern. Die Verzögerungszeit kann dekadisch in Stufen eingestellt werden. Die Grenzfrequenz der Kabelnachbildung beträgt $f_g = 4$ MHz im Bereich $\Delta t = 10^{-8}$ sec und $\Delta t = 10^{-6}$ sec.

Die Zählrohrimpulse, deren Amplituden von der registrierten Elektronenenergie unabhängig sind, werden wiederum über eine Kathodenfolgestufe direkt dem Untersetzer und dem zweiten Kanal der Kabelnachbildung zugeführt. Infolge der Laufzeit im Verstärker und der Timelag im Zählrohr, müssen die Signale von Multiplier und Zählrohr so gegeneinander verzögert werden, dass sie gleichzeitig in den Koinzidenzverstärker gelangen. Dies wird durch die oben erwähnte Kabelnachbildung erreicht. Die Signale gelangen sodann in den Koinzidenzverstärker, wo sie verstärkt und differenziert werden. Eine stufenweise Einstellung der Zeitkonstanten gestattet das Auflösungsvermögen zwischen $\tau = 2,3 \cdot 10^{-7}$ sec und $\tau = 7,5 \cdot 10^{-7}$ sec zu ändern. Als Koinzidenzmischstufe ist ein Triodenpaar mit gemeinsamem Kathodenwiderstand verwendet¹⁰⁾. Einem abgeänderten Schmitt-Trigger folgt zuletzt noch ein 4-fach Untersetzer.

Der 2¹⁰-fach Untersetzer für die Registrierung der Einzelstöße des Scintillationszählers hat ein Auflösungsvermögen $\tau \leq 10^{-6}$ sec. Damit ist es möglich, bis zu 10⁴ Stöße pro sec mit 1% Verlusten zu registrieren. Der 2⁶-fach Untersetzer der Zählrohr-einzelstöße hat ein Auflösungsvermögen von ca. 10⁻⁵ sec.

§ 3. Anwendungsmöglichkeiten.

Die beschriebene Apparatur eignet sich besonders gut zur Untersuchung von Zerfallsschemen. Ausser der Energiemessung im Spektrometer geht auch für intensitätsschwache Linien aus der Koinzidenzmessung sofort hervor, ob sich die Strahlung des eingestellten Impulsintervalls des Spektrometers mit einer weiteren konvertierten γ -Strahlung in Kaskade befindet. Zudem lässt sich mit Hilfe der Attenuatorkurven, die Energie eines eventuellen Koinzidenzpartners im Scintillationszähler abschätzen.

Ebenso lässt sich beurteilen, ob Elektronenlinien, die energetisch als K -, L - und M -Konversionslinien derselben γ -Strahlung zugeordnet werden können, wirklich als solche zu interpretieren sind. In diesem Falle muss die K -, die L - und die M -Konversionslinie derselben γ -Strahlung ein konstantes Verhältnis der registrierten Koinzidenzen zu den Einzelstössen aufweisen. Solche Aussagen können mit den üblichen Zählrohr-Koinzidenzmessungen nicht gemacht werden.

Mit einer solchen Koinzidenzapparatur ist es auch möglich, durch Messung der Augerelektronen, die Konversionskoeffizienten einer γ -Strahlung und die Koeffizienten der inneren Konversion der Röntgenstrahlung zu bestimmen. Die Bestimmung dieser Koeffizienten kann auch durch andere Messmethoden erfolgen, jedoch sind diese meistens nicht so eindeutig. So muss z.B. die Gruppe der KXY -Augerlinien ($X = L, M, N, \dots$ $Y = L, M, N, \dots$) mit der K -Konversionslinie einer γ -Strahlung immer Koinzidenzen aufweisen, da die KXY -Augerelektronen erst durch die Löcher in der K -Schale entstehen können. Weiterhin muss das Verhältnis der Koinzidenzen zu den Einzelstössen in jeder KXY -Augerlinie konstant sein. Sind diese beiden Bedingungen nicht erfüllt, so kann den Augerlinien eine Konversionslinie überlagert sein, oder es handelt sich trotz energetischer Übereinstimmung nicht um Augerlinien. Man sieht, dass auch hier die Koinzidenzmessung für viele Fälle ein gutes Kriterium ergibt, um eindeutige Entscheidungen treffen zu können.

In den nächsten Abschnitten folgt eine eingehende Besprechung einiger hypothetischer Zerfallsschemen. Die beiden ersten Fälle behandeln Koinzidenzen zwischen einem kontinuierlichen β -Spektrum und Konversionslinien, zwei weitere Fälle beziehen sich auf Koinzidenzen zwischen Konversionslinien und Augerelektronenlinien.

Die bei den Rechnungen verwendeten Bezeichnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

N	Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit.
Z_K	Zahl der pro Zeiteinheit von der K -Konversionslinie mit dem Impuls p_K herrührenden Stöße im Maximum der Linie.
Z_{SpK}	Zahl der pro Zeiteinheit registrierten Stöße des β -Spektrums an der Stelle p_K .
Z_{Sc}	Stosszahl pro Zeiteinheit des Scintillationszählers.
Z_{KLL}	Zahl der Stöße pro Zeiteinheit im Maximum der KLL -Augerelektronenlinie mit dem Impuls p_{KLL} .
K_K	Zahl der pro Zeiteinheit registrierten Koinzidenzen, herrührend vom β -Spektrum im Scintillationszähler, und dem Maximum der K -Linie im Zählrohr.
K_{SpK}	Zahl der pro Zeiteinheit an der Stelle p_K registrierten Koinzidenzen, die durch die Messung des Spektrums im Zählrohr herrühren. Als Koinzidenzpartner werden im Scintillationszähler die Konversionselektronen registriert.
K_{KLL}	Zahl der pro Zeiteinheit registrierten Koinzidenzen, wenn das Maximum der KLL -Augerlinie im Zählrohr gemessen wird.
ω_{Sp}	Raumwinkel des Spektrometers.
ω_{Sc}	Raumwinkel des Scintillationszählers.
$f(p) = f(H\varrho)$	Durchlässigkeit des ZR-Fensters für Elektronen des Impulses p .
$\varepsilon(p) = \varepsilon(H\varrho)$	Ansprechwahrscheinlichkeit des Scintillationszählers für Elektronen des Impulses p .
ε_{ZR}	Empfindlichkeit des Zählrohres für Elektronen (gemessen zu 92%).
$\kappa = N_e/N$	Konversionskoeffizient des γ -Überganges.
a_{KLL}	Koeffizient der inneren Konversion der Röntgenstrahlen für KLL -Augerelektronen.
η	Koinzidenzwirkungsgrad der Apparatur.
$g(p)$	Verteilungsfunktion des β -Spektrums.
$\Delta = \frac{\delta p}{p} = \frac{\delta H\varrho}{H\varrho}$	Auflösungsvermögen des Spektrometers.

Fall 1. Betrachten wir zunächst das in Fig. 3 dargestellte Zerfallsschema. Es soll auf Koinzidenzen zwischen dem β -Spektrum und den Konversionselektronen der γ -Strahlung untersucht werden. Für die nachfolgende Rechnung ist vorausgesetzt, dass die Lebensdauer des angeregten Zustandes gegenüber dem Koinzidenzauflösungsvermögen vernachlässigbar klein sei. Ebenso soll der von der

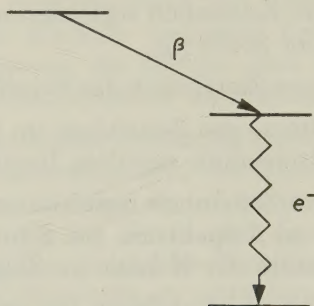


Fig. 3.

Hypothetisches Zerfallsschema.

γ -Strahlung herrührende Untergrund bereits abgezogen sein. Dieser lässt sich leicht durch Absorption der Elektronen mittels Kohleabsorber ermitteln.

Die Stosszahl im Zählrohr, herrührend von der K -Konversionslinie wird

$$Z_K = N \omega_{Sp} f_K \varepsilon_{ZR} \kappa_K$$

und für das Spektrum an der Stelle der K -Konversionslinie

$$Z_{SpK} = N \omega_{Sp} f_K \varepsilon_{ZR} g(p_K) \delta p_K.$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis der Einzelstosszahlen von der Konversionslinie und vom Spektrum an der Stelle p_K

$$\frac{Z_K}{Z_{SpK}} = \frac{\kappa_K}{g(p_K) \delta p_K} = \frac{\kappa_K}{g(p_K) p_K \Delta}.$$

Die Gesamtstosszahl im Scintillationszähler ist

$$Z_{Sc} = N \omega_{Sc} \left\{ \kappa_K \varepsilon_K + \kappa_L \varepsilon_L + \kappa_M \varepsilon_M + \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \right\}.$$

Wenn im Zählrohr an der Stelle p_K das Maximum der K -Konversionslinie gemessen wird, so ergeben sich die Koinzidenzen zu

$$\begin{aligned} K_K &= Z_K \eta \omega_{Sc} \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \\ &= N \omega_{Sp} f_K \varepsilon_{ZR} \kappa_K \eta \omega_{Sc} \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp. \end{aligned}$$

Entsprechend werden die Koinzidenzen, herrührend vom Spektrum, an irgendeiner Stelle p des Spektrums

$$K_{Sp} = N \omega_{Sp} f \varepsilon_{ZR} g(p) \delta p \eta \omega_{Sc} \{ \kappa_K \varepsilon_K + \kappa_L \varepsilon_L + \kappa_M \varepsilon_M \}.$$

Damit kann das Verhältnis K_K/K_{SpK} an der Stelle der K -Konversionslinie gebildet werden.

$$\frac{K_K}{K_{SpK}} = \frac{\kappa_K \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp}{g(p_K) p_K \Delta (\kappa_K \varepsilon_K + \kappa_L \varepsilon_L + \kappa_M \varepsilon_M)}.$$

und analog für die andern Konversionslinien.

Für das Doppelverhältnis findet man

$$\frac{K_K/K_{SpK}}{Z_K/Z_{SpK}} = \frac{\int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp}{\kappa_K \varepsilon_K + \kappa_L \varepsilon_L + \kappa_M \varepsilon_M}.$$

Setzt man in erster Näherung $\varepsilon_K = \varepsilon_L = \varepsilon_M \approx 1$ und ebenso

$$\int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \approx 1,$$

was für höhere Energien der Fall ist, so folgt

$$\frac{K_K/K_{SpK}}{Z_K/Z_{SpK}} \approx \frac{1}{\kappa_K + \kappa_L + \kappa_M} = \frac{1}{\kappa}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass das Verhältnis der Koinzidenzen gegenüber dem Verhältnis der Einzelstosszahlen um so günstiger wird, je kleiner der Konversionskoeffizient κ ist. Mit dieser Koinzidenzmethode ist es somit möglich, auch solche Konversionslinien zu finden, welche mit einer gewöhnlichen Spektromettermessung kaum mehr nachweisbar sind.

Es wäre nun möglich, mit Hilfe dieses Doppelverhältnisses die Konversionskoeffizienten zu bestimmen. Wesentlich genauere Re-

sultate ergibt der Quotient K_K/Z_{Sp} . Nach Umformung erhält man direkt den Konversionskoeffizienten

$$\kappa_K = \frac{K_K f_K \Delta}{\eta \omega_{Sc} \int_0^\infty \frac{Z_{Sp} \varepsilon(p)}{p f(p)} dp}$$

In dieser Gleichung sind alle Grössen bekannt. $K_K \Delta$ stellt das Produkt der maximalen Koinzidenzstosszahl der K -Konversionslinie und dem Auflösungsvermögen des Spektrometers dar. Grössere Genauigkeit ergibt sich, wenn die Fläche unter den gemessenen Koinzidenzen bei der K -Konversionslinie zur Auswertung benutzt wird. Nach der Theorie des Linsenspektrometers ist ja

$$K_K \Delta = K_K \frac{\delta p_K}{p_K} = \int \frac{K_K}{p} dp$$

und so wird

$$\kappa_K = \frac{\int \frac{f_K K_K}{p} dp}{\eta \omega_{Sc} \int_0^\infty \frac{Z_{Sp} \varepsilon(p)}{p f(p)} dp} \quad \text{I}$$

Der Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{Z_{Sp} \varepsilon(p)}{p f(p)} dp$$

stellt die Fläche, des auf Ansprechwahrscheinlichkeit des Scintillationszählers, auf Durchlässigkeit des Zählrohrfensters und auf das Auflösungsvermögen des Spektrometers korrigierten Spektrums dar. Diese Korrekturen können leicht graphisch durchgeführt werden.

Analog können nach Gleichung I auch die L - und M -Konversionskoeffizienten des γ -Überganges gefunden werden.

Eine Abschätzung soll zeigen, in welchem Falle die Messung von Koinzidenzen zur Bestimmung der Konversionskoeffizienten von Vorteil ist. Im ungünstigsten Fall, wenn die Linie ungefähr in das Maximum des β -Spektrums fällt, nimmt der Ausdruck

$$\frac{K_K}{K_{SpK}} = \frac{\kappa_K \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp}{g(p_K) p_K \Delta (\kappa_K \varepsilon_K + \kappa_L \varepsilon_L + \kappa_M \varepsilon_M)}$$

die Grössenordnung $1/\Delta$ an. (Δ beträgt für unser Spektrometer $\sim 3\%$.) Die Koinzidenzen weisen also auch in diesem Falle am Ort

der Linie eine grosse Überhöhung auf und die Linie kann somit in der Koinzidenzmessung gefunden werden.

Die Koinzidenzzahl wird gegenüber der Einzelstosszahl infolge der Geometrie der Anordnung etwa um den Faktor 10 kleiner. Damit wird die statistische Ungenauigkeit für die Koinzidenzen ca. 3mal grösser als jene der Einzelstösse.

Fall 2. Betrachten wir weiter das Zerfallsschema der Fig. 4. Dem β -Spektrum folgen zwei γ -Strahlungen in Kaskade. Wiederum ist

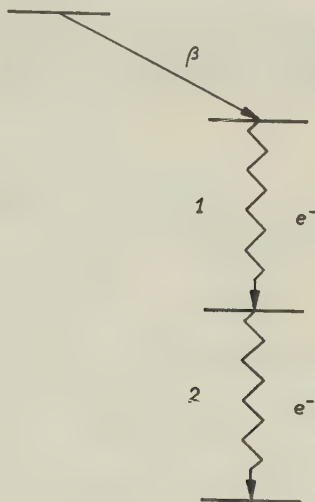


Fig. 4.

Hypothetisches Zerfallsschema.

vorausgesetzt, dass die Lebensdauer der angeregten Zustände vernachlässigbar klein sei.

Die Stosszahl im Zählrohr wird im Maximum der K -Konversionslinie des Überganges 1

$${}_1Z_K = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR1} f_{K1} \kappa_K$$

resp. des Überganges 2

$${}_2Z_K = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR2} f_{K2} \kappa_K$$

An irgendeiner Stelle p ist die Stosszahl im Zählrohr, welche vom Spektrum herrührt

$$Z_{Sp} = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f g(p) p \Delta$$

und die im Scintillationszähler gemessene Stosszahl

$$Z_{Sc} = N \omega_{Sc} \left[\sum_{i=KLM} {}_1\kappa_i {}_1\varepsilon_i + \sum_{i=KLM} {}_2\kappa_i {}_2\varepsilon_i + \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \right]$$

Damit wird die Koinzidenzzahl bei der K -Konversionslinie des Überganges 1

$${}_1K_K = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_K {}_1\kappa_K \omega_{Sc} \eta \left[\sum {}_2\kappa_i {}_2\varepsilon_i + \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \right]$$

Durch Vertauschen der Indices erhält man entsprechend die Koinzidenzen bei der K -Konversionslinie des Überganges 2. Die Koinzidenzen, die vom Spektrum herrühren, werden für irgendeine Stelle p des Spektrums

$$K_{Sp} = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f g(p) p \Delta \omega_{Sc} \eta \left[\sum {}_1\kappa_i {}_1\varepsilon_i + \sum {}_2\kappa_i {}_2\varepsilon_i \right]$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und unter Berücksichtigung, dass für irgendeine Stelle des Spektrums

$$\frac{K_{Sp}}{Z_{Sp}} = \omega_{Sc} \eta \left[\sum {}_1\kappa_i {}_1\varepsilon_i + \sum {}_2\kappa_i {}_2\varepsilon_i \right] = \text{konst.}$$

ist, erhält man nach Umformung

$$\sum_{i=KLM} {}_1\kappa_i {}_1\varepsilon_i = \frac{1}{2 \omega_{Sc} \eta} \left[\frac{{}_2K_K}{{}_2Z_K} + \frac{K_{Sp}}{Z_{Sp}} - \frac{{}_1K_K}{{}_1Z_K} \right].$$

Diese Gleichung leistet für Abschätzungen gute Dienste. Praktisch zeigt sich aber, dass man bei der experimentellen Bestimmung von K_{Sp} auf Schwierigkeiten stösst, da der absolute Wert dieser Koinzidenzen klein ist und die zufälligen sowie die durch Streuung verursachten Koinzidenzen abgezogen werden müssen. Zur genauen Bestimmung der Konversionskoeffizienten wird besser das Verhältnis

$$\frac{{}_2K_K}{{}_2Z_K} = \omega_{Sc} \eta \left[\sum {}_1\kappa_i {}_1\varepsilon_i + \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \right]$$

verwendet. Das Verhältnis der Konversionskoeffizienten kann direkt aus der Messung der Einzelstösse erhalten werden.

$$\kappa_K : \kappa_L : \kappa_M = \frac{Z_K}{f_K} : \frac{Z_L}{f_L} : \frac{Z_M}{f_M}.$$

Für die Auswertung ist es praktisch, die Grösse

$$Z^* = Z \frac{\varepsilon(p)}{f(p)}$$

zu bilden. Man hat demnach die gemessenen Stosszahlen $Z(p)$ durch die Durchlässigkeit des ZR -Fensters zu dividieren und mit der Ansprechwahrscheinlichkeit des Scintillationszählers zu multiplizieren. Unter Verwendung dieser Bezeichnung und der obigen Beziehung ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung für ${}_2K_K/{}_2Z_K$ der Konversionskoeffizient

$${}_1\kappa_i = \frac{{}_1Z_i^*}{{}_1\varepsilon_i} \frac{1}{{}_1Z_K^* + {}_1Z_L^* + {}_1Z_M^*} \left[\frac{{}_2K_K}{{}_2Z_K \omega_{Sc} \eta} - \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \right].$$

Statt der Maxima der Linien, wie bei der Rechnung vorausgesetzt, können auch hier der grösseren Genauigkeit wegen die Flächen der einzelnen Linien im durch H_Q dividierten Spektrum zur Auswertung verwendet werden. Es ist dann

$$\begin{aligned} {}_1\kappa_i = & \frac{\int \frac{{}_1Z_i^*}{p} dp}{{}_1\varepsilon_i} \frac{1}{\int \frac{{}_1Z_K^*}{p} dp + \int \frac{{}_1Z_L^*}{p} dp + \int \frac{{}_1Z_M^*}{p} dp} \times \\ & \times \left[\frac{\int \frac{{}_2K_K}{p} dp}{\eta \omega_{Sc} \int \frac{{}_2Z_K}{p} dp} - \int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \right] \quad \text{II} \end{aligned}$$

Der Wert von

$$\int_0^\infty g(p) \varepsilon(p) dp \leq 1$$

kann leicht graphisch ermittelt werden. Wiederum unter der Voraussetzung, dass die Hilfsgrössen der Apparatur bekannt sind, können nach dieser Gleichung alle Konversionskoeffizienten des Überganges 1 und durch Vertauschung der Indices auch jene des Überganges 2 bestimmt werden.

Betrachten wir zwei weitere hypothetische Zerfallsschemen, die auf Koinzidenzen zwischen den Konversionselektronen einer γ -Strahlung und den Augerelektronen untersucht werden sollen.

Fall 3. Im Zerfallsschema der Fig. 5 folgt dem K -Einfang eine γ -Strahlung. Die Lebensdauer des angeregten Zustandes soll gegenüber dem Koinzidenzauflösungsvermögen klein sein.

Die Stosszahl im Zählrohr an der Stelle der K -Konversionslinie wird

$$Z_K = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_K \kappa_K$$

und an der Stelle der *KLL*-Augerelektronenlinie

$$Z_{KLL} = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_{KLL} a_{KLL} (1 + \kappa_K).$$

Die Koinzidenzen, die von den *KLL*-Augerelektronen herrühren, wenn im Zählrohr die *K*-Konversionslinie gemessen wird, sind

$$K_K = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_K \omega_{Sc} \eta \varepsilon_{KLL} \kappa_K a_{KLL} (2 - \omega_{Sc} a_{KLL})$$

und die Koinzidenzen bei Messung der *KLL*-Augerlinie im Zählrohr

$$K_{KLL} = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_{KLL} \omega_{Sc} \eta \varepsilon_K \kappa_K a_{KLL} (2 - \omega_{Sc} a_{KLL})$$

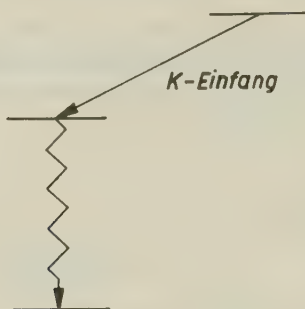


Fig. 5.

Hypothetisches Zerfallsschema.

Unter Vernachlässigung des Gliedes $\omega_{Sc} a_{KLL}$ gegenüber 2 folgt aus diesen vier Gleichungen sogleich

$$\frac{K_{KLL}}{Z_{KLL}} = 2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_K \frac{\kappa_K}{1 + \kappa_K} \quad \frac{1}{\kappa_K} = 2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_K \frac{\int \frac{Z_{KLL}}{p} dp}{\int \frac{K_{KLL}}{p} dp} - 1 \quad \text{III}$$

$$\frac{K_K}{Z_K} = 2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_{KLL} a_{KLL} \quad a_{KLL} = \frac{1}{2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_{KLL}} \frac{\int \frac{K_K}{p} dp}{\int \frac{Z_K}{p} dp} \quad \text{IV}$$

$$\frac{K_K}{Z_{KLL}} = \frac{f_K}{f_{KLL}} 2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_{KLL} \frac{\kappa_K}{1 + \kappa_K} \quad \frac{1}{\kappa_K} = 2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_{KLL} \frac{f_K}{f_{KLL}} \frac{\int \frac{Z_{KLL}}{p} dp}{\int \frac{K_K}{p} dp} - 1 \quad \text{V}$$

$$\frac{K_{KLL}}{Z_K} = \frac{f_{KLL}}{f_K} 2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_K a_{KLL} \quad a_{KLL} = \frac{f_K}{2 \omega_{Sc} \eta \varepsilon_K f_{KLL}} \frac{\int \frac{K_{KLL}}{p} dp}{\int \frac{Z_K}{p} dp} \quad \text{VI}$$

Aus den Gleichungen III und V lässt sich der K -Konversionskoeffizient der γ -Strahlung ermitteln; die Gleichungen IV und VI ergeben den Koeffizienten der inneren Konversion der Röntgenstrahlung. Bemerkenswert ist, dass bei den Gleichungen III und IV die Durchlässigkeit der Zählrohrfolie nicht eingeht. Entsprechend erhält man auch die Koeffizienten der inneren Konversion der Röntgenstrahlung für die anderen KXY -Augerelektronen oder auch gesamthaft für die ganze Gruppe der KXY -Augerelektronen ($a_K = a_{KLL} + a_{KLM} + \dots$). Die gleiche Rechnung kann auch auf die L -Konversionslinie und deren Augerelektronen angewendet werden.

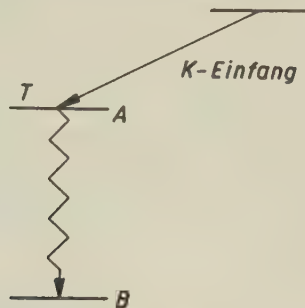


Fig. 6.

Hypothetisches Zerfallsschema.

Fall 4. Ähnlich liegen auch die Verhältnisse im Zerfallsschema nach Fig. 6, bei welchem dem K -Einfang wiederum eine γ -Strahlung folgt. Hier soll jedoch im Energieniveau A ein isomerer Zustand vorliegen, dessen HWZ ein Vielfaches des Koinzidenzauflösungsvermögens beträgt. Koinzidenzen entstehen dann z. B. nur zwischen den K -Konversionselektronen der γ -Strahlung und jenen Augerelektronen, die durch die K -Konversionselektronen entstehen. Zwischen den Konversionselektronen der γ -Strahlung und jenen Augerelektronen die vom K -Einfang herrühren, können keine Koinzidenzen auftreten.

Auch hier werden nur die KLL -Augerelektronen betrachtet. Die Einzelstosszahlen sind die gleichen, wie in Fall 3, nämlich

$$Z_K = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_K \kappa_K$$

und

$$Z_{KLL} = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_{KLL} a_{KLL} (1 + \kappa_K)$$

Für die Koinzidenzen ergibt sich jedoch

$$K_K = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_K \omega_{Sc} \eta \varepsilon_{KLL} \kappa_K a_{KLL}$$

und

$$K_{KLL} = N \omega_{Sp} \varepsilon_{ZR} f_{KLL} \omega_{Sc} \eta \varepsilon_K \kappa_K a_{KLL}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{K_{KLL}}{Z_{KLL}} = \omega_{Sc} \varepsilon_K \eta \frac{\varkappa_K}{1 + \varkappa_K} \quad \frac{1}{\varkappa_K} = \omega_{Sc} \varepsilon_K \eta \frac{\int \frac{Z_{KLL}}{p} dp}{\int \frac{K_{KLL}}{p} dp} - 1 \quad \text{VII}$$

$$\frac{K_K}{Z_K} = \omega_{Sc} \varepsilon_{KLL} \eta a_{KLL} \quad a_{KLL} = \frac{1}{\omega_{Sc} \varepsilon_{KLL} \eta} \frac{\int \frac{K_K}{p} dp}{\int \frac{Z_K}{p} dp} \quad \text{VIII}$$

$$\frac{K_K}{Z_{KLL}} = \frac{f_K}{f_{KLL}} \omega_{Sc} \varepsilon_{KLL} \eta \frac{\varkappa_K}{1 + \varkappa_K} \quad \frac{1}{\varkappa_K} = \frac{f_K}{f_{KLL}} \omega_{Sc} \varepsilon_{KLL} \eta \frac{\int \frac{Z_{KLL}}{p} dp}{\int \frac{K_K}{p} dp} - 1 \quad \text{IX}$$

$$\frac{K_{KLL}}{Z_K} = \frac{f_{KLL}}{f_K} \omega_{Sc} \varepsilon_K \eta a_{KLL} \quad a_{KLL} = \frac{f_K}{f_{KLL}} \frac{1}{\omega_{Sc} \varepsilon_K \eta} \frac{\int \frac{K_{KLL}}{p} dp}{\int \frac{Z_K}{p} dp} \quad \text{X}$$

Wiederum unter der Voraussetzung, dass die Hilfsgrößen der Apparatur bekannt sind, erhält man aus den Gleichungen VII und IX den K -Konversionskoeffizienten und aus den Gleichungen VIII und X den Koeffizienten der inneren Konversion der Röntgenstrahlung. Dabei ist zu beachten, dass bei den Gleichungen VII und VIII die Durchlässigkeit des Zählrohrfensters nicht eingeht. Auch hier lassen sich die entsprechenden Gleichungen auf die ganze Gruppe der KXY -Augerelektronen anwenden ($a_K = a_{KLL} + a_{KLM} + \dots$) und ebenso auch auf die L -Konversionslinien und deren Augerelektronen.

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde eine entsprechende Rechnung für den Fall eines K -Einfanges mit zwei nachfolgenden γ -Kaskaden durchgeführt.

Die hier ausgeführten Rechnungen lassen sich auch auf kompliziertere Zerfallsschemen ausdehnen. Mit Hilfe der Attenuatorkurven, oder auch durch Messungen mit Absorbern vor dem Scintillationszähler können, wenn nötig, leicht noch weitere Anhaltspunkte und Informationen erhalten werden.

Die Rechnungen zeigen, dass die mit einer solchen Anordnung gemachten Koinzidenzmessungen ein wertvolles Hilfsmittel darstellen, um die Anregungszustände von Atomkernen zu untersuchen und um die Konversionskoeffizienten von γ -Übergängen und die Koeffizienten der inneren Konversion der Röntgenstrahlung zu messen. Der bedeutende Vorteil dieser Koinzidenzmessungen liegt im sehr guten Energieauflösungsvermögen des Spektrometers und im grossen Raumwinkel des Scintillationszählers, durch welchen die Apparatur zur Registrierung von β - β -Koinzidenzen sehr lichtstark wird.

§ 4. Bestimmung der notwendigen Grössen für quantitative Messungen.

Die Ausführungen von § 3 zeigen, dass für die quantitative Auswertung der Spektrometermessungen die folgenden Grössen bekannt sein müssen:

- a) Durchlässigkeit $f(p)$ des Zählrohrfensters für Elektronen.
- b) Ansprechwahrscheinlichkeit $\varepsilon(p)$ des Scintillationszählers für Elektronen.
- c) Koinzidenzwirkungsgrad η .
- e) Raumwinkel ω_{sc} des Scintillationszählers.
- d) Durch Streuung erzeugte Koinzidenzen.
- f) Einfluss der Richtungskorrelation.

In diesem Abschnitt wird die Bestimmung dieser Grössen besprochen.

a) Durchlässigkeit $f(p)$ des Zählrohrfensters für Elektronen.

Bei Verwendung eines Zählrohres mit einem Formvarfenster von weniger als $0,1 \text{ mg cm}^{-2}$ ist die Durchlässigkeit dieses Fensters $f(p) = 1$ für Elektronenenergien $E > 20 \text{ keV}$. Verschiedene Punkte des Spektrums eines Co^{60} Eichpräparates wurden mit einem solchen Formvarfensterzählrohr ausgemessen und nachher mit den Messungen eines Glimmerfenster-Zählrohres verglichen. Bei gleicher Geometrie erhält man unmittelbar die Durchlässigkeit des Glimmerfensters. In Fig. 7 ist die Durchlässigkeit verschieden dicker Glimmerfenster in Funktion der Elektronenenergie aufgetragen.

b) Ansprechwahrscheinlichkeit $\varepsilon(p)$ des Scintillationszählers für Elektronen¹¹⁾.

Es sei hier gleich vorweggenommen, dass aus technischen Gründen ein langer und dünner Lichtleiter verwendet wurde, welcher durch die bestehende Spektrometerschleuse eingeschoben

werden konnte. Aus diesen ungünstigen geometrischen Verhältnissen resultiert ein schlechter optischer Wirkungsgrad des Lichtleiters. Daraus ergibt sich bei kleinen Elektronenenergien eine kleinere Ansprechwahrscheinlichkeit, als wie sie sonst mit Anthracenkristallen heute erreichbar ist¹²⁾.

Wie bereits erwähnt, wurde als Scintillationsmaterial ein klarer, durchsichtiger Anthracenkristall von 12 mm Durchmesser und 2 mm Dicke verwendet. Die Kristalldicke von 2 mm wurde deshalb gewählt, weil damit auch für höhere β -Energien noch 100% Ansprechwahrscheinlichkeit erreicht werden, während die Ansprechwahrscheinlichkeit für γ -Quanten bei dieser Dicke noch klein ist.

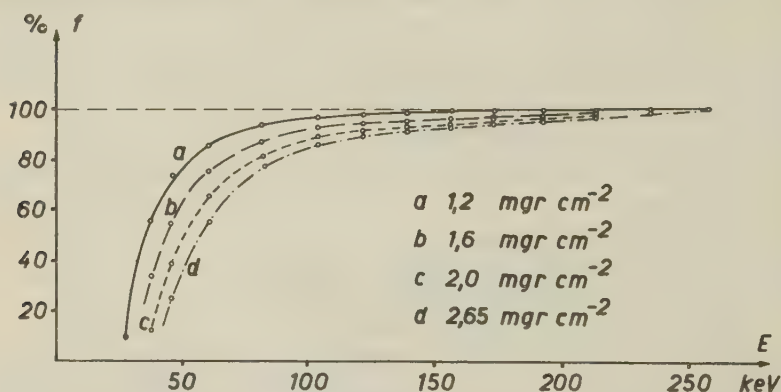


Fig. 7.

Durchlässigkeit für Elektronen für Glimmerfenster verschiedener Dicke.

Die für unsere Apparatur gültige Ansprechwahrscheinlichkeit wurde auf folgende Weise ermittelt:

Ein β -Standardpräparat (für kleine Energien Co^{60} , für grössere Energien $\text{RaD} + E$) wird im Spektrometer ausgemessen. (Zählrohrfenster aus Formvar von $\approx 0,1 \text{ mg cm}^{-2}$.) An Stelle des Zählrohres kann alsdann der Scintillationszähler ins Spektrometer eingesetzt werden. Wenn noch für identische Geometrie gesorgt wird, so können die bei gleichem H_Q gemessenen Stosszahlen direkt miteinander verglichen werden. Wenn man die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohres, die zu $\varepsilon_{ZR} = 92\%$ bestimmt wurde, berücksichtigt, so erhält man durch Vergleich der beiden gemessenen Stosszahlen unmittelbar die absolute Ansprechwahrscheinlichkeit der Scintillationsanordnung.

Um eine optimale Ansprechwahrscheinlichkeit zu gewährleisten, ist es notwendig, ein einzelnes an der Photokathode ausgelöstes

Elektron registrieren zu können. Bei der 3200-fachen Nachverstärkung ist es dazu nötig, den Multiplier mit einer Spannung $V_M = 960$ V zu betreiben. Eine Messung mit durch Licht ausgelösten Photoelektronen an der Multiplierkathode, ergab bei dieser Betriebsspannung, dass ca. 90 % aller Photoelektronen gezählt werden. Man hat dazu bei verschiedenen Multiplierbetriebsspannungen Attenuatorkurven aufzunehmen und erhält für höhere Spannungen ein Plateau. Dort werden 100 % der Photoelektronen gezählt.

Bei der erwähnten Betriebsspannung beträgt der thermische Null-effekt der Photokathode ca. 500 Stösse/min für Wasserkühlung

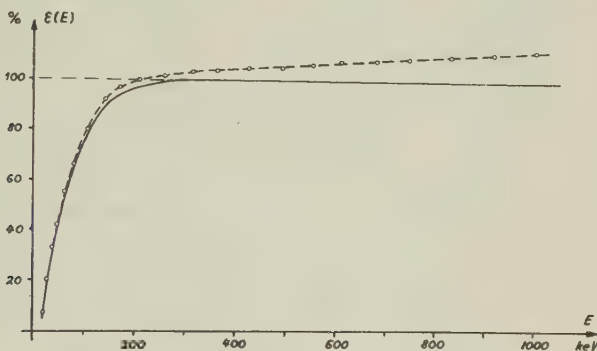


Fig. 8.

Ansprechwahrscheinlichkeit des Scintillationszählers für Elektronen.

von $T = 14^\circ \text{C}$ bzw. ca. 200 Stösse/min für Eiswasserkühlung von $T = 0^\circ \text{C}$.

Die für unsere Anordnung gemessene Ansprechwahrscheinlichkeit als Funktion der Elektronenenergie ist aus Fig. 8 ersichtlich.

Sofort fällt auf, dass die Messpunkte bei grösseren Elektronenenergien höher als 100 % liegen und dass die Abweichung systematisch mit der Elektronenenergie zunimmt. Dieser Effekt wurde auch von anderen Autoren¹³⁾ gefunden. Eine Überprüfung des Tatbestandes ergab, dass es sich hier entweder um verzögerte Lichtimpulse im Anthracenkristall oder eine Art Maltereffekt¹⁴⁾ im Photomultiplier handeln muss. So konnte z. B. bei mit Licht ausgelösten Photoelektronen auch für höhere Betriebsspannungen kein Plateau erreicht werden, die Stosszahl nimmt auch dort ständig noch etwas zu. Wie auch die Attenuatorkurven (Fig. 9) zeigen, erhält man für grosse Elektronenenergien zunächst einen flachen Verlauf der Kurve, die sich an 100 % annähert. Werden Impulse mit immer kleinerer Amplitude mitgezählt, so steigt die Kurve weiter an, um 100 % zu übersteigen. Dieser Kurvenverlauf zeigt, dass der

Überschuss nur durch Stösse kleiner Amplituden entsteht, also durch eines oder wenige Photoelektronen verursacht wird. Da das Auflösungsvermögen des Untersetzers $\tau = 10^{-6}$ sec beträgt, müssen diese kleinen Impulse gegenüber den von der Elektronenstrahlung herrührenden Impulsen um mindestens 10^{-6} sec verzögert sein und sie geben daher keinen Anlass zu wahren Koinzidenzen. Dies wurde durch eine Koinzidenzmessung bestätigt.

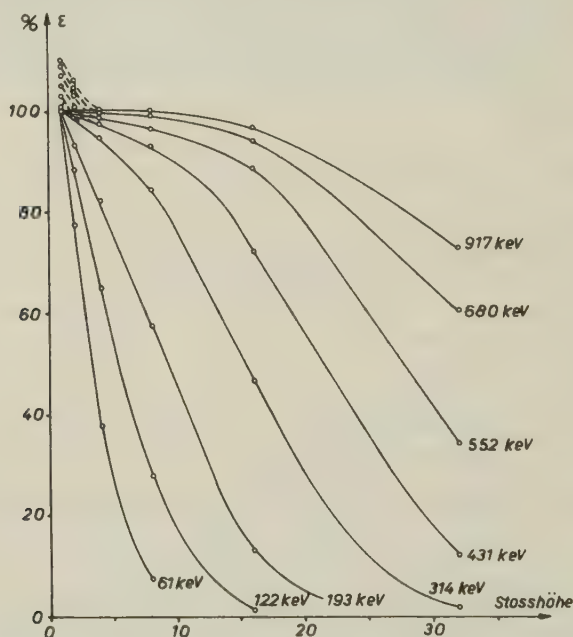


Fig. 9.
Attenuatorkurven.

Nach dem Verlauf der Messpunkte in Fig. 8 scheint der Zuwachs an Einzelstössen zur Elektronenenergie proportional zu sein. Unter dieser Voraussetzung kann die ausgezogene Kurve der Fig. 8 konstruiert werden. Diese Kurve dürfte somit der tatsächlichen Ansprechwahrscheinlichkeit des Scintillationszählers für Koinzidenzen entsprechen.

Für viele Messungen ist es von Vorteil, wenn im Scintillationszähler eine gewisse Energieauswahl der registrierten Elektronen getroffen werden kann. Ebenso wäre es wünschenswert, wenn bei Koinzidenzmessungen zwischen zwei Konversionselektronenlinien die Energie des Koinzidenzpartners, der im Scintillationszähler gemessen wird, bestimmt werden könnte. Dies kann durch Bestim-

mung der Verteilung der Stosshöhen in Funktion der Elektronenenergie erfolgen. Wenn, wie bei der Messung der Ansprechwahrscheinlichkeit, der Scintillationszähler an Stelle des Zählrohres im Spektrometer eingesetzt wird, so können bestimmte Elektronenenergien ausgewählt und für dieselben die Attenuatorkurven aufgenommen werden. Fig. 9 zeigt die für die Impulshöhe 1 auf 100% reduzierten Attenuatorkurven.

c) Koinzidenzwirkungsgrad η .

Koinzidenzverluste können entstehen, wenn die Signale von Scintillationszähler und Zählrohr nicht gleichzeitig in den Koinzidenzverstärker gelangen. Die zeitlichen Verschiebungen können einerseits durch die Laufzeit der Multiplierimpulse im Verstärker und andererseits durch die Time-lag im Zählrohr entstehen. Die Time-lag beträgt für unsere Zählrohre ca. 10^{-7} sec¹⁵⁾. Weiterhin können Koinzidenzverluste durch verschieden grosse Impulsamplituden im Multiplierkanal entstehen. Die Risetime ist ja unabhängig von der Impulsamplitude und so wird der Schmitt-Trigger bei grossen Impulsen zeitlich früher ansprechen als bei kleinen Impulsen. Um die Koinzidenzverluste zu bestimmen, wurde so verfahren, dass wahre Koinzidenzen im Spektrometer gemessen und der eine Kanal gegenüber dem andern zeitlich verzögert wurde. Führt man diese Messungen für verschiedene β -Energien im Scintillationszähler durch, so können auch die eventuell durch die endliche Risetime entstehenden Koinzidenzverluste erfasst werden.

Als Quelle wahrer Koinzidenzen wurden die Konversionselektronen der stark konvertierten γ -Kaskade von Hg^{197} benutzt und ebenso Koinzidenzen des β -Spektrums mit den Konversionselektronen der 411 keV γ -Strahlung von Au^{198} . Die auf diese Weise aufgenommenen Kurven sind in Fig. 10 dargestellt. Dabei sind die einzelnen Maxima der Kurven auf 100% reduziert. Wie aus einer später besprochenen Messung hervorgeht, werden dort tatsächlich alle wahren Koinzidenzen registriert. Die Aufnahme der Kurven erfolgte mit einem konstanten Koinzidenzauflösungsvermögen von $\tau = 2,3 \cdot 10^{-7}$ sec. Aus dem Verlauf der Kurvenschar ist ersichtlich, dass für die Verzögerungszeit von $\Delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ sec im Zählrohrkanal, für alle β -Energien 100% der Koinzidenzen registriert werden und so sind alle weiteren Messungen mit dieser Verzögerung im Zählrohrkanal durchgeführt.

Es bleibt nun zu untersuchen, ob im Maximum der Kurven auch tatsächlich alle wahren Koinzidenzen registriert werden. Zur Kontrolle wurden wahre Koinzidenzen zwischen dem β -Spektrum und

den Konversionselektronen der 411 keV γ -Strahlung von Au^{198} bei verschiedenen Koinzidenzauflösungsvermögen gemessen. Das Au^{198} eignet sich für diese Messung besonders gut, da hier als Koinzidenzpartner der Konversionselektronen, im Scintillationszähler das gesamte β -Spektrum beteiligt ist und somit im Multiplierkanal Impulse in einem grossen Amplitudenbereich koinzidenz-

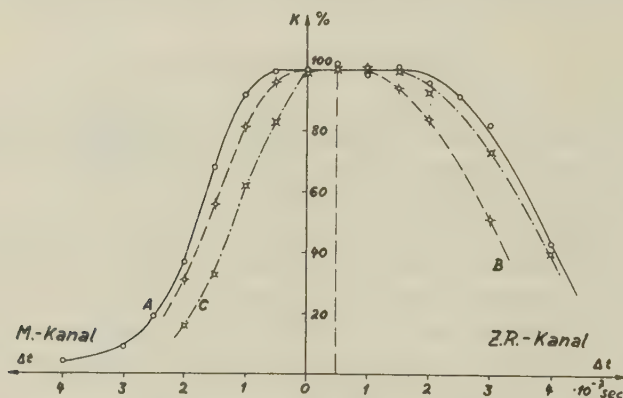


Fig. 10.

Koinzidenzen bei zeitlicher Verzögerung der Signale.

Kurve A: Messung mit Au^{198} . Im Zählrohr: 328 keV e^- .
Im Scintillationszähler: β -Spektrum.

Kurve B: Messung mit Hg^{197} . Im Zählrohr: 120 keV e^- .
Im Scintillationszähler: Im Mittel ca. 150 keV e^- .

Kurve C: Messung mit Hg^{197} . Im Zählrohr: 151 keV e^- .
Im Scintillationszähler: Im Mittel ca. 120 keV e^- .

fähig sein müssen. Wenn man voraussetzt, dass bei schlechtem Auflösungsvermögen ($\tau = 7,5 \cdot 10^{-7}$ sec) alle wahren Koinzidenzen gezählt werden, so registriert man bis zu $\tau = 2,3 \cdot 10^{-7}$ sec ($100 \pm 1,4$)% Koinzidenzen. Mit diesem Ergebnis wird der Koinzidenzwirkungsgrad $\eta = 1$.

d) Durch Streuung erzeugte Koinzidenzen.

Es muss nunmehr noch geprüft werden, ob die mit der Apparatur gemessenen Koinzidenzen auch tatsächlich wahre Koinzidenzen sind und nicht durch Streuung oder andere Effekte hervorgerufen werden

Elektronen, die im Anthracenkristall genügend Energie verloren haben, um gezählt zu werden, können zurückgestreut werden. Liegt der Impuls dieser rückgestreuten Elektronen im eingestellten

Impulsintervall des Spektrometers, so werden diese Elektronen auch im Zählrohr registriert und geben dadurch Anlass zu Koinzidenzen. Die Anzahl dieser durch Streuung erzeugten Koinzidenzen hängt ganz von der Art und der Impulsverteilung der Elektronenstrahlung des verwendeten Präparates ab. Die Größenordnung dieses Effektes wurde durch Messung mit einem Ra D + E-Präparat (ca. 15 mg cm^{-2}) bestimmt. Dieses weist keine wahren β - β -Koinzidenzen auf. In Fig. 11 ist die gemessene Koinzidenzrate bezogen auf

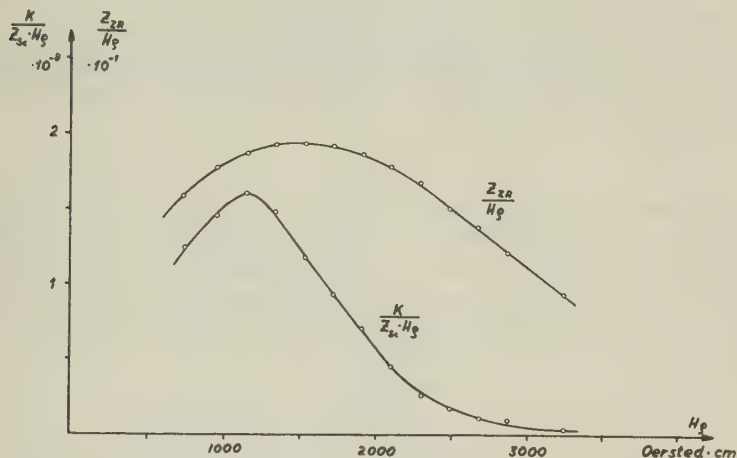


Fig. 11.

Durch Streuung erzeugte Koinzidenzen von Ra D + E.

die Einzelstosszahl im Scintillationszähler aufgetragen. Ebenfalls eingezeichnet ist die durch H_E dividierte Einzelstosszahl im Zählrohr. Beide Kurven sind auf die Durchlässigkeit des Zählrohrfensters korrigiert. Man sieht, dass im allgemeinen der Anteil der durch Streuung verursachten Koinzidenzen klein ist.

e) Der Raumwinkel ω_{sc} des Scintillationszählers.

Bei einem Kristalldurchmesser von 12 mm und einem Abstand Präparat-Kristall von 6,2 mm, wird für unsere Anordnung für die verwendeten Präparate von 6 mm Durchmesser, der numerisch bestimmte relative Raumwinkel $\omega_{sc} = 14\%$. Andererseits kann ω_{sc} auch experimentell bestimmt werden. Wird ein Präparat mit bekannten Konversionskoeffizienten ausgemessen, so kann der unbekannte Raumwinkel aus den Messresultaten ermittelt werden. Eine solche Messung mit Hg^{197} ergab in Übereinstimmung mit obigem Wert $\omega_{sc} = 13\%$.

f) *Einfluss der Richtungskorrelation.*

Bei allen Koinzidenzmessungen im Spektrometer muss bei der Auswertung gemessener Koinzidenzen ein eventuell anisotroper Verlauf der Elektronenstrahlungen berücksichtigt werden.

Der allgemeine Ausdruck einer solchen anisotropen Winkelverteilung lautet

$$W(\Theta) = 1 + A_1 \cos^2 \Theta + A_2 \cos^4 \Theta + \dots$$

Wird nur das erste Glied berücksichtigt, so wird die mittlere Koinzidenzzahl unter dem Winkel $\Theta = (\pi/4 + n\pi/2)$ gemessen, denn dann ist

$$W(\pi/4 + n\pi/2) = 1 + 0,5 A_1$$

Für unser Spektrometer beträgt der Startwinkel der Elektronen gegen die Spektrometerachse $\alpha = 18^\circ \pm 4,5^\circ$. Unter Annahme einer punktförmigen Quelle wird der Öffnungswinkel des Kristalls $\beta = 45^\circ$. Berücksichtigt man die räumliche Winkelverteilung, so ergibt sich für unsere Anordnung ein mittlerer Winkel $\Theta_m = 145,5^\circ$. Damit wird

$$W(\text{Spektrometer}) = 1 + 0,675 A_1$$

Die im Spektrometer gemessenen Koinzidenzen müssen daher mit dem Faktor

$$w = \frac{1 + 0,5 A_1}{1 + 0,675 A_1}$$

multipliziert werden.

Selbst bei der sehr starken ($e^- - e^-$)-Richtungskorrelation von Hg^{197} , die eine Anisotropiekonstante $A_1 = 0,24$ aufweist, beträgt diese Korrektur nur 3,5%. Im allgemeinen kann daher der Einfluss der Richtungskorrelation auf die Messungen vernachlässigt werden.

§ 5. Messungen von Konversionskoeffizienten.

Für verschiedene, der unter den Anwendungsmöglichkeiten der Apparatur besprochenen hypothetischen Zerfallsschemen wurde eine Messung durchgeführt. Es entsprechen

Isotop	Fall
Au^{198}	1
In^{111}	3
Cd^{109}	4

Messungen an Au^{198} .

Als Präparat wurde ein Pile-Präparat von Harwell (England) verwendet. Das Gold wurde elektrolytisch, als dünne Schicht, auf eine $0,3 \text{ mg cm}^{-2}$ dicke Goldfolie niedergeschlagen. (Schicht + Unterlage ca. $0,35 \text{ mg cm}^{-2}$).

Mit diesem Präparat wurde der von vielen Autoren¹⁶⁾ untersuchte Zerfall des Au^{198} gemessen. Die erwähnten Untersuchungen enthalten teilweise sich widersprechende Resultate. So finden verschiedene Autoren^{17) 18)} ein metastabiles Niveau, von dem sie durch Messung verzögerter Koinzidenzen eine Lebensdauer von ca. $3 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$ bestimmt haben. Sie ordnen die gemessene HWZ dem

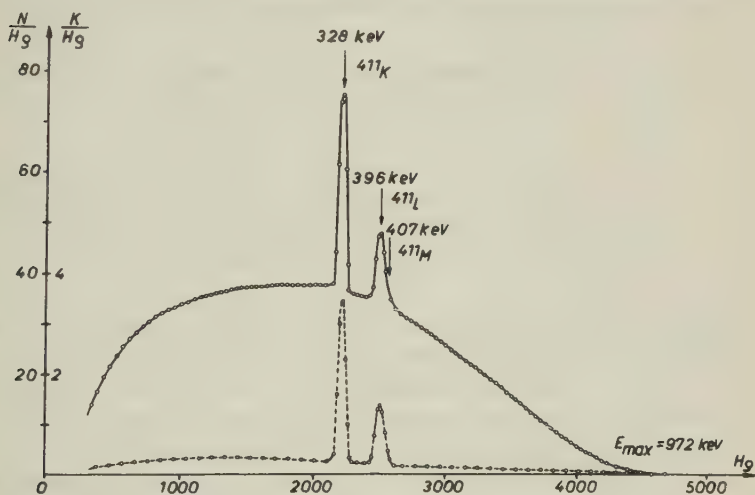


Fig. 12.

β -Spektrum und β - e^- -Koinzidenzen von Au^{198} .

411 keV γ -Übergang¹⁷⁾ oder einem γ -Übergang kleinerer Energie zu¹⁸⁾. Daher ist hier speziell versucht worden festzustellen, ob neben den Konversionselektronen der 411 keV γ -Strahlung noch Elektronenlinien kleinerer Energie und schwacher Intensität auftreten, die im Einzelstosspektrum kaum mehr nachweisbar wären. Das von R. W. PRINGLE und S. STANDIL¹⁹⁾ gefundene Niveau von 1,1 MeV fällt für den metastabilen Zustand wahrscheinlich ausser Betracht.

Die Messung der Einzelstösse und der Koinzidenzen ist in Fig. 12 dargestellt. Abgesehen von ca. 2% der Übergänge, entspricht der Zerfall von Au^{198} dem Fall 1, der unter den Anwendungsmöglich-

keiten der Apparatur besprochen wurde (Fig. 3). Deutlich ist ersichtlich, dass die gemessenen Koinzidenzen bei 328 keV und 396 keV den Untergrund aus wahren und durch Streuung erzeugten Koinzidenzen um ein Mehrfaches überragen, während bei unserem Spektrometer das Verhältnis der Einzelstosszahlen $Z_{\text{Linie}}/Z_{\text{Spektrum}}$ ca. 1:1 ist. Aus der Koinzidenzmessung folgt unmittelbar, dass die 411 keV γ -Strahlung in Kaskade zum β -Spektrum emittiert wird.

Die Auswertung der gemessenen Koinzidenzen nach Gleichung I ergibt die Konversionskoeffizienten $\kappa_K = 2,65\%$ und $\kappa_{L+M} = 1,2\%$ sowie das Verhältnis $K/(L+M) = 2,2$. Zur Kontrolle wurden auch die Einzelstossmessungen ausgewertet und dabei ergaben sich für die Konversionskoeffizienten die gleichen Werte. Diese stimmen auch mit den Messresultaten anderer Autoren überein. Diese Übereinstimmung zeigt, dass es ohne weiteres möglich ist, durch Koinzidenzmessung im Spektrometer, die Konversionskoeffizienten von γ -Übergängen zu bestimmen, wenn die Hilfsgrössen der Apparatur bekannt sind.

Der so für die 411 keV γ -Strahlung gemessene Konversionskoeffizient $\alpha_K = N_e/N\gamma = 2,75 \pm 0,3\%$ ist in guter Übereinstimmung mit den von ROSE, GOERTZEL, SPINRAD, HARR und STRONG²⁰⁾ berechneten K -Konversionskoeffizienten für elektrische Quadrupolstrahlung.

Neben den Konversionselektronen der 411 keV γ -Strahlung finden wir bis hinunter zu 10 keV keine weiteren Konversionslinien und zwar sowohl im Einzelstosspektrum, als auch in der wesentlich empfindlicheren Koinzidenzmessung. Nach den Rechnungen für die K -Konversionskoeffizienten und nach Abschätzungen für die L -Konversionskoeffizienten treten nach unseren Messungen neben der 411 keV γ -Strahlung keine weiteren γ -Strahlungen kleinerer Energie auf, deren Intensität grösser als 5% der Zerfälle ist.

Weiter wurden noch von einem Au^{198} -Präparat im Linsenspektrometer die Photo- und die Compton-Elektronen mit einem Au-Strahler von $2,6 \text{ mg cm}^{-2}$ gemessen. Auch hier wurden, in Übereinstimmung mit anderen Messungen²¹⁾ ausser der 411 keV γ -Strahlung keine Andeutungen einer weicheren Strahlung gefunden.

Messungen an In^{111} .

Eine Cd-Target wurde im Cyclotron während 2 Stunden bestrahlt. Durch (p, n)-Prozess entstehen dabei die verschiedenen In-Isotope. Nach ca. 20 Stunden sind die kurzlebigen Isotope abgeklungen, und es bleiben das In^{111} (2,84 d) und das In^{111} (50 d). Durch Auf-

dampfen des radioaktiven Indiums im Vakuum²²⁾ auf eine dünne Al-Unterlage wurde ein Präparat hergestellt*). Ein solches Präparat wiegt ca. 0,2 mg cm⁻².

Das In¹¹¹ zerfällt durch K-Einfang in Cd¹¹¹ und geht unter Emission zweier γ -Strahlungen in Kaskade (173 keV und 247 keV) in den Grundzustand über²³⁾. Das In¹¹⁴ geht unter Emission einer γ -Strahlung (192 keV) in einen isomeren Zustand von 72 sec HWZ

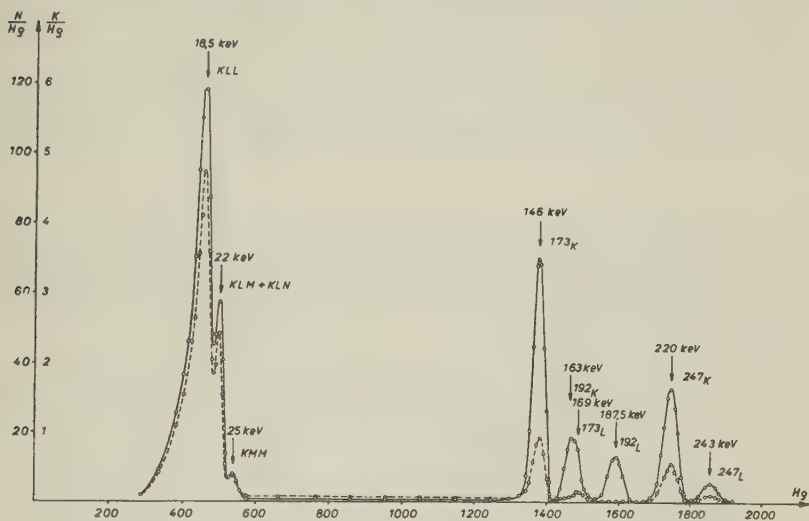


Fig. 13.

Elektronenspektrum und e^-e^- -Koinzidenzen von In¹¹¹ und In¹¹⁴.

und zu 97% unter Emission eines kontinuierlichen β -Spektrums in den Grundzustand Sn¹¹⁴ über¹⁶⁾.

In einem Linsenspektrometer mit dem üblichen Auflösungsvermögen werden die 173_L-Linie (169 keV) und die 192_K-Linie (163 keV) nicht mehr aufgelöst. Eine Trennung dieser beiden Linien ist erst nach dem Abklingen des kurzlebigeren In¹¹¹ möglich. Wenn hingegen im Linsenspektrometer die Koinzidenzen mit gemessen werden, so können die unaufgelösten Linien aufgeteilt werden. Es muss ja das Verhältnis der Koinzidenzen zu den Einzelstoßzahlen bei der K-, bei der L- und bei der M-Konversionslinie desselben γ -Überganges konstant sein.

Fig. 13 zeigt die Messung des Einzelstoßspektrums und der (e^-e^-)-Koinzidenzen der beiden In-Isotope.

*) Für die Herstellung der im Vakuum aufgedampften Präparate möchten wir Herrn Dr. H. FRAUENFELDER danken.

Bei der Auswertung ist zu beachten, dass sich die Koinzidenzen bei den Konversionslinien des In^{111} aus $K = K_{\text{Konv}} + K_A$ zusammensetzen. Dabei sind K_{Konv} jene Koinzidenzen, welche durch Messung der Konversionselektronen des in Kaskade zerfallenden γ -Überganges im Scintillationszähler auftreten und K_A sind jene Koinzidenzen, welche durch Messung der KXY -Augerelektronen im Scintillationszähler auftreten. Weiterhin ist der Anteil von K_A bei den K -Konversionslinien doppelt so gross wie bei den L -Konversionslinien, also

$$\left[\frac{K_A}{Z} \right]_K^{247} = 2 \left[\frac{K_A}{Z} \right]_L^{247}$$

Zudem muss

$$\left[\frac{K_{\text{Konv}}}{Z} \right]_K^{247} = \left[\frac{K_{\text{Konv}}}{Z} \right]_L^{247} \text{ sein.}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen können K_{Konv} und K_A bei den Konversionslinien der 247 keV γ -Strahlung bestimmt werden. Da K_A zu den Einzelstössen proportional ist, können auch die Anteile von K_A der Koinzidenzen K bei den Konversionslinien der 173 keV γ -Strahlung bestimmt werden.

Nach erfolgter Aufteilung können die Konversionskoeffizienten nach Gleichung V einer früheren Arbeit¹⁾ bestimmt werden. Die Auswertung der Messung ergibt die folgenden Resultate.

Energie der γ -Strahlung	$\frac{K}{L+M}$	$\alpha_K = \frac{N_{eK}}{N}$	$\alpha = \frac{N_e}{N}$	$\frac{N_{e173}}{N_{e247}}$
173 keV	6,6	0,093	0,107	1,77
247 keV	5,3	0,051	0,060	

Alle diese Werte sind in guter Übereinstimmung mit anderen Messresultaten, speziell auch mit den Resultaten einer Publikation von C. L. McGINNIS²⁴⁾, die während der Drucklegung dieser Arbeit erschienen ist. Für Vergleiche mit der Theorie und die Diskussion sei auf diese Publikation verwiesen.

Für die 192 keV Konversionselektronen des In^{114} findet man nach Aufteilung der zusammenfallenden Konversionslinien $K/(L+M) = 0,96$. Auch dieser Wert stimmt mit den Resultaten anderer Messungen überein, die mit reinem In^{114} durchgeführt wurden.

Die Gleichung IV von Fall 3 der Anwendungsmöglichkeiten der Apparatur kann zur Bestimmung des Koeff. der inneren Konversion der Röntgenstrahlung von In^{111} resp. Cd^{111} benutzt werden. Sie ergibt

$$a_{K(Z=48)} = 0,17$$

Aus der Aufteilung der einzelnen Augerlinien folgt

$$a_{KLL} = 11,2\% \quad a_{KLM} + a_{KLN} = 5,15\% \quad a_{KMM} = 0,63\%.$$

Die Diskussion dieser Werte und Vergleiche mit der Theorie erfolgt bei den Messungen des Ag.

Messungen an Cd^{109} .

Wir haben im Cyclotron während 20 Stunden Ag bestrahlt. Daraus entstehen durch (p, n)-Prozess Cd^{107} (6,7 h) und Cd^{109} (330 d). Durch Aufdampfen im Vakuum²²⁾ auf eine dünne ebenfalls durch Aufdampfen hergestellte Aluminiumschicht, wurde ein dünnes Präparat (Schicht + Unterlage ca. $0,2 \text{ mg cm}^{-2}$) hergestellt. Nach dem Abklingen des 6,7 h-Isotopes bleibt das Cd^{109} .

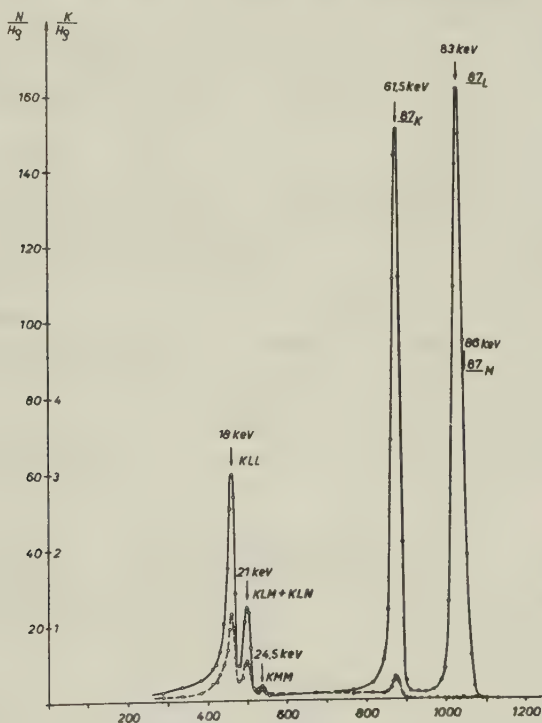


Fig. 14.

Elektronenspektrum und e^-e^- -Koinzidenzen von Ag^{109*} .

Das Cd^{109} zerfällt durch K-Einfang in das Isomer Ag^{109*} , welches eine HWZ von 39,2 sec und eine Anregungsenergie von 87 keV aufweist²⁵⁾.

Das Elektronenspektrum des Cd^{109} resp. Ag^{109*} wurde im Linsenspektrometer ausgemessen. Die Einzelstösse und die Koinzidenzen dieser Messung sind in Fig. 14 dargestellt. Die beiden Linien bei 61,5 keV und 83 keV sind die K - und L -Konversionslinien der 87 keV γ -Strahlung des isomeren Überganges. Das ermittelte Verhältnis $K/(L+M) = 0,75$ ist in Übereinstimmung mit früheren Messungen. Im Einzelstoßspektrum findet man noch drei Linien bei 18 keV, 21 keV und 24,5 keV, welche als Augerelektronen interpretiert werden müssen. Die Koinzidenzmessung zeigt, dass diese Elektronenlinien nur mit der K -Konversionslinie Koinzidenzen aufweisen. Das beweist, dass es sich um die Gruppe der KXY -Augerelektronen handelt. Energiemässig können die drei Linien als Augerelektronen den KLL -, $(KLM + KLN)$ - und wahrscheinlich KMM -Serien zugeordnet werden.

Der Zerfall des Cd^{109} entspricht dem angenommenen Zerfallschema der Fig. 6 und so können zur Auswertung die Gleichungen VII bis X verwendet werden. Für den K -Konversionskoeffizienten ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \text{nach Gleichung VII } \kappa_K = 0,42 \\ \text{nach Gleichung IX } \kappa_K = 0,39 \end{array} \right\} \underline{\kappa_K = 0,40}$$

Unter Berücksichtigung des Verhältnisses $K/(L+M) = 0,75$ und der Fehlergrenzen wird $\alpha = N_e/N_\gamma > 10$.

Zur Auswertung der Gleichungen VIII und X wurde die ganze Gruppe der KXY -Augerelektronen verwendet, so dass der Koeffizient $a_K = a_{KLL} + a_{KLM} + \dots$ der inneren Konversion der Röntgenstrahlung erhalten wird. Man findet

$$\left. \begin{array}{l} \text{nach Gleichung VIII } a_K = 0,16 \\ \text{nach Gleichung X } a_K = 0,18 \end{array} \right\} \underline{a_K = 0,17.}$$

Nach einer unrelativistischen Berechnung des Augereffektes für Ag ($Z = 47$) von BURHOP²⁶) und einer Abschätzung des relativistischen Einflusses von MASSEY und BURHOP²⁷) wird der Koeffizient der inneren Konversion der Röntgenstrahlung

$$a_{K \text{ theor } (Z=47)} = 0,22.$$

Ausser in den Messungenauigkeiten kann die Abweichung zwischen den experimentellen Werten

$$a_{K \text{ exp } (\text{Ag}, Z=47)} = 0,17 \text{ resp. } a_{K \text{ exp } (\text{Cd}, Z=48)} = 0,17$$

und dem theoretisch berechneten Wert darin liegen, dass MASSEY und BURHOP für $Z = 47$ nur den Elektronenübergang $L_I L_{III} \rightarrow K \infty$

sowie den erlaubten optischen Übergang $L_{III} \rightarrow K$ relativistisch berechnet haben. Der Anteil der anderen möglichen Elektronenübergänge wurde einer Arbeit von PINCHERLE²⁸⁾ entnommen. PINCHERLE hat eine vollständige, allerdings unrelativistische Berechnung aller möglichen KXY -Übergänge durchgeführt.

In der folgenden Tabelle sind die relativen Verhältnisse der in Frage kommenden Elektronenübergänge nach PINCHERLE und die experimentell bestimmten Verhältnisse für Ag ($Z = 47$) und Cd ($Z = 48$) einander gegenübergestellt.

Elektronen- übergang	Energie der Augerelektronen $Z = 47$	Relatives Intensitätsverhältnis		
		nach PINCHERLE	exp. für $Z = 47$	exp. für $Z = 48$
$LL \rightarrow K \infty$	17,8—18,7 keV	0,56	0,65	0,66
$LM \rightarrow K \infty$	20,8—21,7 keV	0,322	0,32	0,30
$LN \rightarrow K \infty$	21,5—22,0 keV	0,077		
$MM \rightarrow K \infty$	23,9—24,6 keV	0,041	0,035	0,037

Der Vergleich dieser experimentellen und theoretischen Werte lässt darauf schliessen, dass der Anteil der ($KLM + KLN$)-Augerelektronen bei der Berechnung von PINCHERLE etwas zu gross ist. Der Grund dieser Abweichung dürfte vor allem in der bei der Berechnung nicht berücksichtigten Abschirmung der äusseren Elektroschalen zu suchen sein. Auch ist die Anwendung der unrelativistischen Rechnung auf mittlere Atomkerne problematisch.

Unserem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, möchten wir für seine wertvolle Unterstützung und sein Interesse an dieser Arbeit danken.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER, A. DE SHALIT und W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **24**, 125 (1951).
- ²⁾ MCGOWAN, DE BENEDETTI and FRANCIS, Phys. Rev. **75**, 1761 (1949).
- ³⁾ J. I. HOPKINS, Rev. Sci. Instr. **22**, 29 (1951).
- ⁴⁾ O. KLEMPERER, Phil. Mag. **20**, 545 (1935).
- ⁵⁾ W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **21**, 179 (1948).
- ⁶⁾ A. LUNDBY, Phys. Rev. **80**, 477 (1950); J. O. ELLIOT, S. H. LIEBSON and C. F. RAVILIOUS, Phys. Rev. **79**, 393 (1950).
- ⁷⁾ W. C. ELMORE, Electronics Experimental Techniques; MCGRAW-HILL Book Company, Inc. 1949.
- ⁸⁾ O. S. PUCKLE, Time Bases. Chapman and Hall Ltd., London 1945.
- ⁹⁾ J. M. LESTER, Electronics, April 1946, 147.

- ¹⁰⁾ J. KURSHAN, *Rev. Sci. Instr.* **18**, 647 (1947).
 - ¹¹⁾ O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER, W. ZÜNTI, *Helv. Phys. Acta* **23**, 855 (1950).
 - ¹²⁾ W. J. RAMLER and M. S. FREEDMAN, *Rev. Sci. Instr.* **21**, 784 (1950).
 - ¹³⁾ SHERMAN FRIED, A. H. JAFFEY, N. F. HALL and L. E. GLENDENIN, *Phys. Rev.* **81**, 741 (1951).
 - ¹⁴⁾ L. MALTER, *Phys. Rev.* **49**, 879 (1936).
 - ¹⁵⁾ H. DEN HARTOG, F. A. MULLER, N. F. VERSTER, *Physica* **13**, 251 (1947).
 - ¹⁶⁾ K. WAY et al. *Nuclear Data* 1950.
 - ¹⁷⁾ W. I. MAC INTYRE, *Phys. Rev.* **76**, 312 (1949).
 - ¹⁸⁾ K. P. MEYER, E. BALDINGER und P. HUBER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 517 (1950).
 - ¹⁹⁾ R. W. PRINGLE and S. STANDIL, *Phys. Rev.* **80**, 762 (1950).
 - ²⁰⁾ ROSE, GOERTZEL, SPINRAD, HARR and STRONG. (Private Mitteilung.)
 - ²¹⁾ K. SIEGBAHN, A. HEDGRAN, *Phys. Rev.* **75**, 523 (1949); P. E. CAVANAGH, J. F. TURNER, D. V. BOOKER and H. J. DUNSTER, *Proc. Phys. Soc.* **64**, 13 (1950).
 - ²²⁾ H. FRAUENFELDER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 347 (1950); H. FRAUENFELDER, *Phys. Rev.* **82**, 549 (1951).
 - ²³⁾ A. C. HELMHOLTZ, R. W. HAYWARD, C. L. MCGINNIS, *Phys. Rev.* **75**, 1469 (1949); F. BOEHM, O. HUBER, P. MARMIER, P. PREISWERK und R. STEFFEN, *Helv. Phys. Acta* **22**, 69 (1949); J. L. LAWSON, J. M. CORK, *Phys. Rev.* **58**, 580 (1940).
 - ²⁴⁾ C. L. MCGINNIS, *Phys. Rev.* **81**, 734 (1951).
 - ²⁵⁾ H. BRADT, P. C. CUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK, P. SCHERRER und R. STEFFEN, *Helv. Phys. Acta* **20**, 153 (1947); *Helv. Phys. Acta* **21**, 179 (1948); K. SIEGBAHN, E. KONDAIAH, S. JOHANSSON, *Nature* **164**, 405 (1949).
 - ²⁶⁾ E. H. S. BURHOP, *Proc. Roy. Soc. A* **148**, 272 (1935).
 - ²⁷⁾ H. S. W. MASSEY and E. H. S. BURHOP, *Proc. Roy. Soc. A* **153**, 661 (1936).
 - ²⁸⁾ L. PINCHERLE, *Nuovo Cimento* **12**, 81 (1935).
-

Die elastischen Konstanten von Eis-Einkristallen

von F. Jona und P. Scherrer (ETH., Zürich).

(30. IX. 1951.)

Summary: Two effective methods for the growing of ice single crystals up to 9 cm in diameter and 6 cm in height are given.

The five elastic constants of ice are determined from the diffraction patterns of crystals vibrating at high frequency (SCHÄFER-BERGMANN method) for a temperature of -16°C .

A comparison of the experimental with the theoretical values of PENNY²¹⁾ shows satisfactory agreement.

I. Einleitung.

Unter den physikalischen Eigenschaften des Eises, die in der Literatur schon ein recht umfangreiches Kapitel für sich beanspruchen, stellen die elastischen Grössen ein besonders interessantes Gebiet dar. Zwar sind verschiedentlich Messungen des Elastizitäts- und des Torsionsmoduls vorgenommen worden, jedoch beziehen sich diese ausschliesslich auf *polykristalline* Komplexe. Niemals ist versucht worden, alle fünf Elastizitätskonstanten c_{ik} , die den Einkristall charakterisieren, zu bestimmen. Der Einfluss von Verunreinigungen auf die Resultate sowie auch die Wahl der Messmethoden (statisch oder dynamisch) ist schon in Zusammenhang mit anderen Eigenschaften des Eises verschiedentlich diskutiert worden¹⁾. Tatsächlich zeigen die einzelnen bisher gemessenen Grössen keine befriedigende Übereinstimmung. Es ist klar, dass auf Grund der polykristallinen Struktur die Versuchsstücke jeweils so verschiedene Eigenschaften zeigen mussten.

Es ist daher von grösstem Interesse, zunächst in dieser Hinsicht definierte Verhältnisse zu schaffen und die Messungen an grossen, fehlerfreien Einkristallen vorzunehmen. Gelingt es, entsprechende Einkristalle für die Messungen zu züchten, so ist auch der Reinheitsgrad der Substanz definiert.

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls E mit statischen Methoden ist sehr durch die elastischen Nachwirkungen des Eises erschwert. Es erscheint deshalb fraglich, ob durch statische Messungen überhaupt verlässliche Werte des Elastizitätsmoduls zu er-

halten sind. Von einigen Autoren wurde daher der dynamischen Methode der Vorzug gegeben, bei welcher der Wert von E aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit hochfrequenter elastischer Schwingungen bestimmt werden kann¹⁾. Dabei wurde dann als einzige Richtungsabhängigkeit des Elastizitätsmoduls der Winkel ϑ angegeben, den die Längsrichtung des prismatischen Eispräparates mit der Normalen zur Einfrieroberfläche bildete. Auch wenn man Einkristalle voraussetzt, so ist die optische c -Achse nicht immer senkrecht zur Gefrieroberfläche gerichtet. Daraus folgt, dass die Resultate an verschiedenen Präparaten für gleichen Winkel ϑ die gleichen Schwankungen zeigen müssen, die auch beim Winkel zwischen der optischen Achse und der Normalen zur Gefrieroberfläche auftreten (bis zu 15%). Bei polykristallinen Stücken gestalten sich die Verhältnisse naturgemäss noch unübersichtlicher.

Uns scheint es deshalb notwendig, zuerst das Problem der Züchtung grosser Einkristalle des Eises, dann deren Bearbeitung und schliesslich deren elastische Untersuchung in Angriff zu nehmen. Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einiger Züchtmethoden für die Herstellung von *Eis-Einkristallen* und die Bestimmung *aller Elastizitätskonstanten* des Eises. Als Messmethode wählen wir wiederum die dynamische Methode von SCHÄFER und BERGMANN, bei der die elastischen Daten aus der Beugung des Lichtes an Ultraschallwellen, die im Versuchskristall erregt werden, auszurechnen sind²⁾³⁾⁴⁾.

Im folgenden fassen wir zunächst die wichtigsten experimentellen und theoretischen Ergebnisse der Physik des Eises zusammen.

Die Kristallstruktur des Eises ist mit Hilfe von Röntgenstrahlen verschiedentlich untersucht worden⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾, wobei natürlich nur die Lage der Sauerstoffatome ermittelt werden kann. Jedes Sauerstoffatom befindet sich im Zentrum eines Tetraeders, in dessen Ecken wiederum Sauerstoffatome liegen, und zwar so, dass die Struktur des Ganzen hexagonale Symmetrie besitzt, ähnlich derjenigen des Trydimit⁹⁾. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Sauerstoffatomen beträgt 2,76 Å und die Dimensionen der Elementarzelle sind bei $T = 0^\circ \text{ C}$ durch folgende Werte gegeben⁷⁾⁸⁾:

$$a = 4,5226 \text{ Å}$$

$$c = 7,3670 \text{ Å.}$$

Als Raumgruppe gibt BARNES⁶⁾ D_{3h}^4 oder D_{6h}^4 als gleichberechtigt an, jedoch mit grösserer Wahrscheinlichkeit für D_{6h}^4 .

In neuerer Zeit berichtet aber ROSSMANN¹⁰⁾ über Versuche, die piezoelektrische und pyroelektrische Erregung des Eises nach-

weisen und demnach auf eine polare Kristallform schliessen lassen. Nach diesen Untersuchungen erweist sich ein nicht verzwilligter Eis-Einkristall immer als kräftig piezoelektrisch und pyroelektrisch erregbar. Der piezoelektrische Effekt soll um etwa eine Zehnerpotenz grösser sein als bei Turmalin. Das Eis würde also nicht der holoedrischen Klasse D_{6h} , die nicht piezoelektrisch ist, und auch nicht der Klasse D_{3h} , die wohl piezoelektrisch aber nicht pyroelektrisch ist, angehören. ROSSMANN schlägt die dihexagonale-pyramidale Klasse C_{6v} des hexagonalen Systems vor: Der Eiskristall wäre also damit hemimorph mit polarer sechszähliger Hauptachse.

Die Röntgen-Untersuchungen erlauben, die Stellung der Sauerstoffatome mit Sicherheit festzustellen. Die Lage der Wasserstoffatome hingegen bleibt damit noch völlig ungeklärt. Theoretisch sind hierüber verschiedene Hypothesen aufgestellt worden⁶⁾⁹⁾¹³⁾, jedoch fehlte lange die Möglichkeit einer experimentellen Kontrolle. Während es mit Röntgenstrahlen unmöglich ist, die Lagen der Wasserstoffatome festzustellen, geben *Elektronenbeugungsversuche* (die Elektronenstreuung findet ja im wesentlichen am Kern statt) eher Aufschluss über die Lage des Wasserstoffkerns im Kristallgitter. C. E. MORGAN¹¹⁾, der solche Elektronenbeugungsversuche ausgeführt hat, hat schon 1935 auf die Existenz der Gruppe C_{6v} geschlossen. Mit der Entwicklung der Technik der Neutronenbeugung ist es in neuerer Zeit möglich geworden, eine direkte Strukturbestimmung der Kristalle, die Wasserstoff enthalten, durchzuführen. Der Wirkungsquerschnitt für die Beugung von Neutronen an Wasserstoff und Deuterium ist nämlich mit demjenigen des Sauerstoffs vergleichbar, so dass Interferenzeffekte von Neutronen, die an diesen Kernen gebeugt werden, zu beobachten sind.

Versuche über die Beugung von Neutronen an pulverförmigem schwerem Eis D_2O sind von WOLLAN, DAVIDSON und SHULL¹²⁾ ausgeführt worden. Die Resultate dieser Untersuchungen bestätigen die von PAULING¹³⁾ aufgestellte Hypothese über die Lage der Wasserstoffatome im Eisgitter, die folgendermassen lautet. Auf jeder Linie, die zwei benachbarte Sauerstoffatome verbindet, befindet sich nur ein Wasserstoffatom, das einem der zwei Sauerstoffe näher liegt ($\sim 0,96$ Å) als dem anderen. In der Nähe jedes O-Atoms befinden sich nur 2 ihm benachbarte Wasserstoffe, während die zwei anderen H-Atome weiter von ihm wegliegen; dadurch entstehen also im Eis-Kristall H_2O Moleküle.

Natürlich ist diese Konfiguration nur bereichsweise möglich. Der Eiskristall kann in irgendwelcher Konfiguration bestehen, die diese

Bedingungen erfüllt. Er kann aber auch die Konfiguration ändern durch Sprünge einiger Wasserstoffkerne von einer Lage in der Nähe eines Sauerstoffatoms in eine entsprechende Lage in der Nähe eines benachbarten Sauerstoffatoms. Solche Sprünge würden viele Wasserstoffatome simultan in grösseren Bereichen ausführen, so dass die Bedingung erfüllt ist, dass in der Nähe eines Sauerstoffatoms immer nur zwei Wasserstoffatome vorhanden sind.

Die Tatsache, dass oberhalb ungefähr 200° K die Dielektrizitätskonstante des Eises von derselben Grössenordnung ist, wie diejenige des Wassers, zeugt für eine beträchtliche Orientierungsfreiheit der Wassermoleküle im Eisgitter. Nach diesem Modell hat ON-SAGER (vgl. ¹³) einen Wert der Dielektrizitätskonstante ausgerechnet, der gut mit dem experimentellen Wert übereinstimmt. Wird der Eiskristall bis zu sehr tiefen Temperaturen abgekühlt, so wird er in irgendeiner der vielen Konfigurationen einfrieren, die alle den oben aufgezählten Bedingungen genügen. Unter diesen Voraussetzungen rechnet PAULING¹³) den Wert von 0,806 cal/Mol Grad für die Nullpunktsentropie des Eises aus, was in sehr guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Werte von 0,82 cal/Mol Grad steht.

II. Züchtung grosser Eis-Einkristalle.

Wollen wir eine Methode ausarbeiten, die grosse und fehlerfreie Einkristalle des Eises künstlich herzustellen erlaubt, so liegt es nahe, zu versuchen, im Laboratorium diejenigen Verhältnisse zu reproduzieren, die in der Natur das Wachstum der Eiseinkristalle begünstigen. Grosse, orientierte Einkristalle wurden oft in der Eisschicht von Landseen bei langsamem Gefrieren mit der optischen Achse fast normal zur Wasseroberfläche gefunden. Sie hatten einen Durchmesser von 1 cm bis 10 oder 20 cm. In neuerer Zeit wurden auf den Ålandinseln zwischen Finnland und Schweden sehr grosse Einkristalle des Eises beobachtet¹⁴).

Bei diesem natürlichen Wachstum ist die Wasseroberfläche mit Luft in Berührung, die beträchtlich unter 0° abgekühlt ist. Dann liegen im Wasser Schichten mit nach unten zunehmender Temperatur und Dichte. Nimmt die Temperatur allmählich ab, so friert das reine Wasser von oben nach unten und die Schichten werden dadurch nicht verschoben. Wichtig ist dabei der Umstand, dass die Abkühlung sehr langsam vor sich geht, so dass im Wasser selbst, schon bevor die Eisbildung einsetzt und vor allem wenn die Wasseroberfläche ruhig ist, eine sich möglicherweise weit erstreckende, kristallähnliche Anordnung der Wassermoleküle einstellen kann¹⁴).

Versuche, grosse Einkristalle des Eises künstlich herzustellen, sind nach unserem Wissen ausser denjenigen von ADAMS und LEWIS¹⁵⁾ keine mit Erfolg durchgeführt worden. Diese Autoren haben mit der Methode von NACKEN¹⁶⁾ aus destilliertem, ausgekochtem Wasser Einkristalle von Abmessungen bis zu 10 cm gezüchtet.

Wir haben unsere Eiskristalle im Laboratorium nach zwei Verfahren gezüchtet.

a) *Methode der langsamen Abkühlung mit parallel gerichtetem Temperaturgefälle.*

Aus unseren Vorversuchen folgt als erste wichtige Bedingung für das Entstehen grosser Einkristalle des Eises, dass das Temperaturgefälle im Wasser möglichst genau parallel gerichtet und senkrecht zur Wasseroberfläche sein muss. Ferner soll die Temperatur der umgebenden Luft beträchtlich tiefer als 0° sein. Wir führten unsere Versuche bei einer Raumtemperatur von ca. -20° C aus.

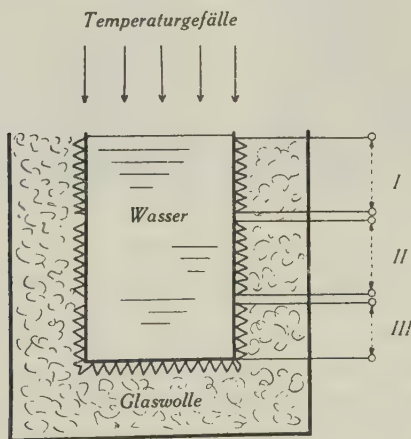


Fig. 1.

Um ein zylindrisches Gefäss (Basisdurchmesser 9 cm, Höhe 12 cm) wurde Konstantandraht dicht gewickelt, so dass mehrere (mindestens 3) voneinander getrennte, senkrecht übereinander liegende Wicklungen gleichen elektrischen Widerstandes resultieren (vgl. Fig. 1). Das Gefäss wurde dann in eine grössere Kartonschachtel mit Glaswolle-Isolation eingebettet (Dicke ca. 6 cm). Um das Temperaturgefälle möglichst parallel von oben nach unten

gerichtet zu halten wurde der Durchmesser des zylindrischen Gefässes nie grösser als 10 cm gewählt. Die Wicklungen I, II und III wurden alle in parallel an dieselbe Spannungsquelle angeschlossen und der fliessende Strom mit einem Milliampèremeter gemessen.

Die günstige Geschwindigkeit des Abkühlungsvorganges wurde durch wiederholtes Ausprobieren gefunden und dann bei allen Versuchen gleich gehalten. Ganz allgemein ergibt eine langsame bessere Resultate als eine schnelle Abkühlung. Die Temperatur des Wassers im Gefäss wird durch Regulieren der an den Wicklungen I, II und III angelegten Spannung auf 1—2° C gebracht und etwa 10 Stunden lang konstant gehalten. Diese Wartezeit ist deshalb günstig, weil sie die Bildung von horizontalen Schichten in der Wassersäule mit nach unten zunehmender Dichte erlaubt (Vermeidung von Konvektionsströmungen). Vielleicht wird dadurch die weiter oben erwähnte kristallähnliche Anordnung der Wassermoleküle möglich gemacht. Daraufhin wird der Strom in der oberen Wicklung I allein mit Hilfe eines Vorschaltwiderstandes langsam und gleichmässig verkleinert. Durch dieses Vorgehen wird das Temperaturgefälle immer vertikal gehalten. Ferner erreicht man dadurch, da zuerst immer das reine Eis kristallisiert, dass die im Wasser enthaltenen Verunreinigungen (gelösten Salze, Luft usw.) nach unten gedrängt werden. Wir haben im allgemeinen den Abkühlungsprozess schon bevor die Wicklung II stromlos wird gestoppt, so dass die Verunreinigungen nicht im Eise mitkristallisieren. Die Höhe der so erhaltenen Eiszylinder war nur etwa 5 bis 6 cm, dafür war aber der Eisblock immer glasklar und fehlerfrei.

Dafür, dass der gezüchtete Eisblock ein Einkristall sei, sind aber obige Bedingungen noch nicht hinreichend. Zuerst stellt man fest, dass die Wahl des Gefässmaterials nicht gleichgültig ist. Bei der Zucht verschiedener Kristalle aus der Schmelze hat man gelernt, dass bestimmte „Verunreinigungen“ in der Schmelze das Wachstum grosser Einkristalle begünstigen¹⁷⁾. So wachsen z. B. Einkristalle von NaCl sehr schlecht aus einer reinen Lösung, sehr leicht hingegen aus einer Lösung, die Spuren von Pb enthält. Die günstig wirkenden „Verunreinigungen“ sind fast immer Spuren von schweren Metallen, wobei die Konzentrationen kleiner als 0,01 Mol% sind. Sehr wahrscheinlich ermöglichen diese Fremdionen eine grössere Unterkühlung, ohne dass dabei die übliche Keimbildung und die darauf folgende mehrfache Kristallisation erfolgt. Bei unseren Versuchen haben wir festgestellt, dass ein metallisches, verzinnertes Gefäss sich für die Bildung grosser Eiseinkristalle sehr gut, ein Glasgefäss hingegen gar nicht eignet. In dieser Hinsicht

spielt auch der Reinheitsgrad des gebrauchten Wassers eine gewisse Rolle. Mehrmals destilliertes, in Vakuum ausgekochtes Wasser im Glasgefäß eingefroren ergibt sehr kleine Einkristalle. Dasselbe Wasser ergibt, im metallischen Gefäß eingefroren, nur dann viel grössere Einkristalle, wenn es eine Zeitlang im Gefäß war, d. h. wenn Metallionen von den Wänden in das Wasser abgegeben wurden. Die besten Resultate erreichten wir mit gewöhnlichem Brunnenwasser in metallischen Gefässen nach dem oben beschriebenen Vorgang.

Der ganze Kristallisationsprozess wird vorwiegend in absoluter Dunkelheit vollzogen. Extreme Erschütterungsfreiheit des Gefäßes ist nicht notwendig: Kleinere Vibrationen dürften sogar



Fig. 2.

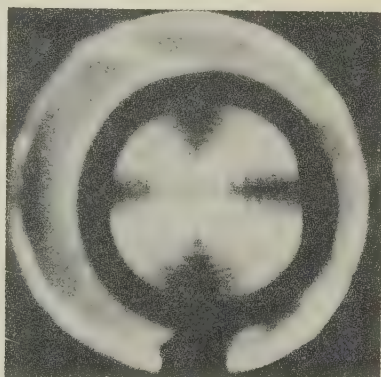


Fig. 3.

günstig sein, da damit die Unterkühlung des Wassers im ersten Moment vermieden wird.

Die gezüchteten Eiskristalle werden zwischen zwei grossen Polaroiden beobachtet und somit leicht identifiziert. Figur 2 zeigt einen Eiszylinder von 9 cm Durchmesser und 6 cm Höhe, der aus einem einzigen Kristall besteht. Die zwei Zündhölzer befinden sich *unterhalb* des Eisblockes. In Figur 3 ist derselbe Kristall zwischen zwei Polaroiden nach Vorschaltung einer Linse photographiert worden. Das charakteristische Achsenbild beweist, dass die optische Achse des Kristalles fast parallel zur Zylinderachse, also ungefähr senkrecht zur ursprünglichen Wasseroberfläche liegt. Dies ist für alle grösseren Einkristalle der Fall, die wir mit dieser Methode erhalten haben, was die Vermutung bestätigt, dass die optische Achse eine bevorzugte Wachstumsrichtung darstellt.

b) *Methode nach Kyropoulos.*

Speziell günstig für die Zucht derjenigen Kristalle aus der Schmelze, die eine bevorzugte Wachstumsrichtung aufweisen, ist die Technik von KYROPOULOS¹⁸⁾¹⁹⁾. Nach dieser Methode konnte man u. a. NaCl-Einkristalle von 30 cm Durchmesser züchten! Sie besteht im wesentlichen darin, dass ein geeignet orientierter Keim mit Hilfe eines Trägers zuerst in Kontakt mit der Kristallschmelze gebracht und dann langsam herausgezogen wird.

Um die Kyropoulos-Methode auf die Zucht von Einkristallen des Eises anzuwenden, bauten wir eine Apparatur, die in Figur 4 schematisch wiedergegeben ist. Am unteren Ende eines 50 cm langen

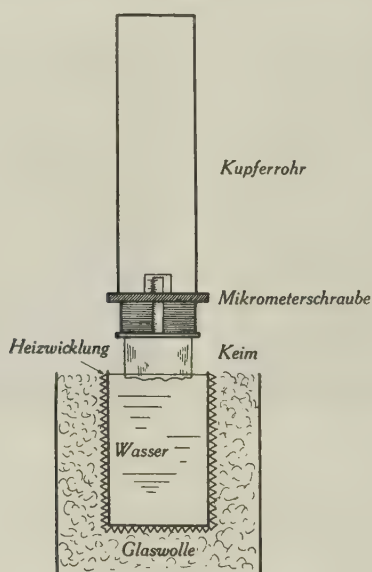


Fig. 4.

Kupferrohres von 7 cm Durchmesser ist eine Mikrometerschraube angebracht, die das feine Hin-und-Her-Schieben eines inneren Gewindes erlaubt. An der unteren kreisförmigen metallischen Platte dieses Gewindes wird ein kleinerer Einkristall aus einer anderen Zucht so angeschmolzen, dass die optische Achse vertikal liegt.

Die Aussentemperatur ist -20°C . Die Wassertemperatur wird einige Stunden lang auf ca. 8°C konstant gehalten.

Nun wird der Keim mit der Wasseroberfläche in Berührung gebracht, wobei man dafür sorgt, dass am Keim eine Eisschicht von etwa 1 bis 2 mm abschmilzt. Daraufhin wird die Wassertemperatur

durch Verminderung des Heizstromes langsam gesenkt und gleichzeitig der Keim mit Hilfe der Mikrometerschraube langsam herausgezogen. Selbstverständlich muss dabei der Kontakt mit der Wasseroberfläche immer gewahrt bleiben. Der Wärmeentzug geschieht hier zum grössten Teil durch Leitung durch den Keim und das grosse gut leitende Kupferrohr, dessen Temperatur gleich derjenigen der umgebenden Luft, d. i. -20°C , ist.

Durch das Fortschreiten der Kristallisation wird das Niveau der Wasseroberfläche im Gefäss sinken, vor allem dann merklich, wenn der Gefässdurchmesser nur wenig grösser als der Keimdurchmesser ist. Im allgemeinen benutzten wir Keime mit rundem Querschnitt von 4 bis 6 cm Durchmesser. Der Gefässdurchmesser war 10 cm. Infolgedessen war die Geschwindigkeit, mit welcher der Keim gehoben wurde, eine sehr geringe. Im Mittel betrug sie 0,5 mm pro Stunde.

Der Prozess wird sehr langsam fortgesetzt: In etwa 6 Tagen ist die Temperatur des noch im Gefäss bleibenden Wassers etwa 2 bis 3°C .

Man erhält somit grosse Eisblöcke von 10 cm Länge und etwa 6 cm Durchmesser, die sich zwischen gekreuzten Polaroiden als vollständig homogene, glasklare Einkristalle erweisen.

Diese Methode hat gegenüber der vorhergehenden den Vorteil, dass sie reproduzierbarer ist, den Nachteil, dass die Zuchtdauer beträchtlich länger wird.

Alle Versuche, den Keim in der Richtung senkrecht zur optischen *c*-Achse wachsen zu lassen, scheiterten vollständig. Man erhält keine Einkristalle, sondern trübe Eisblöcke voll Störungen. Nur Keime, die in der *c*-Richtung wachsen können, ergeben beliebig lange, glasklare Einkristalle.

III. Bearbeitung der Kristalle.

a) *Schneiden.*

Die gewöhnlichen Schneide- und Sägemethoden erweisen sich für Eis als ungünstig. Das Material ist ausserordentlich weich für statische Belastungen (Härte 1,5 der Mohrschen Skala), hingegen spaltet es mit grösster Leichtigkeit bei schlagartiger Beanspruchung. In Anbetracht der Grösse der gezüchteten Eiskristalle hatten wir genügend Material zur Verfügung, um eine Methode anzuwenden, die eine absolute Schnittsicherheit mit einem verhältnismässig grossem Materialverlust verbindet.

Eine Messerschneide von 0,5—1 mm Dicke, 8 cm Länge und 10 cm Höhe wird durch ein Gerüst quadratischen Querschnittes geführt und mit einer Heizwicklung auf 1—2° C geheizt. Sie wird in vertikaler Stellung auf den zu schneidenden Kristall gebracht und mit einem geeigneten Gewicht darauf gedrückt. Kristalle von ca. 10 cm Höhe konnten somit in der Zeit von 2—3 Stunden geschnitten werden. Auf den beiden Seiten der Schneide schmilzt während dieser Zeit das Eis bis zu 1—1,5 mm Tiefe, die Schnittfläche selber jedoch bleibt unverletzt und eben.

b) *Schleifen und orientieren.*

Der Schleifprozess wird der Reihe nach auf einer groben Feile und dann auf immer feinerem Schmirgelpapier ausgeführt. Die Haltung der zu schleifenden Kristalle mit Klemmen, Zangen u. dgl. bewährte sich nicht. Man verliert dabei das Gefühl dafür, wie der Druck des Kristalls auf die schleifende Unterlage zu verteilen ist. Die Bearbeitung erfolgte deshalb von Hand (Handschuhe!) und musste selbstverständlich mit Unterbrechungen ausgeführt werden.

Die zu untersuchenden Kristalle wurden mit Hilfe eines Polarisationsmikroskops jeweils parallel und senkrecht zur optischen *c*-Achse mit einer Genauigkeit von $\pm 20'$ bis $\pm 1^\circ$ orientiert.

c) *Polieren.*

Die Anforderungen, die die Schäfer-Bergmann-Technik an die Politur der Versuchskristalle stellt sind bekanntlich sehr hoch. Eine punktförmige Lichtquelle von etwa $\frac{3}{100}$ mm Durchmesser muss mit Hilfe eines Objektivs durch den polierten Kristall hindurch auf einem Schirm sauber abgebildet werden können, der rund 150 cm vom Kristall entfernt ist.

Eine gute optische Politur einer Eisoberfläche von 4 bis 9 cm² ist mit einiger Sorgfalt dadurch zu erreichen, dass man den Kristall mit geeignetem Druck auf sauberem Filterpapier analog dem Schleifprozess poliert. Die so erhaltene polierte Oberfläche ist aber innerhalb höchstens einer Minute vollständig zerstört. Es findet eine Sublimation der polierten Eisschicht in die wasserarme Atmosphäre bei —20° C statt, und die Oberfläche wird fast augenblicklich trüb und undurchsichtig. Wir durften deshalb die polierte Fläche nicht in Kontakt mit der umgebenden Luft lassen. Eine Öl- oder Lackschicht, die auf der zu schützenden Oberfläche mit einem Pinsel gestrichen oder gespritzt worden war, erwies sich immer als zu wenig gleichmässig und homogen, um die oben er-

wähnte Abbildung zu ermöglichen. Die Schwierigkeit wurde überwunden, indem man auf die polierte Fläche Tetralin dicht auftrug (eine Flüssigkeit, die das Eis nicht löst) und darauf ein feines mikroskopisches Deckglas geeigneter Dimension drückte. Die Abbildung der feinen Lochblende ist damit ohne weiteres sauber zu erhalten. Bei der Anregung der vorbereiteten Eiskristalle mit Ultraschall wirkte aber leider die dünne Flüssigkeitsschicht oft störend. Die ausserordentlich schnelle Erwärmung der Schicht ist auf dem Schirm durch die starke Schlierenbildung direkt zu verfolgen und die Abbildung wird dadurch wesentlich verschlechtert.

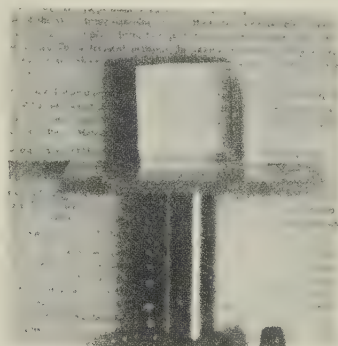


Fig. 5.

Sehr bewährt hat sich folgende Methode: Auf einer gleichmässig erwärmten (etwa $1-2^{\circ}$) ebenen Glasplatte wird ein sauberes, entfettetes, plan paralleles Glasstück geeigneter Abmessung gelegt. Die fein geschliffene Fläche des Eiskristalls wird so lange auf das Glasstück leicht gedrückt, bis alle Luftblasen verschwinden. Bei sorgfältiger Ausführung wird dies schon dann erreicht, wenn eine Eisschicht von weniger als 0,5 mm geschmolzen ist. Daraufhin wird die Heizung der Unterlage entfernt und der Kristall friert auf dem Glasstück fest (Aussentemperatur -20°). Wir haben jeweils mit dem Polarisationsmikroskop kontrolliert, ob die Regulation der geschmolzenen Schicht die Homogenität des Eiskristalles nicht stört. Bei langsamem Abkühlen war dies sehr selten der Fall: Der Eiskristall erschien meist einheitlich und vollkommen mit der gewünschten Orientierung.

Der Eiskristall, den wir auf den erregenden Piezoquarz legen, trägt also auf den zwei Flächen senkrecht zum Lichtdurchgang zwei planparallele Glasstücke. Die erwünschte Abbildung ist somit sehr gut zu erreichen. Damit taucht aber die Frage auf, ob die zwei, im

Vergleich mit der weichen Eissubstanz starren Gläser die Schwingung des Eiskristalls verhindern oder irgendwie beeinflussen können.

Sehr dünn dürfen diese Gläser nicht sein. Die mikroskopischen Deckgläser werden z. B. bei der Regelation verbogen und der Eiskristall wirkt im Strahlengang dann als zylindrische Linse. Am besten bewährten sich Gläser von 0,8—1 mm Dicke.

Nun beträgt die Länge der untersuchten Eiskristalle in Richtung des Lichtdurchganges etwa 2,2 bis 3,5 cm. Das für das Entstehen der Beugungsfigur verantwortliche Schallwellengitter ist bekanntlich im wesentlichen im inneren Teil des schwingenden Körpers anzunehmen⁴⁾. Der hemmende Einfluss der seitlichen Glasplättchen ist also sicher gering. Schliesslich erbrachten einige Aufnahmen, die teils nach diesem Verfahren, teils nach der Methode der Tetralin-Netzung gemacht wurden, den Beweis, dass jener Einfluss unterhalb der Grenze unserer Messgenauigkeit liegt. Dieselbe Kontrolle führten wir mit der Beugungsfigur bei Bestrahlung in der X-Richtung eines Quarzwürfels durch, der einmal frei und einmal zwischen zwei Glasplättchen, die mit Canada-Balsam aufgekittet waren, erregt wurde.

Figur 5 zeigt einen für unsere Zwecke bearbeiteten Eiskristall, dessen polierte Flächen senkrecht zur optischen Achse liegen.

IV. Apparatives.

Auf die Beschreibung der Apparatur verzichten wir an dieser Stelle und verweisen auf die diesbezüglichen Literaturarbeiten^{2) 3) 4)}.

Ein Thermostat, wie etwa bei ⁴⁾ verwendet, kam für diese Messungen nicht in Frage. Die Untersuchung der Eiskristalle muss notwendigerweise bei tieferer Temperatur erfolgen: Will man nun den polierten Kristall aus der Kälte in ein Laboratorium bei normaler Zimmertemperatur bringen, so wird er selbstverständlich augenblicklich beschlagen, schon lange bevor man den Thermostaten zuschliessen kann. Ausserdem muss die Stellung des Kristalls im Strahlengang sorgfältig justiert werden, was bei geschlossenem Thermostaten unmöglich ist. Die Messungen wurden deshalb mit der ganzen Apparatur in einem Raum von etwa -20°C ausgeführt, was selbstverständlich entsprechend geeignete Massnahmen erforderte. So konnte u. a. keine wassergekühlte Lichtquelle benützt werden: Wir verwendeten eine Speziallampe der Firma Belmag mit einer Brennspannung von 75 V~ und einem Brennstrom von 8 A. Es handelt sich um eine Hochdruckquecksilberdampflampe

mit einem inneren Druck von 40 Atm und einer Leuchtdichte von ca. 40000 Stilb, die mit einem schwachen Luftstrom gekühlt wurde.

Die untersuchten Eiskristalle, ebenso die für die Bestrahlung in Richtung der optischen Achse wie auch diejenigen für die Bestrahlung in Richtung senkrecht zur optischen Achse, hatten veränderliche Dimensionen zwischen $2,2 \times 2,5 \times 2,5$ und $3 \times 3 \times 3$ cm³. Sie wurden auf die erregende Piezoquarzplatte nach Zwischenschaltung eines Tropfens von Kompressoröl, das bis -40° C die erwünschte Viskosität beibehält, gedrückt.

Als Negativmaterial für die Aufnahmen wurde mit gutem Erfolg ein „Kodak Super Panchro Press Sports Type Sheet-Film“ oder oft auch ein „Kodak Tri X-Film“ verwendet. Die Temperatur der Filme wurde mit Hilfe einer Heizwicklung während der Belichtung bei $+20^\circ$ C oder mehr gehalten.

Der Eiskristall erwärmt sich beim Schwingen ausserordentlich schnell. Innerhalb einiger Sekunden kontinuierlichen Schwingungsvorganges schmilzt bereits der untere Teil des Kristalls und die Politur wird beschädigt. Die Aufnahmen mussten deshalb in Etappen von höchstens 2–3 sec gemacht werden. Dazwischen wurden Pausen von 2 bis 3 Minuten eingeschaltet. Die gesamte Belichtungszeit der Aufnahmen beträgt $30 \div 120$ sec.

Die Ultraschallfrequenz schwankt je nach Aufnahme zwischen 15 und 18 MHz.

V. Theoretisches.

Für die allgemeine Theorie von FUES und LUDLOFF, die die Auswertung der nach dem Verfahren von SCHAEFER und BERGMANN erhaltenen Beugungsfiguren ermöglicht, verweisen wir ebenfalls auf die entsprechenden Literaturarbeiten³⁾²⁰⁾.

Im folgenden soll diese Theorie für den speziellen Fall des Eises angewendet werden. Für das hexagonale System, in welchem das Eis kristallisiert, reduziert sich das Schema der elastischen Konstanten wie folgt:

c_{11}	c_{12}	c_{13}	0	0	0
c_{12}	c_{11}	c_{13}	0	0	0
c_{13}	c_{13}	c_{33}	0	0	0
0	0	0	c_{44}	0	0
0	0	0	0	c_{44}	0
0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

Unter diesen Bedingungen wird die Gleichung der Formfrequenzfläche eines hexagonalen Kristalls:

$$\left. \begin{aligned} & \left[K_1^2 c_{11} + K_2^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] \\ & \left[K_1^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_2^2 c_{11} + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] \\ & [(K_1^2 + K_2^2) c_{44} + K_3^2 c_{33} - \varrho \omega^2] + \\ & + 2 K_1^2 K_2^2 K_3^2 \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) (c_{13} + c_{44})^2 - \\ & - K_1^2 K_3^2 (c_{13} + c_{44})^2 \left[K_1^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_2^2 c_{11} + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] - \\ & - K_2^2 K_3^2 (c_{13} + c_{44})^2 \left[K_1^2 c_{11} + K_2^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] - \\ & - K_1^2 K_2^2 \frac{1}{4} (c_{11} + c_{12})^2 [(K_1^2 + K_2^2) c_{44} + K_3^2 c_{33} - \varrho \omega^2] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei ω die Anregungsfrequenz, K_1, K_2, K_3 die Komponenten des Wellenvektors im System der kristallographischen Hauptachsen X, Y, Z und ϱ die Dichte des Kristalls bedeuten.

Untersucht man die ebenen Schnitte dieser Formfrequenzfläche senkrecht zu den kristallographischen Achsen, so ergibt sich folgendes Bild.

a) *Beobachtung parallel zur Z-Achse.*

Man setzt $K_3 = 0$ in Gleichung (1) und erhält:

$$[(K_1^2 + K_2^2) c_{44} - \varrho \omega^2] \left\{ \left[K_1^2 c_{11} + K_2^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) - \varrho \omega^2 \right] \right. \\ \left. \left[K_1^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_2^2 c_{11} - \varrho \omega^2 \right] - K_1^2 K_2^2 \frac{1}{4} (c_{11} + c_{12})^2 \right\} = 0. \quad (2)$$

Der untersuchte Schnitt ist eine Kurve 6. Grades, die hier in drei konzentrische Kreise zerfällt:

$$[(K_1^2 + K_2^2) c_{44} - \varrho \omega^2] [(K_1^2 + K_2^2) c_{11} - \varrho \omega^2] \\ \left[(K_1^2 + K_2^2) \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) - \varrho \omega^2 \right] = 0 \quad (2')$$

d. h.

$$(K_1^2 + K_2^2) c_{44} - \varrho \omega^2 = 0 \quad (3)$$

$$(K_1^2 + K_2^2) c_{11} - \varrho \omega^2 = 0 \quad (4)$$

$$(K_1^2 + K_2^2) \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) - \varrho \omega^2 = 0. \quad (5)$$

Die Beugungsfigur, die dem Kreis (3) entsprechen würde, tritt nicht auf, weil die Schubwelle, die sie hervorrufen sollte, den Ver-

schiebungsvektor parallel zum einfallenden Licht hat und damit keine Beugung geben kann. (Ausführlicher Beweis bei⁴.) Die Kreise (4) und (5) treten dagegen auf. Die Beugungsfigur des Eises für Beobachtung parallel zur optischen c -Achse besteht also aus zwei konzentrischen Kreisen (vgl. Fig. 6):

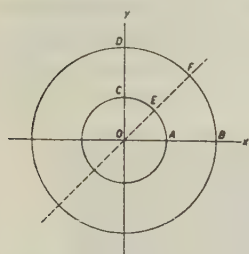


Fig. 6.

$$\left. \begin{aligned} OA = OC = OE &\sim K' = \sqrt{\frac{\varrho \omega^2}{c_{11}}} \\ OB = OD = OF &\sim K'' = \sqrt{\frac{\varrho \omega^2}{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

b) Beobachtung parallel zur X -Achse.

Durch Nullsetzen von K_1 in Gleichung (1) gewinnt man die gesuchte Beugungsfigur, die hier in eine Ellipse:

$$K_2^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2 = 0, \quad (7)$$

und eine Kurve 4. Grades:

$$(K_2^2 c_{11} + K_3^2 c_{44} - \varrho \omega^2) (K_2^2 c_{44} + K_3^2 c_{33} - \varrho \omega^2) - K_2^2 K_3^2 (c_{13} + c_{44})^2 = 0 \quad (8)$$

zerfällt. Die Ellipse (7) tritt in der Beugungsfigur wiederum nicht auf. Aus der Kurve (8) entnehmen wir die Abschnitte auf den Achsen und ihren Winkelhalbierenden (vgl. Fig. 7):

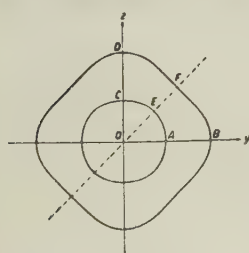


Fig. 7.

$$\left. \begin{aligned} OA &\sim K_{y1} = \sqrt{\frac{\varrho \omega^2}{c_{11}}}, \quad OB \sim K_{y2} = \sqrt{\frac{\varrho \omega^2}{c_{44}}} \\ OC &\sim K_{z1} = \sqrt{\frac{\varrho \omega^2}{c_{33}}}, \quad OD \sim K_{z2} = \sqrt{\frac{\varrho \omega^2}{c_{44}}} \\ \frac{OF^2 - OE^2}{OF^2 + OE^2} &= \sqrt{\frac{4(c_{13} + c_{44})^2 + (c_{11} - c_{33})^2}{2c_{44} + c_{11} + c_{33}}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Mit den Formeln (6) und (9) sind wir somit imstande, aus den beobachteten Beugungsfiguren die fünf elastischen Konstanten des Eises zu berechnen.

Nun können wir aber mit Hilfe des Polarisationsmikroskopes nur die Richtung der optischen c -Achse, nicht aber die Richtung der

X-Achse ausfindig machen, in welche wir das Licht schicken sollten, um die Figur 7 beobachten zu können.

Die Anwendung einiger Methoden, wie z. B. diejenige von ADAMS und LEWIS¹⁵⁾, um die kristallographische a -Richtung unserer Eiskristallen zu bestimmen, erweist sich hier glücklicherweise als überflüssig, denn eine einfache Rechnung zeigt, dass die Formfrequenzfläche des hexagonalen Systems (1) rotationssymmetrisch in bezug auf die $Z \equiv c$ -Achse ist. Führen wir nämlich an Stelle des rechtwinkligen Koordinatensystems K_1, K_2, K_3 , zylindrische Polarkoordinaten ein, d. h. setzen wir:

$$K_1 = r \cos \varphi,$$

$$K_2 = r \sin \varphi,$$

$$K_3 = z$$

in Gleichung (1) ein, so bekommen wir, nach einigen einfachen Umformungen, folgende Formfrequenzgleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ r^4 c_{11} \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + (z^2 c_{44} - \varrho \omega^2) \right. \\ & \quad \left[z^2 c_{44} + r^2 \left[2 c_{11} - \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \right] - \varrho \omega^2 \right] \right\} \\ & (r^2 c_{44} + z^2 c_{33} - \varrho \omega^2) - r^2 z^2 (c_{13} + c_{44})^2 \\ & \quad \left[r^2 \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) + z^2 c_{44} - \varrho \omega^2 \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Wir sehen daraus, dass die Gleichung der Formfrequenzfläche unabhängig vom Winkel φ ist. Diese Eigenschaft der Rotationssymmetrie hat zur Folge, dass, gleichgültig in welche der unendlich vielen Richtungen senkrecht zur optischen Achse das Licht einfällt, wir immer wieder dieselbe Beugungsfigur beobachten, und zwar diejenige, die in Fig. 7 wiedergegeben ist.

Experimentell wurde die Rotationssymmetrie der Formfrequenzfläche dadurch kontrolliert, dass wir die Beugungsfiguren verschiedener Kristallen verglichen, bei denen das Licht in verschiedenen Richtungen senkrecht zur optischen Achse geschickt wurde. Die Beugungsfiguren waren jeweils immer identisch.

VI. Messergebnisse.

Die experimentellen Schwierigkeiten der Methode von SCHAEFER und BERGMANN sind um so grösser, je weicher die untersuchte Substanz ist⁴⁾. Bei weichen Kristallen spielt nämlich die innere Reibung eine grössere Rolle und „ceteris paribus“ ist die Beugungsfigur eines weichen Kristalls viel lichtschwächer als diejenige eines

harten Kristalls. Dies erschwert hauptsächlich die Beobachtung des äusseren Teiles der Beugungsfigur, der ja von transversalen und quasi-transversalen elastischen Wellen hervorgerufen wird. So ist bei Eis die Beobachtung des äusseren Kreises im Beugungsbild bei Bestrahlung in Richtung der optischen Achse und vor allem des äusseren Teiles der Beugungsfigur bei Bestrahlung in Richtung senkrecht zur optischen Achse wegen der Lichtschwäche der entsprechenden Beugungspunkte ausserordentlich kritisch.

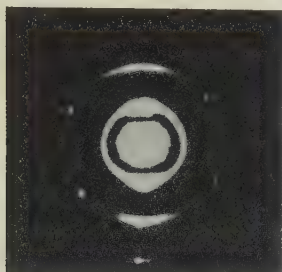


Fig. 8.

Beugungsfigur des Eises bei Bestrahlung in Richtung der optischen Achse.

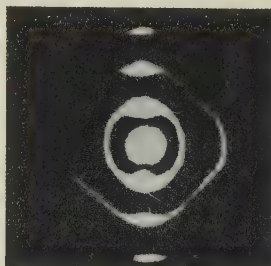


Fig. 9.

Beugungsfigur des Eises bei Bestrahlung in Richtung senkrecht zur optischen Achse (Z-Achse horizontal).

In den Figuren 8 und 9 sind die beiden Beugungsbilder wiedergegeben, die für die Bestimmung der elastischen Konstanten notwendig sind.

Die Formel für die Berechnung einer elastischen Konstante aus der Beugungsfigur lautet allgemein, für $i = k^4$:

$$c_{ik} = \frac{a^2 \cdot \Lambda^2 \cdot \nu^2 \cdot \rho}{(OX)^2}$$

wobei:

- a = Abstand zwischen Kristall und Planfilm,
- Λ = Wellenlänge des Lichtes in Luft (5461 Å),
- ν = Anregungsfrequenz,
- ρ = Dichte des Kristalls,
- OX = Achsenabschnitt des Beugungsbildes.

Für die Berücksichtigung der Brechung des Lichtes an der Kristalloberfläche und an dem Deckglas, die sich in der Grösse a auswirkt, verweisen wir auf unsere frühere Veröffentlichung⁴⁾, ebenso für alles, was sich im allgemeinen auf die Messgenauigkeit bezieht.

Für die Dichte ρ des Eises haben wir den von den International Critical Tables angegebenen Mittelwert 0,92 g/cm³ eingesetzt.

Im folgenden geben wir die Werte der Elastizitätskonstanten des Eises bei der Temperatur $T = -16^{\circ}\text{C}$ an. Daneben ist jeweils der mittlere absolute Fehler angegeben.

c_{ik} in 10^{10} dyn/cm ²		
c_{ik}	Unsere Messung	Theoretischer Wert nach Rechnungen von PENNY ²¹⁾
c_{11}	$13,845 \pm 0,08$	15,2
c_{33}	$14,99 \pm 0,08$	16,2
c_{44}	$3,19 \pm 0,03$	3,2
c_{12}	$7,07 \pm 0,12$	8,0
c_{13}	$5,81 \pm 0,16$	7,0

Zur Kontrolle wurden mit den gemessenen Werten die entsprechenden Schnitte der Formfrequenzfläche numerisch ausgerechnet und in den Figuren 6 und 7 als Polardiagramme dargestellt.

Eine theoretische Bestimmung des elastischen Konstanten des Eises hat ANGELA H. A. PENNY²¹⁾ ausgeführt. Ihre Werte sind in der zweiten Spalte der oberen Tabelle angegeben. Für ihre theoretischen Überlegungen geht PENNY von einem vereinfachten Modell der Eis-Struktur aus, demjenigen von BARNES⁶⁾, wobei die Wasserstoffatome in der Mitte zwischen zwei benachbarten Sauerstoffatomen angenommen werden. Eine Rechnung der Gitterschwingungen ohne diese vereinfachende Annahme wäre kaum durchführbar. Es wird die gewöhnliche Theorie der Gitterdynamik angewendet²²⁾: Wird nur die Wechselwirkung zwischen den nächsten Nachbarn berücksichtigt, so wird die potentielle Energie des kristallinen Gitters eine Funktion von 6 molekularen Konstanten.

Die Anzahl dieser Konstanten kann reduziert werden, wenn man annimmt, dass die vier Sauerstoffatome, die ein vorgeschriebenes Sauerstoffatom umgeben, ein vollkommen reguläres Tetraeder bilden, was ja innerhalb einer Schranke von 0,24% auch tatsächlich zutrifft. Die fünf elastischen Konstanten des Eises lassen sich dann als Funktion von zwei molekularen Konstanten α und β darstellen. Infolgedessen müssen drei Beziehungen zwischen den elastischen Konstanten c_{ik} existieren. Sie werden von PENNY wie folgt angegeben:

$$\left. \begin{aligned} c_{11} + c_{12} &= c_{33} + c_{13} \\ (c_{33} - c_{13})^2 &= 2 c_{44} (c_{33} - 5 c_{13} + 4 c_{12}) \\ 12 c_{13}^2 + 5 c_{13} c_{33} - c_{33}^2 + 2 c_{44} (5 c_{13} + 2 c_{33}) &= c_{12} (15 c_{13} + c_{33} + 14 c_{44}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Für die numerische Bestimmung aller c_{ik} werden demnach zwei experimentelle Werte benötigt. In einer früheren Veröffentlichung

hatte BORN²³⁾ zu diesem Zwecke Werte für das Torsionmodul und für die Poissonsche Zahl des Eises aus DORSEYS Buch¹⁾ entnommen, die sich in der Folge als falsch herausgestellt haben. Die experimentellen Werte, die PENNY für ihre Rechnungen benützt, stammen aus Messungen von NORTHWOOD (zitiert bei ²¹⁾) an polykristallinem Eis und sind:

$$\begin{aligned} \text{Elastizitätsmodul } E &= 9,8 \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2, \\ \text{Poissonsche Zahl } \mu &= 0,335. \end{aligned}$$

Damit wurden die elastischen Konstanten c_{ik} des Eises ausgerechnet, die weiter oben angegeben sind.

Die Beziehungen (10) werden, nach Einsetzen unserer experimentellen Messresultaten:

$$\begin{cases} c_{11} + c_{12} = (20,9 \pm 0,2) \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2 \\ c_{33} + c_{13} = (20,8 \pm 0,2) \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c_{33} - c_{13})^2 = (84,3 \pm 4,4) \cdot 10^{20} \text{ dyn}^2/\text{cm}^4 \\ 2 c_{44} (c_{33} - 5 c_{13} + 4 c_{12}) = (90,7 \pm 9,5) \cdot 10^{20} \text{ dyn}^2/\text{cm}^4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 c_{13}^2 + 5 c_{13} c_{33} - c_{33}^2 + 2 c_{44} (5 c_{13} + 2 c_{33}) = (992 \pm 49) \cdot 10^{20} \text{ dyn}^2/\text{cm}^4 \\ c_{12} (15 c_{13} + c_{33} + 14 c_{44}) = (1038 \pm 27) \cdot 10^{20} \text{ dyn}^2/\text{cm}^4. \end{cases}$$

Leider werden die Fehler durch die Summen- und Differenzbildung der verschiedenen c_{ik} beträchtlich erhöht. Innerhalb der Fehlergrenzen stimmen jedoch die unter (10) von PENNY angegebenen Beziehungen recht gut. Die Übereinstimmung unserer Resultate mit der Theorie von PENNY ist erstaunlich, wenn man bedenkt, dass sie auf Grund des Barnesschen Modells⁶⁾ berechnet wurde, während die Neutronen-Interferenzen¹²⁾ für das Paulingsche Modell¹³⁾ sprechen.

Zu unseren experimentellen Werten für die c_{ik} möchten wir der Vollständigkeit halber noch bemerken, dass es sich dabei, falls Eis wirklich piezoelektrisch ist, um c_{ik}^E , d. h. um Elastizitätsgrößen bei konstantem elektrischem Felde E handelt⁴⁾.

Die vorläufig quantitativ noch unbekannte Piezoelektrizität des Eises wurde für die Umrechnung folgender Elastizitätsmoduln s_{ik} offenbar nicht berücksichtigt. Die Umrechnungsformeln für die s_{ik} aus den c_{ik} lauten dann für das hexagonale System:

$$\begin{aligned} s_{11} + s_{12} &= \frac{c_{33}}{c} & s_{11} - s_{12} &= \frac{1}{c_{11} - c_{12}} \\ s_{13} &= -\frac{c_{13}}{c} & s_{33} &= \frac{c_{11} + c_{12}}{c} \\ s_{44} &= \frac{1}{c_{44}} \text{ wobei } c = c_{33} (c_{11} + c_{12}) - 2 c_{13}^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten für die elastischen Moduln des Eises bei der Temperatur $T = -16^{\circ}\text{C}$:

$$\begin{aligned}s_{11} &= (1,04 \pm 0,03) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\s_{33} &= (0,85 \pm 0,04) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\s_{44} &= (3,14 \pm 0,03) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\s_{12} &= -(0,43 \pm 0,03) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\s_{13} &= -(0,24 \pm 0,01) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dyn},\end{aligned}$$

wobei die Genauigkeit durch die Umrechnung leider erheblich verschlechtert wird. Die Volumkompressibilität S^{24} :

$$S = 2(s_{11} + s_{12} + 2s_{13}) + s_{33} = \frac{2(c_{33} - 2c_{13}) + c_{11} + c_{12}}{c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}}$$

wird für Eis bei -16°C :

$$S = (1,11 \pm 0,07) \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2/\text{dyn}.$$

Die vorliegende Arbeit wurde in einem Raum des Tiefkühlhauses der Brauerei Hürliemann AG., Zürich, ausgeführt. Herrn Dr. Hürliemann sowie Herrn Rutz von der Direktion des Tiefkühlhauses sind wir für das herzliche Entgegenkommen bei jedem Wunsche zu grossem Dank verpflichtet.

Literatur.

- 1) N. E. DORSEY, Properties of ordinary water-substance, Reinhold Publ. Corp., New York, 1940.
- 2) C. SCHAEFER und L. BERGMANN, Sitz. Ber. Berl. Akad. (1935).
- 3) B. ZWICKER, Helv. Phys. Acta, **19**, 523 (1946).
- 4) F. JONA, Helv. Phys. Acta, **23**, 795 (1950).
- 5) W. H. BRAGG, Proc. Phys. Soc. (London) **34**, 98 (1922).
- 6) W. H. BARNES, Proc. Roy. Soc. A **125**, 670 (1929).
- 7) H. D. MEGAW, Nature **134**, 900 (1934).
- 8) P. G. OWSTON und K. LONSDALE, J. Glaciol, **1**, 118 (1948).
- 9) J. D. BERNAL und R. H. FOWLER, J. Chem. Phys. **1**, 515 (1933).
- 10) F. ROSSMANN, Experientia, **6**, 182 (1950).
- 11) C. E. MONGAN, Dissertation E.T.H. Zürich (Athenäum Druckerei AG., Budapest), 1935.
- 12) E. O. WOLLAN, W. L. DAVIDSON und C. G. SHULL, Phys. Rev. **75**, 1348 (1949).
- 13) L. PAULING, The Nature of the Chemical Bond, Cornell Univ. Press (1948), S. 301.
- 14) F. TREY, Berg- und Hüttenm. Monatsh. Montan. Leoben **94**, 100 (1949).
- 15) J. M. ADAMS und W. LEWIS, Rev. Sci. Instr. **5**, 400 (1934).
- 16) NACKEN, Neues Jahrbuch für Mineralogie **2**, 158 (1915).
- 17) Crystal Growth, Discussions of the Faraday Society, London 1949.
- 18) KYROPOULOS, Z. anorg. Chem. **154**, 308 (1926).
- 19) KYROPOULOS, Z. Phys. **63**, 849 (1930).
- 20) E. FUES und H. LUDLOFF, Sitz. Ber. Berl. Akad. (1935).
- 21) ANGELA H. A. PENNY, Proc. Cambr. Phil. Soc. **44**, 423 (1948).
- 22) M. BORN und G. H. BEGBIE, Proc. Roy. Soc. A **188**, 179 (1947).
- 23) M. BORN, Nature **158**, 830 (1946).
- 24) W. VOIGT, Lehrbuch der Kristallphysik.

Die Photospaltung des C^{12} in drei Alphateilchen durch γ -Strahlen bis 32 MeV

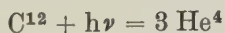
von M. Eder und V. L. Telegdi*).

(10. IX. 1951.)

Summary. The reaction $C^{12} + h\nu = 3 He^4$ has been further investigated in photographic emulsions. By using the bremsstrahlung from a 32 MeV betatron it could be conclusively shown that the cross-section reincreases strongly after the known resonancelike peak at ~ 18 MeV, and some indications of a second maximum around 26 MeV have been obtained. Analyzing the energy-distribution of the alpha-particles resulting from the reaction, it has been demonstrated that a rather radical change in its mechanism is to be made responsible for this reincrease; Be^8 in the excited state at $E^* = 3.0$ MeV does not participate in more than about one third of the disintegrations induced by γ -rays above ~ 19 MeV. The participation of Be^8 in its ground state appears to increase continuously with energy and this is regarded as evidence that this state has an intrinsic angular momentum zero, assuming that the excited state at 3 MeV has $J = 2$, which is supported by other evidence. The results of this investigation regarding the cross-section had been reported at the AERE Conference (1950) in Oxford, and an abstract of the present paper was presented at the meeting of the Swiss Physical Society (May 1951).

I. Einleitung.

Bei den bisher ausgeführten Untersuchungen¹⁾²⁾ des Kernphotoeffektes



wurde die Reaktion entweder mit der bekannten Li- γ -Strahlung oder mit Bremsstrahlung von rund 24 MeV Grenzenergie in photographischen Emulsionen ausgelöst. Das wesentliche Ergebnis dieser Arbeiten war, dass die Wirkungsquerschnittskurve bei etwa 18 MeV ein resonanzartiges Maximum aufweist und diese „Photospaltung“ im ganzen verfügbaren Energiebereich vorwiegend als (γ, α) -Reaktion über Be^8 verläuft. Es wurde ferner gezeigt, dass dabei dieser Restkern zumeist im mit 3 MeV angeregten Zustand entsteht und nur in 2–5% der Fälle im Grundzustand auftritt.

Der mit dem kontinuierlichen Spektrum erhaltene Wirkungsquerschnittsverlauf wies oberhalb des erwähnten Maximums An-

*) Institute for Nuclear Studies, University of Chicago, Chicago, U.S.A.

zeichen eines Wiederanstiegs auf. Die nähere Untersuchung dieses Umstandes schien uns aus verschiedenen Gründen lohnenswert: Einerseits ist über die Energieabhängigkeit von Kernphotoeffekten an sich zu wenig Verlässliches bekannt, andererseits wurde bei γ -Reaktionen bisher nie der hier zu vermutende Wiederanstieg gefunden. (Die Reaktion $\text{Be}^9 (\gamma, n)$ bildet eine Ausnahme, doch lässt sie sich infolge der kleinen Bindungsenergie des Neutrons und der speziellen Lage der Kernniveaux erklären²⁴⁾). Schliesslich ist für die Kritik des Alphateilchenmodells¹⁾ der Wirkungsquerschnittsverlauf ganz wesentlich.

Zur Verfolgung der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts über das beobachtete Maximum bei ~ 18 MeV hinaus schien die zuerst verwendete Bremsstrahlungsquelle wenig geeignet, denn bei einer Grenzenergie von 24 MeV stand bei ihr nur ein zusätzliches Energiegebiet von etwa 6 MeV zur Verfügung und gerade in der Nähe der oberen Grenze sind auch die theoretischen Aussagen über den Verlauf des Bremsstrahlungsspektrums nicht eindeutig³⁾.

In der vorliegenden Arbeit beschreiben wir Untersuchungen, bei denen als Strahlungsquelle ein jetzt im Kantonsspital Zürich aufgestelltes 32-MeV-Betatron diente*). Auch bei dieser Quelle ist das Spektrum experimentell nicht bekannt, doch wird der besonders unsichere Bereich am oberen Ende gegenüber den früheren Arbeiten um rund 8 MeV hinausgeschoben.

Zum Nachweis der Reaktion diente die früher beschriebene photographische Methode¹⁾, die jedoch in technischer Hinsicht vervollkommen werden konnte. Die Neuerungen sind im entsprechenden Abschnitt angegeben.

Schon die vorläufigen Ergebnisse dieser Arbeit, die an der AERE-Tagung in Oxford vorgetragen wurden⁴⁾, bewiesen eindeutig den gesuchten Wiederanstieg des Wirkungsquerschnittes. Seither sind von anderer Seite ⁵⁾ weitere Messungen mit der Bremsstrahlung von 24 MeV Grenzenergie veröffentlicht worden, deren verbesserte Statistik gleichfalls diesen Wiederanstieg erkennen lässt. Infolge des oben über den „Schwanz“ des Spektrums Gesagten liefern jedoch diese Messungen keine sehr verlässlichen Auskünfte. Der Befund der Autoren über den für den Wiederanstieg verantwortlichen Mechanismus deckt sich nicht mit den Folgerungen aus den hier vorgelegten Messungen.

*) Herrn Dr. ing. R. WIDERÖE, der uns die Maschine im B.B.C.-Werk Baden zur Verfügung stellte, möchten wir für sein Entgegenkommen danken.

II. Plattenmaterial und Messtechnik.

Zur Verwendung gelangten ausschliesslich Ilford- E_1 -Platten von $100\ \mu$ Nominalschichtdicke. Bei Verwendung üblicher Entwickler wäre wegen des kleineren Untergrundes für unsere Zwecke an sich die Sorte Kodak *NT-1a* vorzuziehen, doch wurden für diese keine so genauen Energie-Reichweite-Kurven veröffentlicht wie für die Ilford-Platten. Andererseits gelingt es mit Hilfe des von CAMERON und MILLAR⁶⁾ angegebenen Entwicklers mühelos, E_1 -Platten dieser Schichtdicke 200 r-Strahlung (gemessen hinter 0,3 cm Pb mit dem Victoreen-Instrument) auszusetzen, ohne einen allzu starken Schleier hervorzurufen.

Die dabei erzielte Dichte der Ereignisse (ca. 450 Kohlenstoffsterne/cm²) war so gross, dass das Absuchen nur einen kleinen Bruchteil der Arbeitszeit in Anspruch nahm. Die Gesamtheit der hier analysierten Ereignisse entstammt der gleichen Platte, was für die Konsistenz von Vorteil ist.

Die Bestrahlung erfolgte senkrecht zur Emulsion. Diese Anordnung schien dem „schleifenden Einfall“ überlegen, weil bei ihr in der Emulsion keine Änderung des Spektrums durch Selbstabsorption eintreten kann. Eine nähere Rechnung zeigt jedoch, dass die Energieabhängigkeit ihres Absorptionskoeffizienten sehr schwach ist. Die Unsicherheit, die man durch Vernachlässigung der Radialabhängigkeit des Bremsstrahlungsspektrums einführt, ist von vergleichbarer Grössenordnung.

Die Bestimmung der Spurlängen erfolgte wie üblich mit einem geeichten Okularmikrometer. Rund 100 Sterne wurden zur Kontrolle auch mit einem Zeisschen Okular-Schraubenmikrometer ausgemessen. Beide Messreihen ergaben jedoch fast die gleiche Verteilung und Grösse des Fehlervektors \vec{A} (siehe „Impulskontrolle“ weiter unten), weshalb das mühsamere Schraubenmikrometer des weiteren nicht verwendet wurde. Die Impulskontrolle lehrte auch, dass die gleichzeitige Anwendung von Fadenkreuz und Okularmikrometer bessere Winkelbestimmungen ermöglicht als die ältere Methode. Der überwiegende Teil der Messungen wurde mit dieser Technik ausgeführt.

III. Auswertung.

1. Reichweite - Energie - Beziehung.

In den von uns ausgemessenen Ereignissen waren Teilchen enthalten, deren Reichweiten ausserhalb des experimentell unter-

suchten Bereiches⁷⁾ fallen. Wir extrapolierten die von uns benützte Reichweite-Energie-Beziehung mit dem Ansatz

$$E = a R^b \quad (1)$$

Die beiden Konstanten a und b wurden mit der Methode der kleinsten Quadrate im Energiebereich 4–12 MeV bestimmt:

$$a = 0,6957$$

$$b = 0,66$$

Die Übereinstimmung mit den aus der Kurve für Protonen in C_2 -Emulsionen berechneten Werten ist angesichts der nicht sicher vergleichbaren Feuchtigkeitsverhältnisse leidlich gut⁸⁾. Unser Vertrauen in die angegebene Beziehung wird durch das Ergebnis der Impulskontrolle (siehe unten) erhöht. Im Prinzip liesse sich diese auch umgekehrt zur Bestimmung der Energieabhängigkeit der Reichweite heranziehen, doch dürften selbst bei flachen Sternen infolge des natürlichen Straggling statistisch zufriedenstellende Daten schwer zu erzielen sein.

Die seit Beginn dieser Arbeit von ROTBLAT⁹⁾ und BERLMAN¹⁰⁾ veröffentlichten Messungen über die Reichweite von α -Teilchen in E_1 -Emulsionen gehen insbesondere bei höheren α -Energien stark auseinander. Unsere Beziehung (1) stimmt mit den von BERLMAN für E_1 -Platten angegebenen Werten ziemlich gut überein. Im Bereich der niedrigen Energien (< 4 MeV) verwendeten wir zum Teil als Vergleich die auf E_1 -Platten und normale Feuchtigkeit korrigierten Werte von ROTBLAT (siehe Grundzustände).

2. Impulskontrolle und Fehlervektor.

Bereits bei den Messungen, die zur ersten Mitteilung¹¹⁾ über die Photospaltung von C^{12} unter Aussendung von α -Teilchen führten, wurde konsequent der Betrag der vektoriellen Summe der Impulse der drei α -Teilchen bestimmt, um Verwechslungen mit Sternen aus der Reaktion $C^{12}(n, 3\alpha)$ zu vermeiden. Als Kriterium wurde gefordert, dass dieser Betrag klein von der Grössenordnung des γ -Impulses sein sollte. Diese Vorschrift war einerseits hinreichend, weil die 17,6-MeV-Linie zur Auslösung verwechselbarer γ -Reaktionen (z. B. $O^{16} \rightarrow 4\alpha$) nicht ausreicht, andererseits aber kaum einer Verschärfung fähig, weil die verwendete Geometrie eine genaue Festlegung der Einfallsrichtung des γ -Quants nicht zulies.

Bei Auslösung der Reaktion mit Bremsstrahlung höherer Grenzenergie gelten beide Aussagen nicht mehr. Deshalb wurden in die Arbeit von GOWARD, TELEGDI und WILKINS²⁾ nur Ereignisse aufgenommen, die folgendermassen ausgewählt wurden (vgl. auch¹²⁾¹³⁾):

Es wird für jeden Stern ein Fehlervektor $\vec{\Delta}$ bestimmt, der definiert ist durch

$$\vec{\Delta} = \sum_1^3 \vec{p}_i - \vec{p}_\gamma \quad (2a)$$

$$|\vec{p}_i| = \sqrt{2 M_\alpha} \sqrt{E_i} = \text{Impuls der } i\text{-ten Spur}$$

$$|\vec{p}_\gamma| = h\nu / \text{const.} = (E_T + |B|) / \text{const.} \quad (2b)$$

$E_T = \sum_1^3 E_i$ ist die Gesamtenergie des Sterns, $|B|$ die Bindungsenergie für die Reaktion. Setzen wir den Faktor $\sqrt{2 M_\alpha}$ willkürlich gleich Eins, so wird $\text{const.} = 86,332^*$).

\vec{p}_γ ist hier auch der Richtung nach bekannt. Die Summe (2a) wird durch Zerlegung der \vec{p}_i in cartesische Komponenten ausgeführt und $|\vec{\Delta}| = \Delta$ berechnet; die Einfallsrichtung des γ -Strahls wählt man z. B. als z -Achse.

In Abwesenheit von Messfehlern müsste $\vec{\Delta}$ streng null sein. Δ ist ein Mass für die Genauigkeit der Messung und Beobachtung. Das Übersehen kurzer vierter Spuren usw. führt zu einem falschen p_γ und damit im allgemeinen zu einer Vergrösserung von Δ .

Sind infolge der Messtechnik die x -, y - und z -Komponenten mit der gleichen mittleren Unschärfe behaftet, so folgt aus der zusätzlichen Annahme, dass diese Unschärfen gaussisch verteilt sind, unmittelbar, dass Δ einem maxwellschen Verteilungsgesetz gehorchen muss. Die Lage des Maximums (oder der Mittelwert $\bar{\Delta}$) ist ein quantitatives Mass für die Güte der Messung, während die Verteilungskurve selbst über die Beimischung „artfremder“ Ereignisse Auskunft gibt.

Diese Impulskontrolle wurde bei der vorliegenden Arbeit stets angewendet. Sie erwies sich hier als noch unerlässlicher als bei den Untersuchungen bis 24 MeV. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Wirkungsquerschnitt für die störende Reaktion $O^{16}(\gamma, 4\alpha)$ zwischen 24 und 32 MeV steil ansteigt¹⁴⁾. Auf drei dreispurige Sterne entfällt ein vierspüriger, wobei eine der vier Spuren oft kurz ist.

*) Die englischen Autoren setzen den Faktor $\sqrt{2 M_\alpha} = 2$, ihre Impulseinheiten sind also zweimal grösser.

Fig. 1 zeigt die Δ -Verteilung für das gesamte Material. Nach Ermittlung dieser Verteilung wurden alle Sterne mit $\Delta > 0,4$ erneut betrachtet. Einige Sterne hatten durch die Grenzflächen der Gelatine tretende Spuren, bei anderen war eine kurze vierte Spur übersehen worden. Sterne mit durch die Grenzschichten fahrenden Spuren wurden ausgesondert und ergänzt, wenn dies Δ verminderte (siehe unten). Die gefundenen, manchmal zweifelhaften vierten

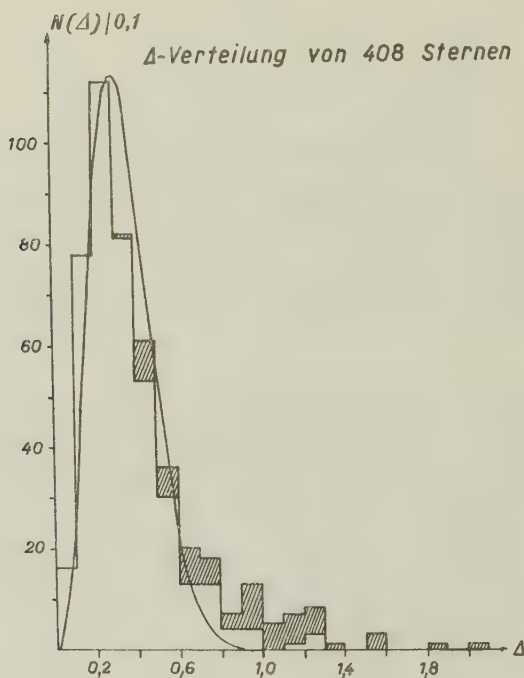


Fig. 1.

Δ -Verteilung von 408 Sternen der Reaktion $C^{12} \rightarrow 3 He^4$. Schraffierte Flächen (61 zusätzliche Ereignisse) entsprechen je ungefähr zur Hälfte Sternen, die der Reaktion $O^{16} \rightarrow 4 He^4$ zuzuordnen sind, und solchen, die die Schicht verlassen.

Spuren wurden gemessen und die Δ für die Reaktion $O^{16} \rightarrow 4 He^4$ berechnet. Die betreffenden Sterne wurden nur dann dieser Reaktion zugeschrieben und ausgeschieden, wenn diese Annahme Δ verminderte; sie sind in Fig. 1, ebenso wie die die Schicht verlassenden Sterne, durch schraffierte Flächen angegeben.

Die eingezeichnete Kurve ist eine Maxwellverteilung, normalisiert auf die Gesamtzahl der Sterne (408). Der die Form der Verteilung

bestimmende Parameter wurde aus $\bar{\Delta}$ berechnet. Dieser Parameter bestimmt die Lage des Maximums, Δ_{\max} . Dass die Verteilung durch eine maxwellsche gut wiedergegeben wird, zeigt folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned} \Delta_{\max}(\text{exp.}) &= 0,25, & \Delta_{\max}(\text{aus } \bar{\Delta} \text{ exp.}) &= 0,30. \\ (\bar{\Delta}^2)^{1/2}(\text{exp.}) &= 0,39, & (\bar{\Delta}^2)^{1/2}(\text{aus } \bar{\Delta} \text{ exp.}) &= 0,37. \end{aligned}$$

Andererseits zeigen separate Δ -Verteilungen für E_T grösser bzw. kleiner als 12 MeV, dass die Messgenauigkeit mit E_T steigt, und dass für $E_T > 12$ MeV die Δ -Verteilung noch bedeutend besser durch eine Maxwellverteilung wiedergegeben wird als beim Gesamtmaterial.

Die der Maxwellverteilung zugrundeliegende Hypothese wurde an getrennten Verteilungen von Δ_x , Δ_y , Δ_z geprüft. Alle drei lassen sich durch Gausskurven mit dem gleichen Parameter gut nähern.

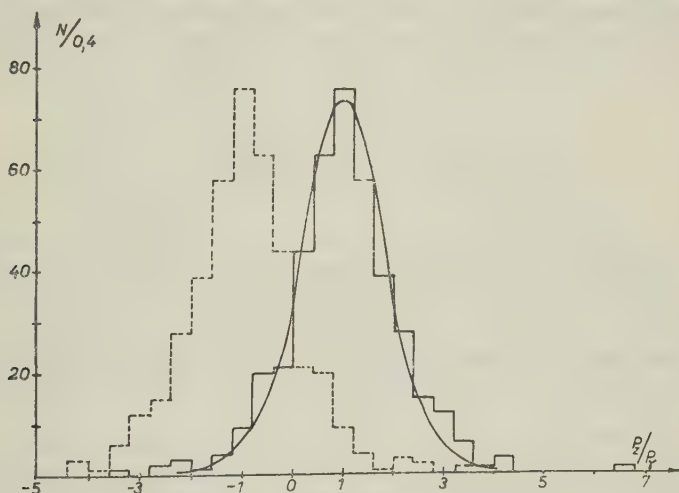


Fig. 2.

p_z/p_γ -Verteilung. Stark ausgezogen: γ -Einfall von Emulsionsseite her, gestrichelt: γ -Einfall von Glasseite her.

Da $\bar{\Delta}$ von der Grössenordnung des γ -Impulses ist ($p_\gamma \sim 0,22$ für $h\nu = 20$ MeV), lässt sich der letztere an *einzelnen* Sternen nur schlecht messen; indessen ist es möglich, aus Messungen an vielen Sternen vernünftige *Mittelwerte* zu bestimmen. Dies zeigt Fig. 2. Bei senkrechter Bestrahlung ist p_z (mit Vorzeichen!) der experimentell bestimmte Impulswert, während mit p_γ der „theoretische“ Wert aus (2b) bezeichnet wird. In Fig. 2 ist die Verteilung p_z/p_γ

dargestellt. Die voll ausgezogene Verteilung entspricht der Annahme, dass die Bestrahlung von der Emulsionsseite her erfolgte, die gestrichelte der Annahme, dass die Quanten von der Glasseite her einfielen. Man kann sofort sehen, dass die erstere dieser Annahmen die richtige ist, denn die entsprechende Verteilung ist um $+1$ zentriert und liefert als Mittelwert

$$\overline{p_z/p_\gamma} = 0,973 \pm 0,036.$$

Die zu erwartende Verteilung ist keine gaussische. Für die z -Komponente Δ_z ist zwar eine Gaussverteilung $W(\Delta_z)$ anzusetzen, doch muss man noch die Impulsverteilung

$$W(p_\gamma) = W\left(\frac{E_T + |B|}{\text{const.}}\right),$$

d. h. die Verteilung der Sterne auf Klassen mit verschiedenen Totalenergien, berücksichtigen und die Variabelntransformation $p_z/p_\gamma = \Delta_z/p_\gamma + 1$ einführen. Setzt man ferner $\xi = p_z/p_\gamma - 1$, so ergibt sich

$$W(\xi) d\xi = \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{p_\gamma^{\max}} \left(\exp - \frac{4\xi^2 p_\gamma^2}{\pi \bar{\Delta}^2} \right) p_\gamma W(p_\gamma) dp_\gamma \quad (3)$$

Die Integration über p_γ wurde numerisch ausgeführt und ergibt die eingezeichnete Verteilungskurve. Der Unterschied gegenüber einer Gaussverteilung wird allerdings bei der hier vorliegenden Energieverteilung der Sterne nicht erheblich, weshalb der zu erwartende Fehler auf dem obigen Mittelwert von p_z/p_γ wie für eine Gaussverteilung berechnet wurde.

Die Genauigkeit, mit der p_z im Mittel bestimmt werden kann, gestattet grundsätzlich die Bestimmung der Bindungsenergie B auf Grund der Identität (2b)

$$\text{const. } \overline{p_z} = \overline{E_T} + |B|$$

weil $\overline{p_z} = \overline{p_\gamma}$. Mit den experimentellen Werten für $\overline{E_T}$ und $\overline{p_z}$ erhalten wir

$$B = 6,74 \pm 0,75 \text{ MeV.}$$

Der Fehler ist wie bei Gaussverteilungen zu $0,674 [\bar{\Delta}^2/(n-1)]^{1/2}$ angesetzt. Der aus den Massenwerten berechnete Wert ist $B = 7,27 \pm 0,06 \text{ MeV}^{15}$.

3. Ergänzung unvollständiger Sterne.

Die wahre Anregungskurve der Reaktion ist die Energieverteilung *aller* erzeugten Sterne. Die experimentelle Verteilung wird einerseits durch das Übersehen von Sternen verfälscht, andererseits aber dadurch, dass bei wachsender Energie immer mehr Sterne nicht ganz in der Emulsion enthalten sind.

Das Übersehen von Ereignissen ist subjektiv und kann kaum durch einen Korrekturfaktor berücksichtigt werden. Bei den vorliegenden Messungen wurden an verschiedenen Stellen der Platte von zwei erfahrenen Beobachtern gleiche Ereignisdichten gefunden. Ferner wurde die Konstanz der Ereignisdichte über die Schichtdicke geprüft. Fig. 3 zeigt die erhaltene Verteilung, der Pfeil entspricht der nominellen Schichtdicke.

Der Verlust infolge des Hinausfahrens der Spuren lässt sich hingegen teils berücksichtigen, teils umgehen. Bei einem Stern können eine, zwei oder auch alle drei Spuren ausserhalb der Emulsion enden. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für diese drei Fälle in Funktion der Schichtdicke und der Totalenergie der Sterne setzt

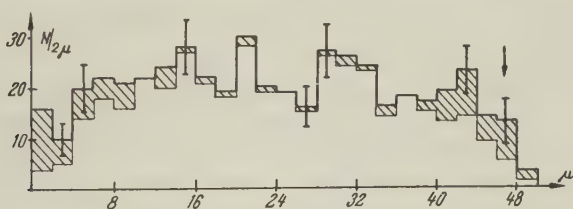


Fig. 3.

Anzahl N der gefundenen Sterne in Abhängigkeit von ihrer Tiefe unter der Emulsionsoberfläche mit und ohne Berücksichtigung der die Emulsion verlassenden Sterne.

eine genaue Kenntnis der Winkelbeziehungen zwischen den α -Teilchen voraus und erscheint sehr mühsam. Diese Berechnung ist jedoch nicht nötig, wenn man folgende Bemerkung macht: Bei jedem unvollständigen Ereignis endet mindestens eine Spur ausserhalb der Emulsion. Für die Ermittlung des Gesamtverlustes genügt es, die Wahrscheinlichkeit dafür zu kennen, dass irgendeine der drei Spuren eines Sterns die Schicht verlässt. Die drei Spuren dürfen dann als statistisch unabhängig behandelt werden; für jede Total- bzw. γ -Energie ist bei Annahme eines bestimmten Reaktionsmechanismus die Reichweiteverteilung bekannt, und der Verlust ist eine einfache Funktion des Verhältnisses von Reichweite und ursprünglicher Schichtdicke.

Tabelle I gibt die zu erwartenden prozentualen Verluste P wieder. Diese wurden für zwei Mechanismen berechnet: a) für Beteiligung des Be^{8*} ($E^* = 3,0$ MeV, $\Gamma = 1,0$ MeV); b) für Be^8 (Grundzustand, $E^* = 0,08$ MeV). Bei beiden Mechanismen wurde die Annahme gemacht, dass alle drei α -Teilchen in bezug auf den γ -Strahl im Laborsystem isotrop ausgesandt werden. Angesichts der für eine Anisotropie in Frage kommenden Verteilungen stellen diese Werte von P obere Grenzen dar.

Tabelle I.

Erwartungswerte für den Prozentsatz P von Sternen, bei denen eine oder mehrere Spuren nicht in der Emulsion enden. Schichtdicke vor Entwicklung 100μ .

E_T (MeV)	P (%)		$P_{\text{exp}}(\overline{E_T})$ (%)
	a)	b)	
6	2,8	3,5	$9,7 \pm 3,0$
7	3,7		
8	4,6		
9	5,4	4,9	
10	6,3		
11	7,3		$11,5 \pm 3,1$
12	8,3	8,8	
13	9,4		
14	10,5		
15	11,9	12,0	
16	13,2		$15,9 \pm 3,8$
17	14,5		
18	15,9	16,1	
19	17,0		
20	18,5		
21	20,1	20,6	$28,2 \pm 5,3$
22	22,0		
23	23,7		
24	25,3	24,3	
25	27,0		

a) $E^* = 3$ MeV; b) $E^* = 0,08$ MeV.

Bei der Rechnung wurden geringe Vereinfachungen eingeführt, um die notwendige Integration numerisch durchführbar zu machen. Die angegebenen Werte werden durch diese insbesondere bei $E_T > 10$ MeV nur wenig beeinträchtigt. Andererseits scheinen die betrachteten Reaktionsmechanismen gerade in diesem Gebiet ihre Bedeutung zu verlieren (siehe unten).

Gegen die einfache Korrektur der gefundenen Sternzahlen N mittels Division durch $(1 - P)$ lässt sich ein Einwand erheben.

P wird nach statistischen Prinzipien berechnet; die Klasse der zwischen E_T und $E_T + \Delta E_T$ ($\Delta E_T \simeq 1$ MeV) enthaltenen Ereignisse dürfte zu klein (< 50 Elemente) sein, um eine statistische Korrektur vertrauenswürdig zu machen*).

Im Gegensatz zu Einzelspuren lässt sich jedoch bei Kohlenstoffsternen die Anwendung des Korrekturfaktors P fast ganz umgehen. Selbst bei einem Stern, bei dem zwei Spuren aus der Emulsion hinausfahren, kann eine „Ergänzung“ durch Anwendung des Impulsatzes durchgeführt werden. Hierzu kann das früher angegebene Gerät¹⁾ dienen. In erster Näherung muss man zwar Δ und p_γ , die von gleicher Grössenordnung sind, vernachlässigen. Der so erhaltene Wert von E_T liefert eine gute Näherung von p_γ . Einzig Sterne, bei denen alle drei Spuren ausserhalb der Emulsion enden, lassen sich nicht ergänzen. Solche Sterne sind jedoch so selten, dass wir auf 470 Sterne kein einziges Beispiel fanden. Diese Korrektur darf vernachlässigt werden.

Beim Ergänzen der Sterne liegt die Willkür in der Wahl von $\bar{\Delta}$. Wir versuchten, durch Verlängern der die Emulsion verlassenden Spur Δ möglichst klein zu machen; unter Abschätzung von p_γ ergänzten wir diejenige cartesische Komponente von $\sum_1^3 \vec{p}_i$ möglichst auf null, die durch das Verlängern der Spur am stärksten beeinflusst wurde. Diese Art des Ergänzens ist nicht eindeutig, insbesondere kann bei langen Spuren die Energie nur auf $\pm 1,5$ MeV genau bestimmt werden. Die Δ -Verteilung der so ergänzten Sterne ergibt jedoch einen Mittelwert $\bar{\Delta} = 0,37$ und verhält sich somit analog wie diejenige der vollständigen Sterne ($\bar{\Delta} = 0,338$). In Tabelle I ist zum Vergleich der aus den Energieverteilungen der ergänzten und der vollständigen Sterne berechnete Faktor $P_{\text{exp.}}(\bar{E}_T)$ angegeben (berechnet für 3-MeV-Niveau plus Grundzustand und gemittelt über ein Energieintervall von 3 MeV).

Fig. 4b zeigt die E_T -Verteilung ohne und mit Berücksichtigung der „ergänzten“ Sterne.

4. Nomogramm zur Berechnung von E^* .

Beim Mechanismus $C^{12} + h\nu = \text{Be}^{8*} + \text{He}^4$ gilt streng unter Berücksichtigung des p_γ die Beziehung²⁾

$$2 E_i^* = (E_j + E_k) - 2 \sqrt{E_j E_k} \cos \Phi_{jk}. \quad (4)$$

*) In einer kürzlich erschienenen Arbeit⁵⁾ wenden die Autoren eine nicht näher angegebene „kombinierte“ Korrektur für beide Verlustquellen an, gegen die dieser Einwand a fortiori gilt.

E_i, E_j, E_k sind die Energien der drei Spuren, Φ_{jk} der räumliche Winkel zwischen Spur j und Spur k und E_i^* die Anregungsenergie des Be^{8*} , d. h. die beim Zerfall in seinem Schwerpunktsystem frei werdende Energie. Die positive Bindungsenergie des Be^8 ist bei dieser Definition inbegriffen.

Im allgemeinen ist (4) für alle drei Spuren auszuwerten. Selbst bei Kenntnis von $\cos \Phi_{jk}$, für dessen Bestimmung bereits ein Hilfsmittel angegeben wurde¹⁾, stellt dies eine zeitraubende Rechenarbeit dar. Da (4) einfach die Addition zweier Vektoren der Längen $\sqrt{E_j}, \sqrt{E_k}$ darstellt, war der Entwurf eines Nomogramms naheliegend. Dieses hat sich in der Praxis so gut bewährt, dass uns eine kurze Beschreibung gerechtfertigt erscheint.

Über einer Achse, auf der nach rechts eine in E_k -Werten kotierte $\sqrt{E_k}$ -Skala aufgetragen ist, ist ein Halbkreis geschlagen. Dieser trägt eine Gradeinteilung, sein Mittelpunkt liegt im Ursprung der E_k -Skala. Auf Karton wird ein spitzwinkliges Dreieck gezeichnet, das auf dem einen langen Schenkel mit einer in E_j kotierten $\sqrt{E_j}$ -Skala, auf dem andern mit einer in E_i^* kotierten $2\sqrt{E_i^*}$ -Skala versehen ist. Der Modul dieser Skalen ist der gleiche wie der der E_k -Skala. Am in E_j kotierten Schenkel ist seitlich ein ösenartiger Ansatz vorgesehen, dessen Mittelpunkt im Scheitel des Dreiecks liegt. Über den Scheitel hinaus ist dieser Schenkel durch einen schmalen Streifen verlängert, in den der andere Schenkel etwas unterhalb des Scheitels einmündet. Das resultierende Gebilde wird ausgeschnitten.

Zur Auswertung wird dieses Dreieck so auf den Halbkreis gelegt, dass der betrachtete E_j -Wert auf den Mittelpunkt zu liegen kommt und die E_j -Skala den Winkel Φ_{jk} mit der E_k -Skala einschliesst. Hierauf wird in das Zentrum der Öse eine Nadel gestochen und das ganze Dreieck so lange geschwenkt, bis die in E_i^* kotierte Seite die E_k -Skala im betrachteten E_k -Wert schneidet. Im Schnittpunkt ist auf der E_i^* -Skala sofort der entsprechende E_i^* -Wert abzulesen. Durch Verwendung der E_j -Skala statt der E_i^* -Skala und Division durch 2 können auch kleine E_i^* -Werte (< 2 MeV) erfasst werden. Die Ablesegenauigkeit ist 0,05 MeV ($E_i^* = 3,0$ MeV) bis 0,03 MeV ($E_i^* = 0,1$ MeV), bei einer Gesamtlänge der E_j -Skala (0—20 MeV) von 23 cm.

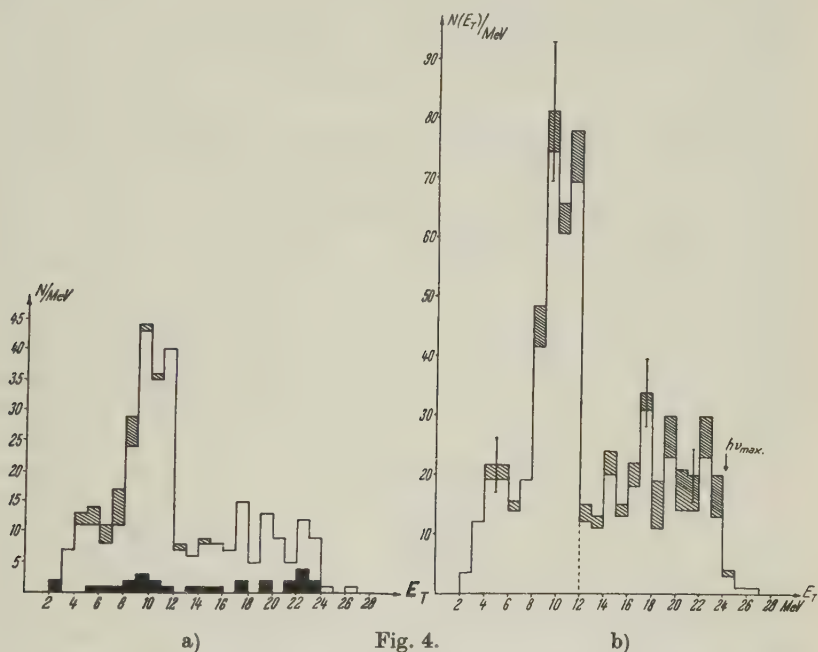
IV. Ergebnisse.

1. Energieverteilung und Wirkungsquerschnitt.

Fig. 4a zeigt die in Oxford mitgeteilten vorläufigen Ergebnisse. Bei dieser Verteilung sind nur die vollständig in der Emulsion enthaltenen Sterne berücksichtigt; Sterne, bei denen die Reaktion sehr

wahrscheinlich über den Grundzustand des Be^8 verlief, sind schwarz gezeichnet, während Sternen, die der Reaktion $O^{16} \rightarrow 4 He^4$ zuzuschreiben sind, schraffierte Flächen entsprechen.

Berücksichtigt man, dass das Bremsstrahlungsspektrum zwischen 19 und 32 MeV (d. h. E_T 12 bis 25 MeV) wenn nicht unbedingt wie $1/h\nu$, so doch sicher stark abfällt, so muss man wohl bereits auf



- a) Vorläufige Energieverteilung von 298 Sternen, schwarz: Grundzustandsreaktionen, schraffiert: Ereignisse der Reaktion $O^{16} \rightarrow 4 He^4$.
 b) Energieverteilung von 541 vollständigen und zusätzlich 96 ergänzten Sternen (schraffierte Flächen); effektiv gemessen sind 408 vollständige und 81 ergänzte Sterne, aus denen sich durch Flächenumnormalisierung für $E_T < 12$ MeV obige Zahlen ergeben. $h\nu_{max}$ ist das der berechneten Grenze des Bremsstrahlungsspektrums entsprechende E_T .

Grund dieser vorläufigen Statistik den Wiederanstieg des Wirkungsquerschnitts in diesem Energiebereich als sichergestellt erachten.

Um mit einem bestimmten Zeitaufwand im interessanten Energiebereich des Wiederanstiegs ($E_T > 12$ MeV) eine möglichst gute Statistik zu erzielen, suchten wir in der Folge die Platte nur noch nach „grossen“ Sternen ab. Bei gewisser Übung ist es rein visuell

möglich, Sterne mit $E_T > \text{ca. } 12 \text{ MeV}$ zu erkennen. Eine Kontrolle dieser Methode hat man im Vergleich der Anzahl „grosser“ Sterne, die auf gleicher Fläche bei diesem Absuchverfahren und bei Mitnahme aller Sterne gefunden werden. Auch die Anzahl der in beiden Fällen gefundenen „unvollständigen“ Sterne bietet eine gewisse Kontrollmöglichkeit. Wir fanden:

1. Messreihe: 366 vollständige und ergänzte Sterne auf $0,746 \text{ cm}^2$, davon $200/\text{cm}^2$ mit $E_T > 12 \text{ MeV}$.
2. Messreihe: 113 vollständige und ergänzte Sterne auf $0,547 \text{ cm}^2$, d. h. $208/\text{cm}^2$ mit $E_T > 12 \text{ MeV}$.

Bis auf statistische Fluktuationen sind die Dichten die gleichen, so dass wir dieser Methode Vertrauen schenken dürfen.

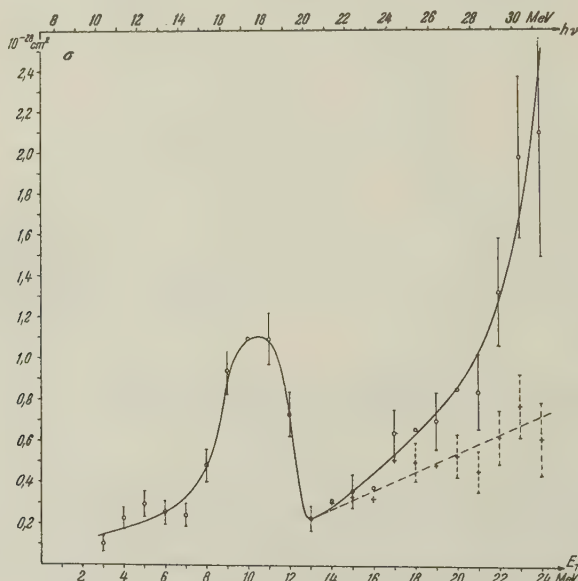


Fig. 5.

Wirkungsquerschnittsverlauf, einschliesslich der ergänzten Sterne berechnet.
 — KULENKAMPF'sches Spektrum ---- SCHIFF'sches Spektrum.

In Fig. 4b entsprechen die Ordinaten für $E_T > 12 \text{ MeV}$ der Zahl der effektiv gefundenen Sterne. Die Ordinaten für kleinere E_T sind unter Berücksichtigung des Verhältnisses der in den beiden Messreihen abgesuchten Flächen überhöht. Die angegebenen statistischen Fehler sind stets aus den tatsächlich beobachteten Sternzahlen berechnet (Wurzelgesetz) und für $E_T < 12 \text{ MeV}$ im gleichen Masse überhöht. Es ist bemerkenswert, dass nur bei 1% der Sterne

die Messung grössere E_T -Werte ergibt, als mit der berechneten oberen Grenze des Betatronspektrums verträglich.

Fig. 5 zeigt den aus Fig. 4b unter Einschluss der ergänzten Sterne (vergl. III, 3) berechneten Wirkungsquerschnittsverlauf. Die Antikathode des von uns benützten Betatrons besteht aus Wolfram, und ihre Dicke ist so bemessen, dass die Elektronen vor Austritt etwa die Hälfte ihrer Energie absetzen. Eine solche Antikathode soll nach einer Arbeit von H. KULENKAMPFF¹⁶⁾ eine maximale Intensität geben. Das Spektrum dieser Antikathode haben wir nach Formeln aus der gleichen Arbeit berechnet und für die obere Kurve in Fig. 5 benutzt.

Die Elektronen erleiden beim Durchgang durch die dicke Antikathode neben der Bremsung eine wesentliche Vielfachstreuung. Dies führt zu einer Verbreiterung des Strahlenkegels und zu einer „Aufweichung“ des Spektrums. Von der durch die gebremsten (und gestreuten) Elektronen erzeugten Strahlung geht aber im Mittel nur wenig in die Achse des Strahlenkegels, auf der unsere Bestrahlung erfolgte. Es dürfte also auf dieser Achse aber das Spektrum einer dünnen Antikathode vorherrschen. Dieses haben wir nach den SCHIFF'schen Angaben¹⁷⁾ berechnet. Die Wirkungsquerschnittskurve für dieses Spektrum ist in Fig. 5 unten eingezeichnet. Da wir jedoch beim SCHIFF'schen Ansatz die Absorption in der Wand des Strahlrohrs und der Luft nicht berücksichtigten, dürfte der wahre Sachverhalt irgendwo zwischen den beiden Annahmen liegen.

Die Absolutwerte des Wirkungsquerschnitts sind bei 17,6 MeV an die Messungen¹⁸⁾¹⁹⁾ mit der Li- γ -Strahlung angeschlossen. GOWARD und WILKINS⁵⁾ erhalten, wohl auf Grund anderer Normierung, einen gegenüber einer früheren Arbeit²⁾ um einen Faktor 3 erhöhten Wirkungsquerschnitt, der reichlich hoch erscheint.

Ein Maximum der Wirkungsquerschnittskurve bei ~ 26 MeV (entsprechend der Anhäufung bei $E_T \sim 19$ MeV in Fig. 4b) ist durch die vorliegende Arbeit nicht sichergestellt und deshalb in Fig. 5 nicht berücksichtigt. Angesichts der besonders grossen Unsicherheit unserer Kenntnisse über das obere Ende des Spektrums ist zur Abklärung des Wirkungsquerschnittsverlaufs in dessen Umgebung eine weitere Untersuchung mit einer noch energetischeren Quelle notwendig. Diese wurde von einem von uns (V.L.T.) bereits begonnen.

2. Der Reaktionsmechanismus.

Um festzustellen, ob die Reaktion über Be^8 und unter Beteiligung welcher Zustände dieses Kerns sie verläuft, werden für alle Ereignisse nach (4) jeweils drei E^* -Werte berechnet. Unter Voraus-

setzung eines bestimmten Mechanismus kann die E^* -Verteilung für jedes E_T berechnet werden*). Durch graphische Integration erhält man mit Hilfe der experimentellen $N(E_T)$ -Verteilung die Verteilung $N(E^*)$, die dann zu erwarten ist, wenn alle beobachteten Ereignisse über die angenommene Zwischenstufe verlaufen.

Es ist naheliegend, als Ursache für den Wiederanstieg des Wirkungsquerschnitts bei etwa $h\nu = 21$ MeV eine Änderung des Reaktionsmechanismus zu vermuten. Die E^* -Verteilungen der Ereignisse mit E_T kleiner bzw. grösser als 12 MeV wurden deshalb getrennt untersucht.

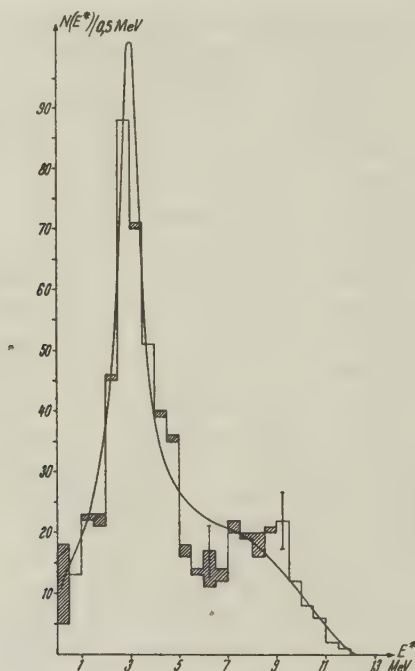


Fig. 6.

E^* -Verteilung für $E_T < 12$ MeV. Kurve berechnet für $E^* = 3,0$ MeV, $\Gamma = 1,0$ MeV. Übergänge in den Grundzustand sind schraffiert angegeben.

a) E^* -Verteilung für $E_T < 12$ MeV.

Fig. 6 zeigt die E^* -Verteilung aller vollständigen Sterne (202 Stück) aus dem Energiegebiet unterhalb des Wiederanstiegs. Die eingezeichnete Kurve ist für den Fall berechnet, dass die Reaktion

) Die Rechnung erfolgt nicht streng, weil $E_i^ \simeq E_T - 3 E_i/2$ gesetzt wird. Diese Näherung ist aber eine sehr gute.

ausschliesslich über Be^{8*} im Zustand mit $E^* = 3,0$ $\Gamma = 1,0$ MeV verläuft und zwischen Flug- und Zerfallsrichtung (im Schwerpunktsystem) dieses Kerns keine Korrelation besteht. Die Kurve ist zwar auf die Gesamtzahl (202) der Sterne normalisiert, doch machen die als Grundzustandsübergänge erkenntlichen Sterne (in Fig. 6 schattiert) bzw. ihre E^* -Werte nur eine unwesentliche Beimischung aus ($< 10\%$).

Fig. 6 liefert eine erneute Bestätigung der bekannten Tatsache, dass bei $E_T < 12$ MeV, d. h. $h\nu < 19,3$ MeV die überwiegende Mehrzahl der Reaktionen über das 3-MeV-Niveau des Be^8 führt. Bemerkenswert ist das „Loch“ in der Verteilung bei ~ 6 MeV und der entsprechende Überschuss bei ~ 8 MeV; diese Abweichungen von der berechneten Kurve dürften ausserhalb der in Fig. 6 angegebenen statistischen Schwankungen liegen. Genau die gleichen Abweichungen wurden bei der Untersuchung²⁾ der Reaktion mit γ -Strahlen bis 24 MeV beobachtet. Vollkommen entsprechend sind auch die Abweichungen, die an der Energieverteilung der α -Teilchen aus 483 mit der Li- γ -Strahlung erzeugten Sternen auftreten (vgl. Fig. 6, 7 bei¹⁾); bei dieser Verteilung liegt das Loch bei $\sim 2,5$ MeV, der Überschuss bei $\sim 1,5$ MeV, was E^* -Werten von 6,4 bzw. 8 MeV entspricht*).

Bei der Untersuchung mit der Li- γ -Strahlung wurde als plausibelste Erklärung für diese Abweichungen die mögliche Beteiligung (16% für $h\nu = 17,6$ MeV) eines Be^8 -Niveaus mit $E^* \simeq 8$ MeV angenommen. Dieses Argument könnte auch die Abweichungen in Fig. 6 einigermaßen erklären, um so mehr als BONNER und Mitarbeiter²⁰⁾ zwischen 7 und 9 MeV ein breites Niveau gefunden haben, das durch α -Emission zerfällt. Ein solches Niveau müsste aber mit steigender γ -Energie immer stärker auftreten, insbesondere falls der Wechsel des Mechanismus für den Wiederanstieg des Wirkungsquerschnitts verantwortlich gemacht werden dürfte. Wie nachstehende Angaben zeigen, ist dies nicht der Fall.

b) E^* -Verteilung für $E_T > 12$ MeV.

Fig. 7 zeigt die E^* -Verteilung aller vollständigen Sterne mit $E_T > 12$ MeV (206 Stück). Die eingezeichnete Kurve folgt aus den gleichen Annahmen wie die Kurve in Fig. 6; die schraffierte Fläche

) Die Abweichungen der E^ -Verteilung von der theoretischen Kurve sind jedoch viel weniger ausgesprochen als die von NABHOLZ, STOLL und WÄFFLER (Helv. Phys. Acta **23**, 862 (1950)) berichteten Anomalien, die mit¹⁾ in Widerspruch stehen.

entspricht den Sternen, die Be^8 im Grundzustand zugeordnet werden können (etwa 16%, so dass sie die Normalisierung nicht merklich stören).

Der Unterschied gegenüber Fig. 6 ist auffallend. Von einer Übereinstimmung zwischen Kurve und experimenteller Verteilung kann hier nicht mehr gesprochen werden. Im Gebiet des Wiederanstiegs des Wirkungsquerschnitts ändert sich der Reaktionsmechanismus radikal. Die Frage ist nunmehr: welcher ist der in diesem Energiebereich dominierende Mechanismus?

Zunächst ist abzuklären, wie stark bei $E_T > 12$ MeV der 3-MeV-Zustand des Be^8 noch beteiligt ist. Die Höhe der Spitze der Kurve bei $E^* = 3$ MeV ist der Anzahl Sterne proportional, die über dieses

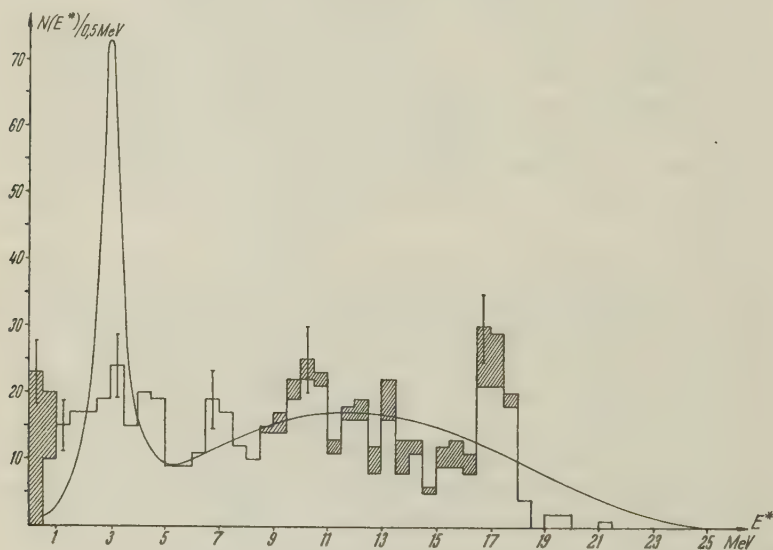


Fig. 7.

E^* -Verteilung für $E_T > 12$ MeV. Kurve berechnet wie in Fig. 6 für $E^* = 3,0$ MeV, $\Gamma = 1,0$ MeV. Grundzustände sind schraffiert.

Niveau entstehen. Berücksichtigt man, dass experimentelle Unschärfen ein breiteres Niveau vortäuschen (in Fig. 6 ist die Kurve 15% höher als die experimentelle Verteilung), so schliesst man, dass dieses Niveau im betrachteten Energiegebiet an weniger als ein Drittel der Reaktionen beteiligt ist.

Ein breites Niveau zwischen 7 und 9 MeV kann kaum für die restlichen zwei Drittel verantwortlich gemacht werden. In Fig. 7 ist um $E^* = 7$ nur eine kleine Anhäufung zu sehen. Dieses auf Grund

früherer Versuche¹⁾ in Betracht gezogene Niveau kommt somit für die Erklärung des Wiederanstiegs nicht in Frage, und selbst seine Anregung bei $h\nu = 17,6$ MeV scheint zweifelhaft.

Berücksichtigt man die in Fig. 7 eingezeichneten statistischen Fehler, so sieht man, dass die Verteilung praktisch über alle E^* -Werte gleichförmig ist. Der Versuch einer Zuordnung zu den bekannten Niveaux²¹⁾, die unter α -Ausendung zerfallen ($E^* = 3,0, 7,6, 9,9, 11,2, 19,9$ MeV), wäre verfrüht.

c) Auftreten von Be^8 im Grundzustand.

Die Anwendung von Formel (4) liefert manchmal E^* -Werte, die $\leq 0,5$ MeV sind. Die entsprechenden Sterne sind meist schon visuell von den übrigen zu unterscheiden: an eine sehr lange Spur sind zwei sehr kurze angesetzt, die mit einander einen spitzen Winkel bilden. Man ist versucht, solche Sterne der Beteiligung von Be^8 im Grundzustand zuzuschreiben. E^* müsste dann den Wert 0,1 MeV haben. Dies ist aber eher selten der Fall, wir erhalten meistens grössere Werte. Der zu erwartende Messfehler ergibt sich dabei für Grundzustände von der Grössenordnung von $\pm 0,2$ MeV.

Anwendung der alten $R(E)$ -Beziehung oder der neueren Werte von ROTBLAT⁹⁾ macht für die E^* -Werte keinen grossen Unterschied aus.

Um bei der Zuordnung von Ereignissen mit $0 < E^* \leq 0,5$ MeV zum Grundzustand eine Beimischung des 3-MeV-Niveaus nach Möglichkeit zu vermeiden, sind wir folgendermassen vorgegangen: Unter Annahme eines gegebenen Niveaus des Be^8 lassen sich zu jedem E_T für die Energien des zweiten und dritten Alphateilchens zwei Grenzwerte $E_{23}^{\max, \min}$ angeben (vgl. Formel (10) in¹⁾), die wir sowohl für den 3-MeV-Zustand als auch für den Grundzustand berechneten. Bei Ereignissen, bei denen ein E^* -Wert $\leq 0,5$ MeV, einer oder beide andern jedoch in der Umgebung von 3 MeV liegen, ist es nun viel wahrscheinlicher, dass der Zerfall über das Be^{8*} führt; solche Ereignisse wurden nur dann dem Grundzustand zugeordnet, wenn einerseits die beiden $E^* \leq 0,5$ liefernden α -Energien zwischen die Grenzwerte $E_{23}^{\max, \min}$ für den Grundzustand fielen, und wenn andererseits die Energien desjenigen Spurenpaares, welches einen näher bei 3 MeV liegenden E^* -Wert lieferte, eindeutig ausserhalb der zum 3-MeV-Niveau berechneten $E_{23}^{\max, \min}$ -Grenzen lagen. Bei Ereignissen, bei denen ein E^* -Wert $\leq 0,5$ ist, die beiden andern jedoch $\gg 3$ MeV, wird dieses Unterscheidungskriterium hinfällig, und es wurde bei diesen lediglich verifiziert, dass die E_{23} -Werte innerhalb der für den Grundzustand berechneten Grenzen lagen.

Fig. 8 zeigt die E^* -Verteilung der in dieser Weise dem Grundzustand zugeordneten Sterne, die eingezeichnete Kurve ist die theoretische Energieverteilung der α -Teilchen aus dem Zerfall von Be^8 , für $E^* = 0,09 \text{ MeV}$ berechnet.

Trotz der Sorgfalt, mit der diese Zuordnung zum Grundzustand durchgeführt wurde, und obwohl unterhalb von 3 MeV kein anderer Anregungszustand des Be^8 bekannt ist, dem diese Sterne zugeschrieben werden könnten, ist ein gewisser Vorbehalt am Platz. Es ist nämlich zu bedenken, dass der Zustand bei $E^* = 3 \text{ MeV}$ etwa 1 MeV weit ist und eine Anregung $2,5 \text{ MeV}$ unterhalb der Niveau-

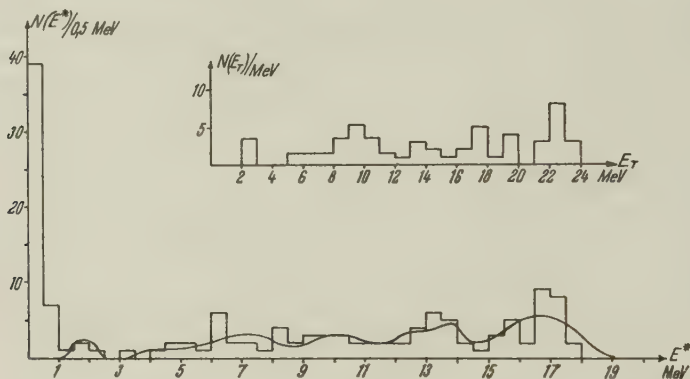


Fig. 8.

E^* -Verteilung von 46 Sternen, die dem Grundzustand des Be^8 zugeordnet werden. Theoretische Verteilung für $E^* = 0,09 \text{ MeV}$. Eingesetztes Diagramm: Energieverteilung der Grundzustände (für $E_T < 12 \text{ MeV}$ im Verhältnis der abgesuchten Flächen überhöht).

mitte ($0 < E^* \leq 0,5 \text{ MeV}$) immerhin eine Wahrscheinlichkeit von 5% hat*). Von dieser Größenordnung ist jedoch im Energiegebiet $E_T < 12 \text{ MeV}$, wo die Reaktion vorwiegend über das 3-MeV -Niveau verläuft, der Anteil der Übergänge, die vermutlich über den Grundzustand des Be^8 führen und bisher ^{2) 5)} ohne Reserven diesem Zustand zugeschrieben wurden.

Trotz dieser Tatsache geben unsere Beobachtungen Hinweise dafür, dass die Beteiligung des Grundzustandes mit wachsender Energie zunimmt (das in Fig. 8 eingesetzte Diagramm zeigt die Energieverteilung der Grundzustandsreaktionen). Wir haben nämlich gezeigt, dass für $E_T > 12 \text{ MeV}$ der 3-MeV -Zustand nur an höchstens ungefähr ein Drittel der Reaktionen beteiligt ist; ent-

*) Eine genaue Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeit ist kaum möglich, weil die Anwendbarkeit der Dispersionsformel auf ein so breites Niveau sehr fraglich ist.

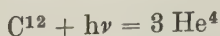
sprechend sinkt auch die Wahrscheinlichkeit, Grundzustände vor-täuschende „Ausläufer“ dieses Niveaus zu finden, auf $\sim 2\%$. Der Anteil der E^* -Werte $\leq 0,5$ MeV ist aber in diesem Energiegebiet mit 16% doch wesentlich grösser als für $E_T < 12$ MeV. Freilich bleibt noch abzuklären, welcher Teil dieser E^* -Werte $\leq 0,5$ MeV durch den im Gebiet des Wiederanstiegs dominierenden, noch nicht identifizierten Reaktionsmechanismus verursacht sein kann.

Von kanadischen Autoren²²⁾ wurde der Versuch gemacht, aus denjenigen O^{16} (γ , 4 α)-Sternen, an denen Be^8 im Grundzustand beteiligt zu sein scheint, auf die Lebensdauer dieses Korns zu schlies-sen. Wir konnten den von diesen Autoren beobachteten Effekt, dass die beiden vom Zerfall des Be^8 im Grundzustand herrührenden kurzen Spuren nicht direkt vom Sternmittelpunkt ausgehen, weder an C^{12} -noch an einigen O^{16} -Sternen feststellen; auch zeigen die \tilde{A} der von uns dem Grundzustand zugeschriebenen Ereignisse nach Grösse keine und nach Richtung eine statistisch nicht sichergestellte Ano-malie, die zwar zugunsten eines Energieverlustes des Be^8 spricht, jedoch keine Schlüsse auf eine endliche Lebensdauer dieses Korns zu ziehen gestattet.

V. Interpretation der experimentellen Ergebnisse.

Der Versuch, den Verlauf des Wirkungsquerschnitts, insbesondere das resonanzartige Maximum bei $h\nu \simeq 18$ MeV der Konkurrenz der hier einsetzenden, viel mächtigeren (γ , n)- und (γ , p)-Reaktionen zuzuschreiben, wird durch die Tatsache hinfällig, dass bei $h\nu \simeq 21$ MeV (Anstieg der (γ , n)- und (γ , p)-Reaktionen²³⁾) der Wirkungs-querschnitt bereits im Wiederanstieg begriffen ist. Ein rein photo-elektrischer Effekt bietet dagegen die Möglichkeit, den Wiederan-stieg zwanglos als Überlagerung einer zweiten, durch einen andern Reaktionsmechanismus bedingten Wirkungsquerschnittskurve zu erklären.

Man wäre also versucht, auf die früheren Berechnungen des Photo-effektes an einem α -Teilchenmodell¹⁾ zurückzugreifen, die aber leider keine quantitative Übereinstimmung mit dem Experiment lieferten: bei richtiger Lage der Energieabhängigkeit kam der Absolutwert von σ um einen Faktor 10 zu klein heraus, solange „vernünftige“ Wellen-funktionen gewählt wurden. Auf Grund des α -Teilchenmodells wäre es am natürlichsten, für den Wiederanstieg die direkte Reaktion



verantwortlich zu machen. Die erwähnten Rechnungen ergaben

aber, dass ein solcher Photoeffekt um eine weitere Zehnerpotenz unwahrscheinlicher ist. Es ist bemerkenswert, dass das Maximum für diesen Prozess bei einer etwa $\sqrt{2}$ mal höheren Energie als das erste Maximum (also bei ca. 25 MeV) liegen müsste (dies folgt aus dem Frequenzverhältnis der beiden Grundfrequenzen des α -Modells für C^{12}).

Es besteht auch im Rahmen der Compoundkernvorstellung eine Möglichkeit, das beobachtete Verhalten der (γ, α) -Reaktion zu verstehen*). Nach unveröffentlichten Überlegungen von BLATT und WEISSKOPF soll die Absorption elektromagnetischer Strahlung unterhalb etwa 15 MeV hauptsächlich durch elektrische Quadrupol- und magnetische Dipoleffekte zustandekommen. Für elektrische Quadrupolabsorption erhalten wir mit der Faustregel dieser Autoren $\sigma_{EQ} (h\nu = 18 \text{ MeV}) \simeq 2 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$, wenn wir den Kernradius des C^{12} gleich $1,5 \sqrt[3]{12} \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ und D_0 (Abstand der tiefliegenden Niveaux von C^{12}), wie für schwere Kerne üblich, gleich 0,5 MeV setzen. Der Wirkungsquerschnitt kommt also zu gross heraus. In die Formel geht jedoch D_0 invers ein, und der Wert von 0,5 MeV ist viel zu klein; es sind nämlich für C^{12} bis 17 MeV experimentell nur 5 Niveaux sichergestellt, und wahrscheinlich haben sie nicht alle Quantenzahlen, die mit dem Grundzustand durch elektrische Quadrupolabsorption kombinieren. Mit $D_0 = 5$ würde σ_{EQ} die richtige Grössenordnung erhalten; diese rohe Übereinstimmung der Zahlenwerte schliesst jedoch eine wesentliche Beteiligung der magnetischen Dipolabsorption nicht aus, die etwa von der gleichen Grössenordnung sein sollte.

Bei höheren Energien sollen die elektrische Quadrupol- und die magnetische Dipolabsorption abklingen und durch die viel stärkere elektrische Dipolabsorption abgelöst werden. Der Wiederanstieg des Wirkungsquerschnitts wäre bei dieser Auffassung der elektrischen Dipolabsorption zuzuschreiben.

Auch eine Zunahme der Grundzustandsreaktionen mit wachsender Energie liesse sich befriedigend erklären: Solange wir elektrische Quadrupolabsorption annehmen, folgt aus der Bevorzugung des 3-MeV-Zustandes gegenüber dem Grundzustand, dass ersterer $J = 2$ hat und letzterer $J = 0^1$). Nur wenn der Restkern als d -Zustand zurückbleibt, kann das erste α -Teilchen als s -Welle emittiert werden. Bei elektrischer Dipolabsorption werden die Möglichkeiten p -, f -Welle ($J = 2$) und p -Welle ($J = 0$), also die beiden Zustände, etwa gleichberechtigt.

*) Herrn Prof. WEISSKOPF möchten wir für anregende Diskussion über diesen Punkt und Überlassen des betreffenden Manuskriptes danken.

Es bestehen vielleicht experimentelle Möglichkeiten, um zu entscheiden, welchen Multipolcharakter die Absorption hat. In erster Linie käme hier die Winkelverteilung des zuerst ausgesandten α -Teilchens in Frage, doch ist dieses, zumindest bei Anregung des Be^8 , nicht eindeutig zu erkennen¹⁾. Hat jedoch das Be^{8*} $J = 2$, was für den 3-MeV-Zustand wahrscheinlich ist, so müsste, wenn das erste α -Teilchen nicht als s-Welle ausgesandt wird (elektrische und magnetische Dipolabsorption) eine Korrelation zwischen Zerfalls- und Flugrichtung des Be^{8*} resultieren. Dies würde eine Abweichung der beim Zerfall des Be^{8*} entstehenden α -Teilchen von der üblichen „Kastenverteilung“ bedingen. Da eine quantitative Berechnung dieser Korrelation noch aussteht*), kann noch nicht entschieden werden, ob sie die beobachteten Anomalien der E^* -Verteilung für $E_T < 12$ MeV zu erklären imstande wäre.

Für die Grundzustandsreaktionen ist die Winkelverteilung der „ersten“ α -Teilchen in bezug auf den γ -Strahl leichter zugänglich. Sie müsste nach obigem (elektrische Dipolabsorption) immer anisotrop ausfallen. Die Abwesenheit von Korrelation zwischen Flug- und Zerfallsrichtung sowie die Isotropie der letzteren in bezug auf den γ -Strahl würden die Zuordnung $J = 0$ bekräftigen.

Unserem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER, sind wir für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit und die Diskussion ihrer Ergebnisse zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

Literatur.

- 1) V. L. TELEGI und W. ZÜNTI, *Helv. Phys. Acta* **23**, 745 (1950).
- 2) F. K. GOWARD, V. L. TELEGI und J. J. WILKINS, *Proc. Phys. Soc. A* **63**, 402 (1950).
- 3) H. W. KOCH und R. E. CARTER, *Phys. Rev.* **75**, 1950 (1949); ebenda **77**, 165 (1950).
- 4) V. L. TELEGI, *Proc. of the Harwell Nuclear Physics Conference*, Sept. 1950, 5, 62.
- 5) F. K. GOWARD und J. J. WILKINS, *Proc. Phys. Soc. A* **64**, 201 (1951).
- 6) G. M. MILLAR und A. C. G. CAMERON, *Phys. Rev.* **78**, 78 (1950).
- 7) C. M. G. LATTES, P. H. FOWLER und P. CÜER, *Proc. Phys. Soc.* **59**, 883 (1947).
- 8) P. CÜER, Privatmitteilung.
- 9) J. ROTBLAT, *Nature* **165**, 387 (1950) und Privatmitteilung.
- 10) I. BERLMAN, *Phys. Rev.* **80**, 96 (1950).
- 11) H. HÄNNI, V. L. TELEGI und W. ZÜNTI, *Helv. Phys. Acta* **22**, 226 (1948).
- 12) F. K. GOWARD und J. J. WILKINS, *Proc. Phys. Soc. A*, **63**, 662 (1950).

*) Anmerkung bei der Korrektur: Die Ergebnisse einer inzwischen durchgeführten Rechnung (*Phys. Rev. Nov. 1*, 1951) bekräftigen die hier mitgeteilten Vermutungen durchaus.

- ¹³⁾ F. K. GOWARD und J. J. WILKINS, Proc. Phys. Soc. A. **64**, 93 (1951).
 - ¹⁴⁾ V. L. TELEGDI, unveröffentlicht.
 - ¹⁵⁾ J. MATTAUCH, Isotopenbericht (1949); C. W. LI, WARD WHALING, A. W. FOWLER und C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **83**, 512 (1951).
 - ¹⁶⁾ H. KULENKAMPEFF, „Bremsstrahlung energiereicher Elektronen“, Jena 1944 (unveröffentlicht).
 - ¹⁷⁾ L. I. SCHIFF, Phys. Rev. **70**, 87 (1946); G. D. ADAMS, ebenda **74**, 1707 (1948).
 - ¹⁸⁾ J. BONANOMI, Diplomarbeit ETH., 1949.
 - ¹⁹⁾ H. WÄFFLER und S. S. YOUNIS, Helv. Phys. Acta **22**, 618 (1949).
 - ²⁰⁾ BONNER und Mitarbeiter, Phys. Rev. **73**, 885 (1948).
 - ²¹⁾ W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON und W. A. FOWLER, Rev. Mod. Phys. **22**, 310 (1950).
 - ²²⁾ G. M. MILLAR und A. C. G. CAMERON, Phys. Rev. **81**, 316 (1951).
 - ²³⁾ R. N. H. HASLAM, H. E. JOHNS und R. J. HORSLEY, Phys. Rev. **82**, 270 (1951).
 - ²⁴⁾ E. GUTH und C. J. MULLIN, Phys. Rev. **74**, 833 (1948).
-

Diffraction des neutrons lents par les poudres microcristallines d' UO_2 et de CeO_2

par F. Verdaguer, C. Sánchez del Río, R. Keller et A. Kind.

(15 IX 1951.)

Résumé. Des mesures de transmissions ont été effectuées avec des neutrons monocinétiques dans les poudres microcristallines d' UO_2 et de CeO_2 . L'étude théorique des courbes de sections efficaces en fonction de la longueur d'onde associée aux neutrons permet de déterminer la valeur et le signe de l'amplitude de diffusion de l'uranium et du cérium.

Introduction.

La moyenne de la section efficace totale, prise sur toutes les orientations d'un cristal, telle qu'on la trouve dans une poudre cristalline, présente un saut brusque chaque fois que la distance réticulaire d'un système de plans est égale à un multiple entier de la demi-longueur d'onde associée aux neutrons. Nous avons le même phénomène que celui de la diffraction des rayons X par la méthode DEBYE-SCHERRER. L'étude de la section efficace totale permettra, si la structure réticulaire est connue, de déduire des données intéressantes sur la diffusion des neutrons lents par les noyaux atomiques.

D'autre part, l'effet de diffraction diminue au fur et à mesure que la longueur d'onde devient plus courte, et pour des neutrons suffisamment énergétiques (pratiquement de l'ordre de 1 eV) on peut admettre une additivité des sections efficaces des différents noyaux.

Les premières considérations théoriques sur la transmission d'une poudre de microcristaux non orientés ont été faites par HALPERN, HAMMERMESH et JOHNSON¹⁾ et par WEINSTOCK²⁾, et les premières mesures par FERMI, STURM et SACHS³⁾ avec de la poudre de Be et de BeO . D'autres auteurs ont publié des mesures réalisées suivant cette direction⁴⁾, et la possibilité d'une orientation des cristaux a aussi été envisagée⁵⁾.

Dans le présent travail nous discutons des mesures semblables effectuées sur l' UO_2 et le CeO_2 avec le sélecteur de vitesses de l'Institut de Physique de l'Université de Genève⁶⁾.

Méthode expérimentale et résultats.

La marche des mesures ainsi que les corrections du temps de vol sont essentiellement celles décrites sous réf.⁶). Nous avons fait deux séries de mesures :

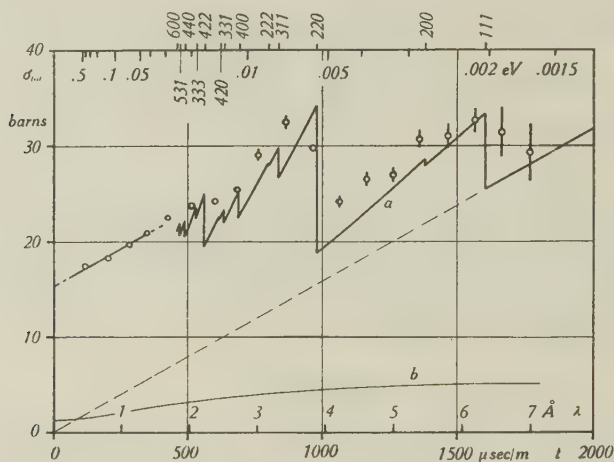


Fig. 1.

a Courbe théorique de la section efficace totale de l' UO_2

b Correction due à 1,8‰ d'eau.

c Valeurs expérimentales corrigées par rapport à l'eau.

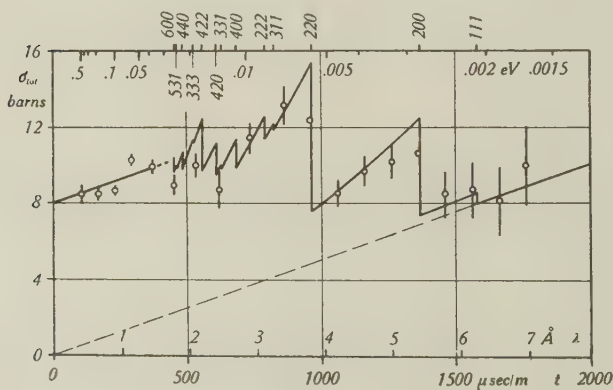


Fig. 2.

Mesure et calcul de la section efficace totale du CeO_2 .

a) Le modérateur de neutrons entourant la source n'est pas refroidi. Son épaisseur est de 5 cm. Distance compteur-modérateur = 3,00 m. Période de pulsation de la source = 4000 μsec . Domaine de mesure: 100 à 800 $\mu\text{sec/m}$.

b) La couche extérieure du modérateur, soit 2 cm d'épaisseur, est refroidie avec de l'oxygène liquide. Epaisseur totale de la paraffine = 5 cm. Distance compteur-modérateur = 2,50 m. Période de pulsation de la source = 5000 μ sec. Domaine de mesure: 800 à 1800 μ sec/m. Nous devons ici considérer l'erreur due aux neutrons retardés provenant d'un cycle précédent. La forme asymptotique du spectre de MAXWELL vers les grands temps de vol est en t^{-4} . Nous soustrayons donc à chaque nombre de neutrons comptés une fraction proportionnelle à $(t/t + 5000)^4$ où t est le temps de vol en μ sec.

Les éprouvettes ont une section de $7,50 \times 20,31$ cm². La concentration en UO_2 est de 27,73 g/cm² pour le domaine entre 100 et 800 μ sec/m et de 18,91 g/cm² pour le domaine entre 800 et 1800 μ sec/m. La concentration en CeO_2 est de 10,59 g/cm² pour toutes les mesures. Nous déduisons la section efficace par molécule suivant la formule $\sigma_{\text{tot}} = 1/N \ln 1/T$ où N est le nombre de molécules par unité de surface et T la transmission. Nous obtenons finalement les résultats représentés par les fig. 1 et 2.

Discussion.

Dans les figures 1 et 2 nous remarquons distinctement les changements brusques des sections efficaces pour certaines valeurs du temps de vol. Avec la hauteur absolue de la courbe et la valeur des différents sauts nous avons suffisamment de données pour déterminer l'amplitude de diffusion de l'uranium et du cérium ainsi que la section efficace de capture. Cette dernière est donnée par l'inclinaison de la courbe à l'origine. Malheureusement l'effet de diffraction s'étend jusqu'à des énergies relativement hautes et fera apparaître une pente légèrement plus forte, d'où une capture un peu trop grande (1 à 2% au plus).

L' UO_2 et le CeO_2 appartiennent cristallographiquement au même système cubique dont la structure type est celle de la fluorine⁷⁾.

Nous allons envisager l'expression théorique de la section efficace apparente due aux chocs élastiques seuls, déduite par WEINSTOCK²⁾ et généralisée pour les cristaux polyatomiques par FERMI et collaborateurs³⁾:

$$\sigma_{ap} = 9,60 \cdot 10^{-10} \sum_{b < \frac{2}{\lambda}} p F t^2 \cdot 1/b \cdot e^{-\omega b^2}$$

Elle est mise sous une forme adéquate et valable pour une molé-

cule. σ_{ap} et F sont donnés en barns, b en \AA^{-1} et t en $\mu\text{sec/m}$; b est la valeur absolue du vecteur du réseau réciproque

$$b_{hkl} = \frac{1}{a} \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$$

où a est la dimension de la cellule et h, k, l , les indices de MILLER multipliés par l'ordre de diffraction.

L'expression du facteur de forme est pour le moment

$$F = 4\pi \left| A_1 \sum_{x_1 y_1 z_1} \exp 2\pi i(hx_1 + ky_1 + lz_1) + A_2 \sum_{x_2 y_2 z_2} \exp 2\pi i(hx_2 + ky_2 + lz_2) \right|^2$$

où A_1 est l'amplitude de diffusion de l'uranium ou du cérium, A_2 celle de l'oxygène. Elles sont données par la formule

$$\sigma_d = 4\pi A^2 \mu^2$$

où σ_d est la section efficace de diffusion du noyau libre et μ la masse réduite du neutron par rapport au noyau.

x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées des 4 atomes d'U ou de Ce dans la cellule.

x_2, y_2, z_2 les coordonnées des 8 atomes d'oxygène,

p la multiplicité d'un système de plans,

ω une constante dépendant de la température de DEBYE du cristal.

La position des sauts de la section efficace est donnée par $t_{hkl} = 506/b_{hkl}$ en $\mu\text{sec/m}$.

L'expression de ω donnée par la formule 30 de l'article de WEINSTOCK dépend d'une température de DEBYE unique du cristal. Nous allons ici suivre l'exemple de WOLLAN et SHULL⁸⁾ pour tenir compte du fait que nous avons des cristaux à deux sortes d'atomes. A la place de $F \cdot e^{-\omega b^2}$ nous écrirons maintenant

$$4\pi \left| A_1 e^{-\omega_1 b^2/2} \sum_{x_1 y_1 z_1} \exp 2\pi i(hx_1 + ky_1 + lz_1) + A_2 e^{-\omega_2 b^2/2} \sum_{x_2 y_2 z_2} \exp 2\pi i(hx_2 + ky_2 + lz_2) \right|^2$$

où ω_1 est donné par la température de DEBYE de l'U ou du Ce et ω_2 par celle de l'O. Suivant un travail de RUSSELL⁹⁾ les températures de DEBYE sont les suivantes:

$$\begin{aligned} &\text{pour } \text{U}_3\text{O}_8: \theta_{\text{U}} = 182^\circ \text{ K}; \theta_{\text{O}} = 800^\circ \text{ K}, \\ &\text{pour } \text{CeO}_2: \theta_{\text{Ce}} = 125^\circ \text{ K}; \theta_{\text{O}} = 800^\circ \text{ K}. \end{aligned}$$

(Nous prendrons les mêmes températures pour UO_2 , inconvénient justifié par le fait que l'expression $e^{-\omega b^2}$ est voisine de l'unité dans le domaine important de nos mesures.)

La formule pour σ_{ap} déduite par WEINSTOCK est seulement valable pour des éléments monoisotopes de spin zéro. Les isotopes principaux de l'U, du Ce et de l'O sont des noyaux paires-pairs, donc de spin nul. Il est probable que les deux isotopes Ce^{140} et Ce^{142} d'abondance 88,5% et 11,1% respectivement ont la même amplitude de diffusion, ce qui est généralement le cas pour les éléments¹⁰). Il nous est donc permis d'appliquer la formule de WEINSTOCK.

Selon les données cristallographiques de WYCKOFF⁷) l' UO_2 et le CeO_2 possèdent la cellule élémentaire suivante:

$$a_{\text{U}} = 5,47 \text{ \AA}; \quad a_{\text{Ce}} = 5,41 \text{ \AA}$$

$$\text{U ou Ce} \begin{cases} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{cases} \quad 0 \begin{cases} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{cases}$$

Les facteurs de forme dépendant de h, k et l prennent les valeurs selon les règles suivantes:

$$\begin{aligned} \text{pour } h, k, l \text{ impairs} & \quad F = 64 \pi |A_1 e^{-\omega_1 b^2/2}|^2 \\ \text{pour } h, k, l \text{ de diverses parités} & \quad F = 0 \\ \text{pour } h, k, l \text{ pairs} \begin{cases} h+k+l=4 \\ h+k+l \neq 4 \end{cases} & \quad \begin{cases} F = 64 \pi |A_1 e^{-\omega_1 b^2/2} + 2A_2 e^{-\omega_2 b^2/2}|^2 \\ F = 64 \pi |A_1 e^{-\omega_1 b^2/2} - 2A_2 e^{-\omega_2 b^2/2}|^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans la table I sont représentés les différents systèmes de plans avec le facteur de forme (en omettant les exponentielles) et la multiplicité ainsi que la position des sauts pour l' UO_2 et le CeO_2 .

Le bioxyde d'uranium: Si nous traçons la courbe suivant la formule de WEINSTOCK en introduisant les valeurs connues des sections efficaces de l'uranium et de l'oxygène nous constatons un désaccord avec nos mesures. En reportant sur le même graphique la différence entre la mesure et le calcul il apparaît une courbe dont l'allure rappelle celle de la section efficace totale de l'eau. Comme il est également difficile d'obtenir l' UO_2 sec nous avons une raison suffisante pour soustraire à nos valeurs mesurées la section efficace de la quantité d'eau la mieux ajustée. Cette quantité est de 1,80%. Les valeurs récentes pour l'eau sont publiées par ADAIR¹¹).

Nous introduisons dans la formule de WEINSTOCK l'amplitude de diffusion de l'oxygène $A_2 = 0,58 \cdot 10^{-12}$ cm avec le signe positif suivant la notation de FERMI et MARSHALL¹²). Elle correspond à $\sigma_d = 3,73$ barns¹³).

Pour l'amplitude de diffusion de l'uranium nous introduisons $A_1 = 0,81 \cdot 10^{-12}$ cm correspondant à la valeur déclassée de $\sigma_a = 8,2$ barns¹⁴). On voit tout de suite qu'elle est de même signe que l'amplitude de l'oxygène. En effet, le saut provoqué par le plan (200) est beaucoup plus petit que celui du plan (220), donc $|A_1 - 2 A_2|$ doit être plus petit que $|A_1 + 2 A_2|$.

Table I.

(h, k, l)	$F/64 \pi$	p	$t_{hkl} (\mu\text{sec/m})$	
			UO ₂	CeO ₂
(111)	$ A_1 ^2$	8	1597	1580
(200)	$ A_1 - 2A_2 ^2$	6	1383	1368
(220)	$ A_1 + 2A_2 ^2$	12	978	967
(113)	$ A_1 ^2$	24	834	825
(222)	$ A_1 - 2A_2 ^2$	8	799	790
(400)	$ A_1 + 2A_2 ^2$	6	693	684
(331)	$ A_1 ^2$	24	635	628
(420)	$ A_1 - 2A_2 ^2$	24	619	612
(422)	$ A_1 + 2A_2 ^2$	24	565	558
(333)	$ A_1 ^2$	32	532	526
(440)	$ A_1 + 2A_2 ^2$	12	489	484
(531)	$ A_1 ^2$	48	468	462
(600)	$ A_1 - 2A_2 ^2$	30	461	456

Pour tracer la courbe nous prenons comme section efficace de capture de l'U la valeur déclassée de $\sigma_c = 7,2$ barns¹⁴).

Le choix de la quantité d'eau se fait ainsi: Les premiers points de la courbe de l'UO₂ corrigés par rapport à l'eau doivent se trouver sur une droite dont la pente est proportionnelle à σ_c . (Le premier point est déjà très en dehors de la résonnance de capture de l'U²³⁸). L'intersection avec l'ordonnée donne la somme des sections efficaces de diffusion. Si nous déterminons cette droite par la méthode des moindres carrés, en considérant seulement les 4 premiers points, pour lesquels l'effet de diffraction est encore faible, nous obtenons une relation entre σ_c et σ_a de l'uranium. Ces deux grandeurs doivent être ajustées simultanément aux valeurs déclassées. Nous trouvons $\sigma_c = 7,4 \pm 0,4$ et $\sigma_a = 7,9 \pm 0,4$ barns.

Après avoir ainsi ajusté la courbe à la limite des très hautes énergies, nous constatons que les points mesurés se trouvent encore légèrement au-dessus de la courbe calculée. Cette différence doit provenir des chocs inélastiques non contenus dans la formule de

WEINSTOCK que nous appliquons. En particulier vers les très basses énergies ce phénomène a été observé dans le graphite mesuré par ARNOLD, MYERS et WEBER⁵⁾).

Le bioxyde de cérium: La poudre de CeO_2 a été séchée pendant plusieurs heures à une température de 800° . Il est peu probable qu'il reste une quantité appréciable d'eau. L'intersection de la courbe avec l'ordonnée donne une section de diffusion dont la valeur supérieure peut être fixée à 8,0 barns. Il reste donc au maximum 0,6 barns pour le cérium. D'autre part l'ajustage des sauts de diffraction fixe le σ_a également à 0,6 barns. Il n'y a donc pas de place pour l'eau. Par contre il faut admettre une capture totale de 2,3 barns, valeur supérieure à 0,65 barns comme l'indiquent HARRIS et coll.¹⁵⁾ pour le cérium. La présence d'une fraction de quelques cent-millièmes d'autres terres rares peut expliquer ce désaccord. Nous trouvons pour l'amplitude de diffusion du cérium $A_1 = 0,22 \pm 0,02 \cdot 10^{-12}$ cm avec le signe positif comme l'oxygène.

Le CeO_2 possédant la même structure cristalline que l' UO_2 , il est probable que les points mesurés dans le domaine des basses énergies devraient également être situés légèrement au-dessus de la courbe calculée. Cela reviendrait à abaisser la section efficace de capture. Mais comme la précision est insuffisante pour définir avec sûreté la pente du début de la courbe, nous ne pouvons fixer d'avance la capture et chercher un effet de diffusion inélastique.

Nous tenons à remercier la Commission Suisse pour l'Energie Atomique ainsi que M. le Professeur EXTERMANN pour les facilités qu'il nous ont données d'exécuter ce travail. Deux d'entre nous (F.V. et C.S.R.) aimeraient également remercier la JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR, Madrid, pour son assistance.

Institut de Physique, Université de Genève.

Bibliographie.

- 1) O. HALPERN, M. HAMMERESH et M. H. JOHNSON, Phys. Rev. **59**, 981 (1941).
- 2) R. WEINSTOCK, Phys. Rev. **65**, 1 (1944); pour le cas de la diffusion inélastique, voir aussi R. J. FINKELSTEIN, Phys. Rev. **72**, 907 (1947).
- 3) E. FERMI, W. J. STURM et R. G. SACHS, Phys. Rev. **71**, 589 (1947); voir la théorie plus détaillée dans: R. G. SACHS, Scattering of neutrons by polycrystals, AECD-2269 (1947).
- 4) L. WINSBERG, D. MENEGHETTI et S. S. SIDHU, Phys. Rev. **75**, 975 (1949); P. J. BENDT et I. W. RUDERMANN, Phys. Rev. **77**, 575 (1950); I. W. RUDERMANN, Phys. Rev. **78**, 317 (1950); W. C. KOEHLER, E. O. WOLLAN et C. G. SHULL, Phys. Rev. **78**, 640 (1950).

- ⁵⁾ R. G. SACHS et V. W. MYERS, The effect of crystal orientation on the scattering of slow neutrons, MDDC 1682 (1948); G. ARNOLD et A. H. WEBER, Phys. Rev. **73**, 1385 (1948). G. P. ARNOLD, V. W. MYERS et A. H. WEBER, Phys. Rev. **75**, 217 (1949).
 - ⁶⁾ R. KELLER, Helv. Phys. Acta **23**, 627 (1950).
 - ⁷⁾ WYCKOFF, The structure of crystals, 1931.
 - ⁸⁾ E. O. WOLLAN et C. G. SHULL, Phys. Rev. **73**, 830 (1948).
 - ⁹⁾ RUSSELL, Phys. Z. **13**, 55 (1912).
 - ¹⁰⁾ C. G. SHULL et E. O. WOLLAN, Phys. Rev. **81**, 527 (1951).
 - ¹¹⁾ ROBERT K. ADAIR, Rev. of Mod. Phys. **22**, 249 (1950).
 - ¹²⁾ E. FERMI et L. MARSHALL, Phys. Rev. **71**, 666 (1947).
 - ¹³⁾ EDWARD MELKONIAN, Phys. Rev. **76**, 1750 (1949).
 - ¹⁴⁾ United States Atomic Energy Commission, S.P.-21 T, Dec. 4, 1950.
 - ¹⁵⁾ S. P. HARRIS, C. O. MUELHAUSE, S. RASMUSSEN, H. P. SCHRÖDER et G. E. THOMAS, Phys. Rev. **80**, 342 (1950).
-

Über einige neue Bandenspektren der Radikale PbCl, PbBr und PbJ

von K. Wieland*) und R. Newburgh**).

(24. IX. 51.)

Summary: New ultraviolet band systems ($B \leftarrow X$) of PbCl, PbBr and PbJ have been obtained in the absorption spectra of the thermally decomposed vapours of PbX_2 ($X = \text{Halogen}$). In addition, the hitherto missing visible system ($A \longleftrightarrow X$) of PbJ has been observed in emission and, faintly, also in absorption. From a vibration analysis of the four new band systems, from predissociation phenomena occurring in all systems ($B-X$), and from fluorescence experiences made by Porov with the vapours of PbX_2 , the following most probable values (less probable values in brackets) for the dissociation energy of the radicals PbX can be deduced: PbF 3.22 (3.57), PbCl 3.05 (3.40), PbBr \sim 2.5, PbJ 1.98 (1.63)-volts.

I. Einleitung.

Die zweiatomigen Radikale PbF, PbCl und PbBr besitzen im sichtbaren Spektralgebiet je ein Bandensystem ($A \longleftrightarrow X$), das von MORGAN¹⁾ in Emission und von ROCHESTER²⁾ in Absorption vermessen und analysiert worden ist. ROCHESTER³⁾ hat ferner bei PbF in Absorption mehrere ultraviolette Bandensysteme $B-X$, $C-X$, $D-X$, $E-X$ und $F-X$ erhalten, bei denen mehrfach Prädissoziationserscheinungen auftreten. In Emission kann nur der langwellige Teil von System $B-X$ erregt werden.

In den Absorptionsspektren der überhitzten Dämpfe von PbX_2 ($X = \text{Halogen}$) konnten wir, ausser dem bereits bekannten System $B-X$ von PbF, auch für PbCl, PbBr und PbJ das entsprechende ultraviolette System $B \leftarrow X$ (mit violett-abschattierten Banden) photographieren. Ausserdem liess sich für PbJ in Emission, schwach auch in Absorption, das bisher noch fehlende sichtbare System $A \longleftrightarrow X$ (mit rot-abschattierten Banden) auffinden. Über die Vibrationsanalyse dieser vier neuen Bandensysteme soll im folgenden berichtet werden⁴⁾. Aus einem Vergleich der ultravioletten Systeme $B-X$ untereinander, die alle Prädissoziationserscheinungen und zum Teil starke Vibrationsstörungen aufweisen, lassen sich Angaben über die Grösse der Dissoziationsenergie der Radikale PbX gewinnen.

*) Zur Zeit University of California, Dept. of Physics, Berkeley.

**) M. I. T., Dept. of Chemistry, Cambridge (Mass.)

II. Experimentelles.

Für die Absorptionsaufnahmen wurden kleine abgewogene Mengen der Salze PbX_2 in 10 cm lange evakuierte Quarzrohre von bekanntem Volumen eindestilliert, in einem elektrischen Ofen auf 600–1000° C erhitzt und mit Prismenspektrographen grosser Dispersion (grosses Quarzmodell von HILGER und Zwei-Prismen-Glasmodell von HALLE) photographiert. Die Verwendung sehr kleiner Konzentrationen von PbX_2 (3 bis $10 \cdot 10^{-5}$ Mol/l) erwies sich als wesentlich, da nur dann die Bandenspektren der zweiatomigen Radikale beobachtet werden konnten. Bei grösseren Konzentrationen würde das interessierende Spektralgebiet von den kontinuierlichen Absorptionsspektren der dreiatomigen Dämpfe (siehe BUTKOW⁵) überdeckt werden.

Für die Emissionsaufnahmen wurde ein mit wenig Salz beschicktes Entladungsrohr aus Quarz verwendet, welches Aussen-elektroden besass und sich in einem elektrischen Ofen auf Rotglut erhitzen liess. Die Erregung erfolgte mit einem Diathermieapparat oder, besser, mit einem speziell konstruierten Röhrensender.

III. Ergebnisse.

Sämtliche Messdaten sind in den Tabellen 1–4, alle Molekülkonstanten, die sich aus den Kantenformeln ergeben, in Tabelle 5 zusammengestellt.

1. PbCl , System $B \leftarrow X$ ($\lambda \lambda$ 2960–2590 Å).

Figur 1 zeigt zwei typische Serien von Absorptionsaufnahmen, die bei je einer bestimmten Konzentration*) von PbCl_2 -Dampf in Abhängigkeit von der Temperatur erhalten worden sind. Infolge der thermischen Dissoziation von PbCl_2 in $\text{PbCl} + \frac{1}{2} \text{Cl}_2$ wächst die Absorptionsstärke der PbCl -Banden mit steigender Temperatur beträchtlich an, was bei der kleinen Konzentration $p_0 = 1 \text{ mm}^*$) besonders gut erkennbar ist. Das kontinuierliche Absorptionsspektrum von PbCl_2 mit seinen drei Intensitätsmaxima bei 3638, 3250 und 2670 Å⁵) tritt erst bei der höheren Konzentration $p_0 = 3 \text{ mm}$ in Erscheinung. Dass auch in diesem Spektrum eine merkliche Intensitätsveränderung mit der Temperatur Platz greift, lassen die in Figur 2 wiedergegebenen Extinktionskurven erkennen.

*) Hier und im folgenden wird die Konzentration durch den Nulldruck $p_0 = 273/T \cdot p_T$ charakterisiert. $p_0 = 1 \text{ mm}$ entspricht also einer Konzentration von $5,865 \cdot 10^{-5}$ Mol/l.

Wir hatten ursprünglich gehofft, die mit steigender Temperatur abnehmende Gleichgewichtskonzentration an PbCl₂-Dampf aus quantitativen Extinktionsmessungen ermitteln zu können. Mit Hilfe einer von SULZER⁶⁾ abgeleiteten Formel müsste es im Prinzip möglich sein, die Veränderung des kontinuierlichen Absorptionsspektrums von PbCl₂ in einen nur durch die Temperatur bedingten und in

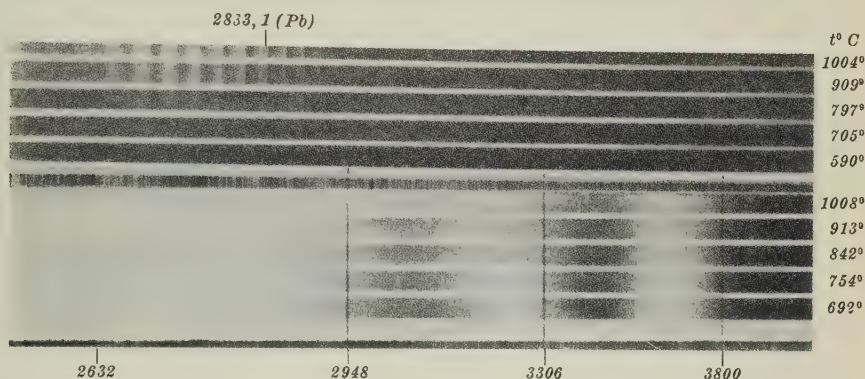


Fig. 1.

Absorption von PbCl₂ und PbCl

oben: $p_0(\text{PbCl}_2) = 0,9 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ cm}$
 unten: $p_0(\text{PbCl}_2) = 3,0 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ cm}$

einen nur durch die Dissoziation bedingten, d. h. nur von der Konzentration abhängigen Anteil zu zerlegen. Der bei den Kurven von Figur 2 auftretende temperaturunabhängige Schnittpunkt⁷⁾ macht es von vornherein wahrscheinlich, dass der temperaturbedingte Anteil bei weitem überwiegt, dass also in unserem Falle eine nennenswerte Konzentrationsabnahme von PbCl₂ absorptionsspektrographisch nicht nachgewiesen werden könnte. Eine thermodynamische Übersichtsrechnung

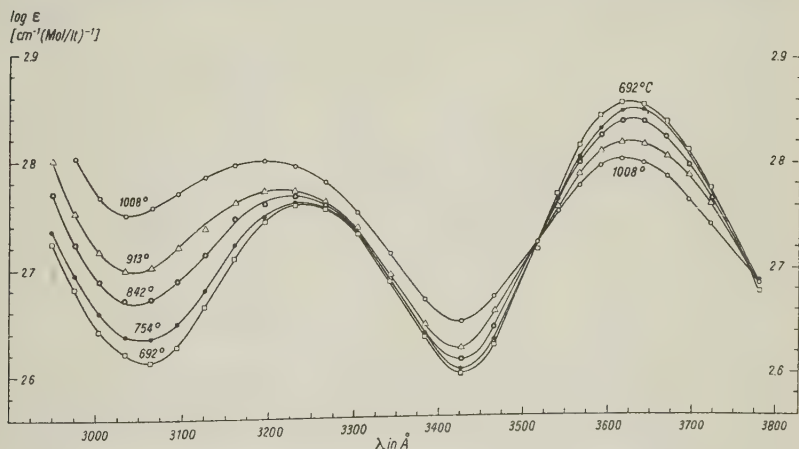


Fig. 2.

Absorptionskurven von PbCl₂-Dampf. $c = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ Mol/l}$, $d = 10 \text{ cm}$.

bestätigt dies: danach dürfte der Dissoziationsgrad des Gasgleichgewichtes $\text{PbCl}_2 \rightleftharpoons \text{PbCl} + \frac{1}{2} \text{Cl}_2$ bei 1000°C und $p_0 = 3 \text{ mm}$ nur etwa 3%, derjenige des Gasgewichtes $\text{PbCl}_2 \rightleftharpoons \text{Pb} + \text{Cl}_2$ sogar weniger als 0,05% betragen. Übrigens konnten wir bei mehrfacher Wiederholung der Extinktionsmessungen mit derselben Konzentration nie genau die gleichen Absorptionskurven erhalten, offenbar infolge einer allmählichen Reaktion der heissen Salzdämpfe mit der Quarzwand.

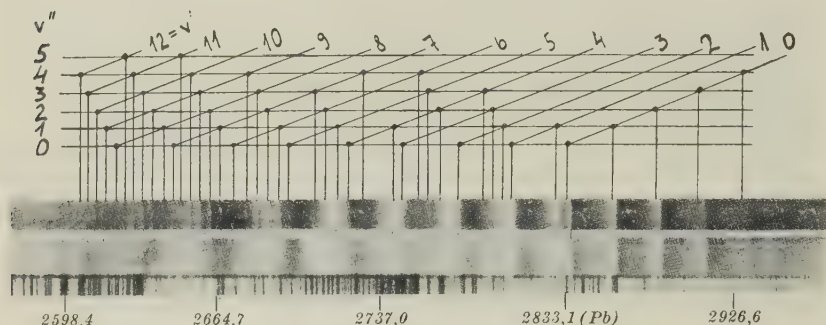


Fig. 3.

PbCl , System $B \leftarrow X$ in Absorption. Oben: PbCl^{37} ; unten: natürliches PbCl .

Figur 3 zeigt eine vergrößerte Wiedergabe der Absorptionsbanden von PbCl ($t = 950^\circ \text{C}$, $p_0(\text{PbCl}_2) = 1 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ cm}$). Infolge der Verwaschenheit gerade der stärksten Bandkanten mit $v' = 1-5$, sowie infolge der Unauffindbarkeit des Chlorisotopen-effektes im Spektrum des natürlichen PbCl (untere Aufnahme in Figur 3), liess sich eine sichere Vibrationsanalyse erst mit Benützung von 92% angereichertem PbCl^{37} (obere Aufnahme in Figur 3) durchführen*). Die für PbCl^{35} gültige Kantenformel wurde aus den kurzwelligen verhältnismässig scharfen Bandkanten (mit $v' \geq 5$) gewonnen und mittels des Isotopenfaktors $\rho = \sqrt{\mu^{35}/\mu^{37}} = 0,9766$ auf diejenige für PbCl^{37} umgerechnet. Für alle Banden mit $v' = 0, 1, 2$ (und eventuell 3) bestehen erhebliche Differenzen zwischen den gemessenen und berechneten Frequenzwerten ($\nu_{\text{beob.}} - \nu_{\text{ber.}}$) (siehe Tabelle 1), was wir auf eine durch Prädissoziation verursachte Vibrationsstörung im oberen Zustand B zurückführen.

2. PbBr , System $B \leftarrow X$ ($\lambda\lambda 3012-2075 \text{ \AA}$).

Es gelten ähnliche experimentelle Verhältnisse wie beim Bleichlorid. Die optimalen Bedingungen für das Erscheinen der Absorptionsbanden von PbBr sind etwa: $p_0(\text{PbBr}_2) \sim 1 \text{ mm}$, $t^0 \sim 1000^\circ \text{C}$

*) Für die Überlassung von 92% angereichertem HCl^{37} -Gas sind wir Herrn Professor CLUSIUS sehr zu Dank verpflichtet.

Tabelle 1.

Gemessene Kantenwerte von PbCl, System B \leftarrow X in Absorption
natürliches PbCl (= PbCl³⁵) 92% angereichertes PbCl³⁷

ν', ν''	I ^a	Auss. ^a	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber. (cm ⁻¹)	I ^a	Auss. ^a	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber. (cm ⁻¹)
14,5						1	us	2577.2	38790	- 3.5
16,8						0	us	83.9	690	
15,7						1	ms	88.6	620	- 3
9,0	0	uss	2591.0	38584	+ 1.5	1	us	92.4	563	- 2
13,5	1	us	94.9	525	+ 2.5	2	ms	2596.6	38500	- 5.5
12,4	1	us	99.1	463	+ 0.5	2	ms	2600.3	445	- 3.5
11,3	1	us	2603.1	404	+ 2	2	ms	04.4	385	- 4.5
10,2	1	us	07.2	344	+ 2.5	2	ms	08.1	330	- 0
						2	ms	12.2	270	- 0.5
14,7 }						0	Linie?	14.4	38239	
9,1 }	2	us	11,3	284	+ 2.5	2	us	15.9	216	- 6.5
9,1		Linie?	14.3	38240	+ 3.5					+ 5.5
13,6						2	ms	2619.8	38160	- 2
8,0	1	us	2616.1	38214	- 5					
12,5	2	us	19.0	171	+ 3.5	3	ms	24.0	098	- 3.5
11,4	3	ms	23.6	104	- 1.5	4	ms	28.0	039.5	- 1
10,3	3	ms	28.0	041	- 2	3	ms	2632.3	37978.5	- 0.5
9,2	3	ms	32.1	37981	+ 0.5	3	ms	36.4	919.5	+ 2
8,1	2	ms	36.5	918	+ 0.5	2	ms	40.7	857	+ 1.5
12,6	1	uss	39.8	870	- 5	1	us	43.6	816	+ 1
7,0	1	uss	40.9	854	0					
11,5	3	ms	44.0	810	- 1	3	ms	48.2	750	- 2
10,4	4	ms	48.4	747	+ 0.5	4	ms	52.7	686	- 3
9,3	5	ms	53.0	682	- 1	5	ms	57.0	625	- 1
8,2	4	ms	57.6	617	- 0.5	4	ms	61.5	561	- 1
7,1	3	ms	62.0	555	+ 3	3	ms	66.0	498.5	0
6,0	1	uss	66.6	490	+ 3.5	1	us	70.8	431	- 3
10,5						0	us	2672.8	37403	+ 2
9,4	3	ms	2674.0	37386	+ 0.5	2	ms	77.5	337	+ 1
8,3	4	ms	78.9	317	- 2	4	ms	82.3	270	- 1
7,2	4	ms	83.5	253	+ 1	3	ms	87.0	205	- 0
6,1	3	ms	88.7	182	- 2.5	3	ms	92.0	136	- 3
5,0	2	us	93.3	118	+ 1	2	us	96.7	072	- 1
7,3	2	uss	2704.8	36961	+ 7	2	uss	2708.0	36916	+ 2.5
6,2	4	us	10.2	887	+ 2.5	5	us	13.3	844	- 2
5,1	6	us	15.7	812	- 3	6	us	18.7	771	- 7
9,6						2	us	19.6	759	- 2.5
4,0	2	us	20.5	747	+ 1.5	2	ms	23.2	710	+ 0.5
8,5	4	us	21.6	732	+ 4.5	4	ms	24.5	693	0
7,4	1	us	27.4	654	- 3	2	us	29.6	624	0
6,3						1	uss	34.6	557	+ 2.5
5,2						6	uss	40.4	480	- 5
4,1	1	uss	2743.0	36446	+ 2.5	7	uss	45.9	407	- 8
8,6						5	us	2750.4	36348	+ 3.5
3,0	7	us	48.3	376	+ 4	3	uss	51.5	333	- 1.5
7,5						2	us	57.0	260	- 4.5
6,4	1	uss	55.2	284	- 5.5					

Tabelle 1 (Fortsetzung).

PbCl³⁵PbCl³⁷

v', v''	I ^{a)}	Auss. ^{a)}	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber. (cm ⁻¹)	I ^{a)}	Auss. ^{a)}	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber. (cm ⁻¹)
4,5						2	uss	57.7	252	- 0.5
5,3	2	uss	60.4	216	- 1	2	us	62.0	195	+ 1.5
4.2						1	uss	67.3	125	+ 3.5
2.0	7	us	75.6	018	+ 22	8	us	2777.0	36000	+ 22.5
5,4						1	uss	84.2	35906	+ 2.5
4,3						2	uss	89.9	833	+ 3.0
(3,2)	2	uss	2793.7	35784	(+ 14)	2	uss	94.0	35780	(+ 23)
1,0	6	ms	2804.1	652	+ 34	7	ms	2804.5	647	+ 39
(2,2)						2	Linie?	25.1	387	(- 2.5)
1,1	4	ms	2827.7	35354	+ 38	5	ms	2827.8	35353	+ 39.5
	10	Pb	2833.1	287		10	Pb-Lin.	2833.1	287	
(0,0)	3	ms	33.8	278	+ 40)	(3	ms	33.9	277	+ 40)
3,4						1	uss	41.5	182	+ 7
2,3						1	uss	46.0	127	+ 29
0,1	5	ms	2858.1	34978	+ 42	5	ms	2857.7	34983	+ 40.5
0,2	4	ms	82.9	677	+ 41	4	ms	82.1	687	+ 38
1,4						1	uss	2900.2	470	+ 31
0,3	3	ms	2908.0	378	+ 40	3	ms	06.6	394	+ 38
1,5	1	ms	25.9	168	+ 42	1	us	24.4	185	+ 34
0,4	2	ms	33.4	080	+ 39	2	ms	31.1	107	+ 39
1,6	1	uss	51.7	33869	+ 37	1	us	48.8	33902	+ 37.5
0,5	1	us	59.2	783	+ 37	1	us	56.3	816	+ 36.5

a) in den Tabellen 1-4 bedeuten:

I: okular geschätzte Intensitätswerte 0-10.

Auss.: Aussehen der Banden s (scharf), ms (mittelscharf), us (unscharf), uss (sehr unscharf).

(vgl. Figur 4). Auch hier sind die Bandkanten nirgends ganz scharf, diejenigen mit $v' \geq 5$ sind sogar sehr unscharf (siehe Tabelle 2). Aus

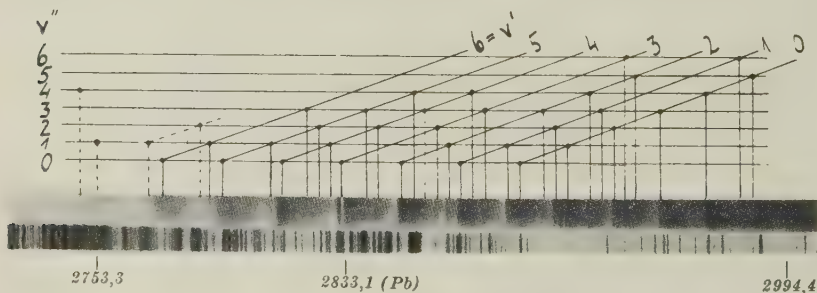


Fig. 4.

PbBr, System B ← X Absorption.

der für PbBr⁷⁹ aufgestellten Kantenformel erhält man diejenige für PbBr⁸¹ mittels des Isotopenfaktors $\varrho = \sqrt{\mu^{79}/\mu^{81}} = 0,991$.

Tabelle 2.

Kantenwerte von PbBr, System $B \leftarrow X$ in Absorption

v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.
1,8*	1	uss	3011.6	33195	+1
2,9*	2	uss	3006.5	33252	+4
0,6	3	us	2999.6	33328	+3
1,7	3	us	2994.5	33385	+3
0,5	4	ms	2981.7	33528	+1
1,6	2	us	2976.7	33585	+3
0,4	5	s	2964.0	33728	-1
0,4*	5	s	63.5	33734	-2
0,3	6	s	2946.1	33933	0
2,5	1	ms	2936.6	34043	+4
3,6	0	us	2932.4	34092	0
0,2	6	s	2928.5	34137	0
1,3	2	ms	2924.0	34190	0
2,4	4	s	2919.5	34242	0
0,1	5	s	2911.1	34341	-3
1,2	7	s	2906.7	34393	-1
2,3	4	s	2902.2	34447	+2
0,0	4	s	2893.8	34547	-2
1,1*	9	s	2889.8	34598	-1
4,4	2	ms	2876.4	34755	+5
1,0	6	s	2872.6	34802	-1
2,1	7	s	2868.4	34853	-2
3,2	3	ms	2864.2	34904	0
4,3*	0	us	2860.4	34950	0
5,4	2	ms	2856.1	35003	+1
2,0*	9	s	2851.8	35055	-2
2,0	9	s	51.4	35060	-2

v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.
4,2	4	s	2843.4	35159	+1
3,0*	9	s	2831.2	35310	+1
3,0	9	s	30.7	35317	+1
4,1*	2	us	2827.6	35355	-1
5,2*	3	us	2823.7	35404	+2
6,3	3	us	2919.4	35457	0
7,4	2	us	2815.7	35504	+1
4,0*	8	ms	2811.3	35560	-1
4,0	8	ms	2810.5	35571	+1
5,1*	7	us	2807.8	35605	-1
5,1	7	us	2807.1	35614	-2
5,0*	7	us	2791.6	35811	0
5,0	7	us	2790.8	822	0
6,1*	7	us	2787.8	35860	+5
6,1	7	us	2787.3	35868	+2
7,2	2	uss	2783.4	35917	+6
6,0*	3	uss	2772.0	36064	+5
6,0	3	uss	2771.4	36073	0
7,1	5	uss	2768.3	36113	-3
8,2	4	uss	2764.3	36165	+6
8,11*	2	uss	2749.6	36359	+10
8,11					-6
10,3*	4	uss	2744.9	36421	-11
11,4*	3	uss	2741.1	36472	-1
12,4*	2	uss	2723.4	36708	-7
13,4*	0	uss	2705.6	36950	-6

Die mit * markierten Werte gehören zu PbBr⁸¹, alle übrigen zu PbBr⁷⁹.

3. PbJ.

a) Das ultraviolette System $B \leftarrow X$ ($\lambda\lambda$ 3086—2753 Å). Dieses lässt sich im Temperaturbereich 700—1000° C am besten bei einem Null-druck $p_0(\text{PbJ}_2)$ von nur $\sim 0,5$ mm beobachten. Wiederum sind die

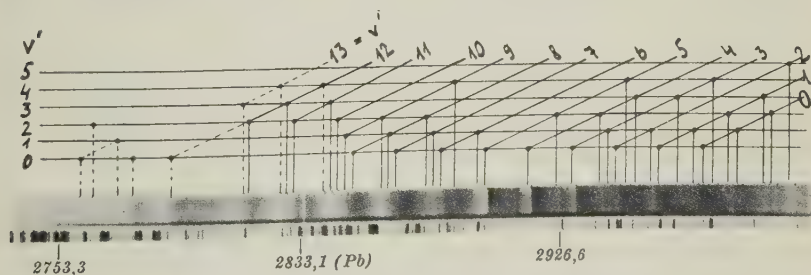


Fig. 5.

PbJ, System $B \leftarrow X$ in Absorption.

Bandkanten ein wenig, im kurzwelligen Gebiet (mit $v' \geq 11$) sogar sehr unscharf (vgl. Figur 5). Die kurzwelliger als λ 2785 Å liegenden, ausnahmslos diffusen Banden gehören vermutlich zu einem anderen System, sie würden sich nur unter Zulassung sehr grosser Vibrationsstörungen in das System $B-X$ einordnen lassen (siehe Tabelle 3).

Tabelle 3.

Kantenwerte von PbJ, System $B \leftarrow X$ in Absorption

v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.
0,7	1	us	3085.7	32398	0
1,8	1	us	82.0	32437	-2
-	0	us	78.9	32470	-
0,6	2	ms	70.9	32554	-1
1,7	1	us	66.6	32600	+4
0,5	3	ms	3056.1	32712	0
0,4	4	ms	41.3	32871	-1
0,3	4	ms	26.8	33029	0
2,5	2	us	19.9	33104	-4
0,2	4	ms	12.1	33190	+2
1,3	5	ms	08.8	33226	-1
0,1	3	ms	2997.9	33347	0
1,2	6	s	94.1	33389	+3
3,4	2	us	87.5	33463	+1
4,5	2	us	84.0	33502	+2
1,1	5	ms	79.9	33548	+3
2,2	1		77.0	33581	-2
3,3	3	s	73.5	33621	0
1,0	2	ms	65.6	33710	+5
2,1	7	s	63.1	33739	-3
4,3	2	us	2956.2	33817	0
5,4	2	us	53.3	33851	-2
2,0	5	ms	48.9	33901	-2
3,1	3	ms	45.6	33939	0
4,2	4	ms	42.3	33977	+1
6,4	1	us	35.8	34052	+5
3,0	8	s	31.7	34100	+1
5,2	3	s	25.6	34171	0
4,0	10	s	2915.0	34295	0
5,1	0	uss	11.5	34336	+6
7,3	1	us	06.0	34402	+2
5,0	9	s	2898.6	34489	-1
6,1	7	ms	95.4	34527	+2
9,4	3	ms	87.1	34627	0
6,0	4	s	82.4	34683	-2
7,1	6	ms	79.5	34718	-1
8,2	4	us	76.4	34756	+4
11,5	0	us	68.7	34849	-3

v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.
7,0	3	ms	66.1	34880	-1
8,1	4	ms	63.3	34914	+2
9,2	7	s	61.0	34942	-3
8,0	2	ms	2850.4	35073	+1
9,1	5	s	48.0	35102	-2
10,2	5	ms	45.3	35135	-1
11,3	6	ms	42.8	35166	-2
12,4	2	ms	40.2	35199	-1
11,2	3	ms	29.9	35327	0
12,3	4	ms	27.4	35358	-1
(13,4?)	7	us	25.5	35382	-8
12,2	2	us	2814.8	35516	-2
13,3	3	us	13.0	35539	-9
12,1	0	us	2802.3	35675	-2
14,3	0	us	2797.2	35739	+2
(12,0?)	6	us	2789.0	35844	+7
14,2	1	uss	84.9	35897	+1
(13,0?)	5	us	77.0	36000	-26
(14,1?)	6	us	72.2	36062	+6
	2	us	67.9	36118	
	3	us	64.5	36162	
(14,0?)	4	ms	60.2	36219	+3
(15,1?)	2	us	58.0	36248	+4
(16,2?)	1	uss	55.7	36278	+6
	1	uss	52.8	36316	
	3	us	2748.5	36373	
	1	uss	43.0	36445	
	2	uss	40.1	36484	
	1	uss	37.8	36515	
	2	uss	33.1	36577	
	0	uss	2728.9	36634	
	0	uss	17.9	36782	
	0	uss	16.7	36798	
	0	uss	12.5	36856	
	0	uss	04.5	36964	
	0	uss	00.4	37020	
	0	uss	2690.3	37159	
	0	uss	80.0	37302	

b) Das sichtbare System $A \leftrightarrow X$ (λ 6510—4417 Å). Alle Versuche, die ultravioletten Systeme $B \leftarrow X$ von PbCl, PbBr und PbJ auch in Emission zu erregen, schlugen fehl, vermutlich infolge der bei

diesen Systemen auftretenden Prädissoziationserscheinungen. Dagegen konnte mit einem mit Bleijodid beschickten Entladungsrohr ein ausgedehntes System ($A-X$) von rotabschattierten Banden erhalten werden, dessen langwelliger Teil in Figur 6 abgebildet ist.

Dieses System ist bereits früher von POPOV und NEUJMIN⁸⁾ bei der Photodissoziation von PbJ_2 -Dampf im Fluoreszenzlicht beobachtet, aber nicht näher untersucht worden. Inzwischen hat auch RAO⁹⁾ die Banden in einer elektrischen Entladung photographiert.

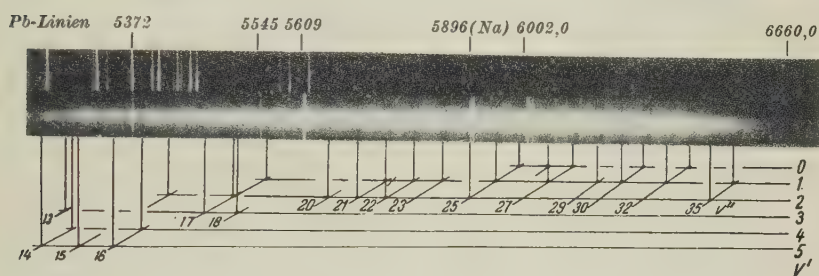


Fig. 6.

PbJ, System $A \rightarrow X$ in Emission.

Die von ihm mitgeteilten Messdaten weichen allerdings erheblich von unseren in Tabelle 4 angegebenen Werten ab, und seine Vibrationsanalyse kann nicht richtig sein.

Bei Nulldrucken von 1–3 mm PbJ_2 und Temperaturen bis zu 1100°C konnten wir die meisten Banden des kurzwelligen Teiles von System $A-X$ schwach auch in Absorption beobachten. Die Intensität des Systems $A-X$ dürfte 5–10mal kleiner sein als diejenige des Systems $B-X$.

Die Vibrationsanalyse von System $A-X$ erwies sich als nicht ganz einfach, wegen der ungewohnten Intensitätsverteilung mit Intensitätsmaximum bei grossen v'' -Werten, wegen des Fehlens eines messbaren Isotopeneffektes und schliesslich wegen der störenden Anwesenheit zahlreicher Bleilinen im Emissionsspektrum. Die in Tabelle 4 angegebene v' -Numerierung ist daher nicht ganz sicher, sie muss möglicherweise um + 1 erhöht werden.

Der ungewöhnliche Aufbau des Systems, der durch eine starke Verschiebung nach grossen Atomkernabständen der flachen oberen Potentialkurve A bedingt ist (vgl. Figur 7d), kommt im *Deslandres-Schema* deutlich zum Ausdruck. Man versteht leicht, warum die langwelligen Banden (kleine v' , grosse v'' -Werte) in Emission besonders stark, in Absorption dagegen, selbst bei 1100°C , überhaupt nicht auftreten.

$\nu'' \backslash \nu'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
0																											(9)	(8)	10			7					
1																		5										10	(8)	9	0	7					
2																3		4	6	(6)	8	8	(9)			6										3	
3													(2)			2		5	6																	4	
4													1	2	3		4																				
5											2		1	2	4	4	3				4																
6								(1)		(2)	(2)		3	3	3						3																
7								1	1	2	2	2	3	2	2		2				3																
8									1	2							(2)	3																		7	
9			(1)						1	1	2	1																									
10	(1)								1	1	(1)		(2)																								
11									(1)	(2)	(2)	(1)																									
12									0	0	1	1																									
13	(0)								1	(1)	(0)	1																									
14	0								0	0	1	2	(1)	(2)	(2)	(1)																					
15		0	0	0	1	(1)																															
16						1	2	1																													
17		0				1	0																														
18		(0)																																			
19																																					
20		0			(0)		(1)	(0)																													
21			0		0	0	0																														
22					(0)																																
23		0	0				(0)	(0)																													
24			0						0																												
25									0																												
26																																					
27									0	0	0	0																									

Deslandres-Schema des Systems ($A-X$) von PbJ.

Intensitätswerte (0—10) in Emission,
* auch in Absorption beobachtet,
< > mehrdeutige ν' , ν'' -Numerierung möglich,
() durch Atomlinie verdeckt.

Deslandres-Schema des Systems (A—X) von PbJ.

Intensitätswerte (0—10) in Emission,

* auch in Absorption beobachtet,

<> mehrdeutige ν' , ν'' -Numerierung möglich,

() durch Atomlinie verdeckt.

Tabelle 4.

Kantenwerte von PbJ, System A \rightarrow X in Emission.

v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.	v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.
1,35	3	us	6509.9	15357	+1	6,12	3	s	5147.1	19423	+2
2,35	4	us	6452.3	15494	+2	12,16	1	s	5129.4	19490	0
0,32	6	ms	6388.4	15649	+1	7,12	2	s	5115.5	19543	0
1,32	7	ms	6333.4	15785	-2	5,10	2	Li?	5098.8	19607	0
3,33	7	ms	6284.8	15907	-4	7,11	2	ms	5075.8	19696	-1
0,30	7	s	6273.8	15935	-2	6,10	2	ms	5066.0	19734	{ +3 0
1,30	8	s	6218.7	16076	0	10,13					
1,29	9	s	6162.8	16222	0		1	m	5064.4	19740	-
0,27	10	s	6105.9	16373	{ -2 +4	8,11	2	s	5045.3	19815	0
0,26						7,10	2	s	5035.6	19853	+1
1,27	8	s	6052.3	16518 ^b	{ +4 +5	9,11	1	ms	5016.9	19927	-3
0,25							1	us	5008.1	19962	-
1,25	10		5948.6	16806	-2	7,9	1	us	4996.9	20007	-1
2,25	6		5899.1	16947	+2	13,13	1	us	4985.6	20052	0
1,23	10	s	5845.7	17102	-3	9,10	2	s	4978.0	20083	-2
4,25	5	ms	5811.3	17203	-4	8,9	1	ms	4967.8	20124	-2
1,22	9	s	5795.5	17250	-4	7,8	1	us	4957.0	20168	+4
1,21	9	s	5746.5	17397	{ -6 +7	6,7	1	s	4950.3	20195	{ -4 -2
2,22						10,10					
2,21	8	s	5699.0	17542	+3	9,9	1	s	4939.3	20240	-1
2,20	8	s	5650.7	17692	+2	11,40	1	s	4923.3	20306	{ 0 0
2,19	7	Li?	5603.8	17840	0	14,12					
2,18	6	ms	5557.1	17990	-1	10,9	1	s	4912.6	20350	-3
1,17	5	s	5551.5	18008	+2	9,8	1	s	4900.8	20399	+2
5,20	4	uss	5527.9	18085	+5	11,9	2	s	4886.2	20460	{ -2 0
3,18	6	s	5516.0	18124	0	14,11					
2,17	4	ms	5510.4	18142	-1	10,8	1	s	4875.5	20505	-4
3,17	5	s	5470.1	18276	+1	11,8	2	s	4849.3	20616 ^a	{ -2 +1
6,19	3	s	5445.4	18359	+5	14,10					
2,15	3	Li?	5419.7	18446	-1	10,7	1	us	4837.3	20667 ^a	+2
7,19	3	us	5410.3	18478	+3	12,8	1	s	4824.7	20721 ^a	-3
4,16	4	s	5386.4	18560	+2	11,7	1	Li?	4813.3	(20770 ^a)	{ -4 -1
3,15	2	s	5380.3	18581	+1	14,9					
5,16	3	us	5350.1	18686	+1	13,8	1	us	4801.0	20823 ^a	-4
11,20	2	us	5323.6	18779	0	12,7	1	s	4788.4	20878 ^a	-2
5,15	4	ms	5306.7	18839	+2	17,10	1	s	4782.9	20902	+5
4,14	3	ms	5299.3	18865	+2	11,6	1	s	4776.5	20930 ^a	{ -1 +3
8,17	3	ms	5291.2	18894	-2	14,8					
7,16	2	us	5280.3	18933	+3	16,9	0	us	4768.1	20967	+5
6,15	3	us	5272.0	18963	+2	10,5	0	us	4764.7	20982 ^a	{ +2 -1
5,14	4	s	5263.1	18995	+5	13,7					
4,13	2	ms	5255.9	19021	+4	12,6	1	s	4752.2	21037 ^a	0
8,16	2	s	5249.0	19046	{ -2 +5	14,7	2	s	4741.6	21084 ^a	+1
3,12						10,4	1	s	4729.0	21140 ^a	{ +2 0
5,13	2	ms	5221.3	19147	+3	13,6					
4,12	1	ms	5214.8	19171	0	12,5	0	ms	4716.6	21196 ^a	+1
7,14	2	ms	5196.9	19237	+2	14,6	1	us	4706.6	21241 ^a	+1
6,13	3	s	5188.0	19270	+2	16,7	1	us	4699.5	21273	-1
5,12	1	ms	5179.6	19301	+3	13,5	1	us	4692.9	21303 ^a	+5
12,17	1	s	5170.5	19335	-3	15,6	1	us	4684.9	21339	{ +2 -4
7,13	3	s	5156.1	19389	0	9,2					

Tabelle 4 (Fortsetzung).

Kantenwerte von PbJ, System A \rightarrow X in Emission.

v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.	v', v''	I	Auss.	λ (Å)	ν (cm ⁻¹)	beob. -ber.
12,4	0	us	4682.3	21351 ^a	-2	15,3	0	us	4582.9	21814	+3
14,5	0	ms	4671.8	21399	+1	19,5	0	us	4576.0	21847 ^a	-6 -1
16,6	2	Li?	4664.2	(21434 ^a)	+3	23,7					
15,5	1	s	4650.7	21496	+1	21,6	0	us	4572,7	21863	+7
17,6	0	ms	4646.0	21518 ^a	-4	24,7	00	us	4561.8	21915	-3
14,4	0	ms	4637.1	21559	+3	27,8	0	ms	4555.0	21948 ^a	-6
16,5	1	s	4629.6	21594 ^a	+5	15,2	00	us	4550.8	21968	-2
13,3	0	ms	4624.5	21618	+4 -2	19,4	00	us	4542.9	22006	-5 +1
20,7						23,6					
	0	ms	4621.5	21632			0	s	4539.4	22023 ^a	
15,4	0	ms	4617.9	21649 ^a	-4	14,1	00	us	4537.8	22031	-2
17,5	1	s	4610.2	21685 ^a	+5	13,0	0	us	4524.8	22094	+1 +1
10,0	1	ms	4590.5	21778 ^a	+3 +5 +1	20,4					
13,2						27,7(?)	0	ms	4522.0	22108 ^a	-2
20,6						17,2	0	us	4512.0	22157	+2
						21,4	0	ms	4508.3	22175	+3
							0	ms	4506.7	22183 ^a	-
						18,2	00	us	4494.4	22243	0 -5
						22,4					
						27,6(?)	00	ms	4490.7	22262 ^a	-5
						21,3	00	us	4475.6	22337 ^a	+7
						20,2	00	ms	4459.5	22418 ^a	+8
						23,3	00	ms	4446.8	22482 ^a	+3
						24,3	00	us	4433.7	22548 ^a	-1
						25,3	00	us	4421.6	22610 ^a	-6
						23,2	00	us	4416.7	22635 ^a	-3

a = Auch in Absorption beobachtet. b = Durch Atomlinie verdeckt.
Li = Bedeutet Linie.

IV. Diskussion der Ergebnisse.

Ein Vergleich der vier neuen Bandenspektren mit den früher schon bekannten der zweiatomigen Bleihalogenide führt zu dem in Figur 7 dargestellten Termschema, das wir im folgenden näher begründen wollen.

PbF. Besonders aufschlussreich sind die von ROCHESTER³⁾ näher untersuchten Prädissoziationserscheinungen im System B—X. In Emission treten nur Banden mit den Vibrationsquantenzahlen $v' = 0$ und 1 auf, sie sind völlig scharf (Rotationsstruktur). In Absorption erscheinen noch scharfkantige Banden bis $v' = 3$, Banden mit $v' > 3$ fehlen. Kurzwelligerseits anschliessende unscharfe Absorptionsbanden wurden von ROCHESTER in ein neues System C \leftarrow X eingeordnet, in welchem aber die Vibrationsterme $G(v' = 0)$

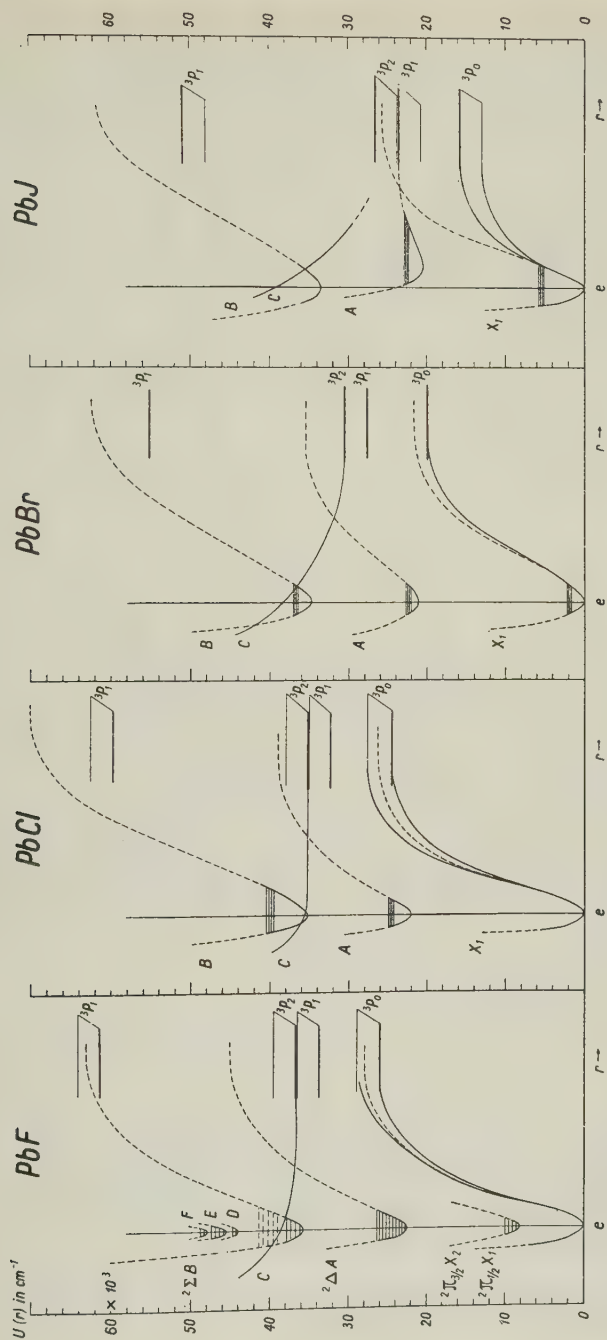


Fig. 7.
Potentialkurven der zweiatomigen Radikale PbX.

und $G(v'' = 0)$ nicht vorkommen. In Anbetracht dieser merkwürdigen Lücken halten wir es für wahrscheinlich, dass die Banden des Systems $C-X$ einfach die kurzwellige Fortsetzung von System $B-X$ bilden, allerdings mit erheblichen Vibrationsstörungen in den Termen $G(v' \geq 4)$. Die v'' -Numerierung bleibt dieselbe, $v'(B)$ aber wird $= v'(C) + 4$, Banden mit $v'(B) = 4$ fehlen.

Mit dieser Deutung ergeben sich folgende Differenzen zwischen den von Rochester beobachteten (von ihm in System $C-X$ eingeordneten) Frequenzwerten ν_C und den von uns aus Formel ($B-X$) berechneten Werten ν_B

$$\nu_C - \nu_B \text{ (in cm}^{-1}\text{):}$$

$v'' \backslash v'(B)$	1	2	3	4	5
4	—	—	—		
5	+22	+20	+16		
6	+33	+33	+33		
7		+41	+47	+47	
8				+62	+62
9					+82

Unabhängig von der Richtigkeit unserer Deutung muss jedenfalls eine starke Störung im Term B bei $v' \geq 4$ vorhanden sein*). Deshalb nehmen wir an, dass eine Abstossungskurve C die stabile Potentialkurve B bei $v' = 4$ schneidet und zwischen $v' = 1$ und $v' = 2$ in den Atomterm T_a ausläuft, wie in Figur 7a dargestellt. Wir sind der Meinung, dass die Kurve C die Termhöhe $T_{0,0}(B) + G'(1)$ kaum unterschreiten dürfte, wegen der Schärfe der Emissionsbanden mit $v' = 1$. Unter dieser Annahme ergibt sich für die Dissoziationsenergie des Grundzustandes:

$$D_0 \left. \begin{array}{l} < T_{0,0}(B) + G'(2) - T_a \\ > T_{0,0}(B) + G'(1) - T_a \end{array} \right\} = 36600 \pm 300 - T_a$$

mit $T_{0,0}(B) = 35695$ und $G'(1) = 605 \text{ cm}^{-1}$, $G'(2) = 1205$.

Die in Frage kommenden Atomterme T_a sind in bezug auf Pb die drei tiefsten: $^3P_0(0)$, $^3P_1(7817)$ und $^3P_2(10648 \text{ cm}^{-1})$, in bezug auf F nur der Grundterm $^2P_{3/2}$. Damit erhalten wir für D_0 die drei Werte: 36600, 28780 und 25950 (± 300) cm^{-1} .

*) Nach der Deutung von ROCHESTER würden ja für $v' \geq 4$ überhaupt keine Banden von System $B-X$ mehr auftreten.

Tabelle 5.
Molekülkonstanten von PbCl, PbBr und PbJ^{a)}

Molekül	Isotope	Term ^{b)}	Te	$\nu_{0,0}$	ω_e	$x_e \omega_e$	Dissoz.-Energie D_0 (Volt) lin. währ- extrapol. scheinl. ^{e)}	Referenz
PbCl	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cl}^{35} \\ \text{Cl}^{37} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cl}^{35} \\ \text{Cl}^{37} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cl}^{35} \\ \text{Cl}^{37} \end{array} \right\}$	$X(^2\Pi_{\frac{1}{2}})$	0	0	303.6 ^{c)}	0.875 ^{c)}	≤ 3.05 (≤ 3.40)	ROCHESTER ²⁾ , diese Arbeit
				21827.6	296.5	0.835		
		$A(^2\Delta)$	21865.0	21828.5	228.8	0.795	3.24	ROCHESTER ²⁾
				35238.0	223.5	0.758	2.03	
		$B(^2\Sigma)$	35198.8	35237.1	382.1	1.05	4.29	diese Arbeit
					373.2	1.00		
PbBr	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Br}^{79} \\ \text{Br}^{81} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Br}^{79} \\ \text{Br}^{81} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Br}^{79} \\ \text{Br}^{81} \end{array} \right\}$	$X(^2\Pi_{\frac{1}{2}})$	0	0	207.5	0.50	~ 2.5	MORGAN ¹⁾ , diese Arbeit
				20856.8	205.6	0.49		
		$A(^2\Delta)$	20884.3	20857.1	152.5	0.40 ^{d)}	2.66	MORGAN ¹⁾
				34549.0	151.1	0.39 ^{d)}	1.81	
		$B(^2\Sigma)$	34523.7	34548.8	258.2	0.60	3.42	diese Arbeit
					255.9	0.59		
PbJ	$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$	$X(^2\Pi_{\frac{1}{2}})$	0	0	160.5	0.25	3.18	1.98
		$A(^2\Delta)$	20529.0	20519.5	142.0	1.50	0.41	(1.63)
		$B(^2\Sigma)$	33488.0	33507.1	198.7	0.35	3.48	diese Arbeit

a) Über die Molekülkonstanten von PbF siehe ROCHESTER³⁾.

b) Die Termbezeichnung erfolgt in Analogie zu derjenigen von PbF nach ROCHESTER³⁾.

c) MORGAN¹⁾ gibt folgende, wenig verschiedene Werte an: $\omega_e'' = 304.2$, $x_e \omega_e'' = 0.89 \text{ cm}^{-1}$.

d) $y_e \omega_e = -0.028$.

e) Wahrscheinlichste Werte auf Grund der hier gegebenen Diskussion. Die wahrscheinlichsten Werte für PbF sind: 3,22 (3,57) Volt.

Der erste Wert ist unwahrscheinlich gross, die beiden anderen dagegen sind a priori gleicherweise möglich. Da die aus den Schwingungsquanten des Grundzustandes linear extrapolierte (im allgemeinen noch zu grosse) Dissoziationsenergie nur 27650 cm^{-1} beträgt, so möchten wir den dritten abgerundeten Wert:

$$D_0(\text{PbF}) = 26000 (\pm 400) \text{ cm}^{-1}$$

als den wahrscheinlichsten, daneben aber auch den höheren Wert $D_0 = 28800 (\pm 400) \text{ cm}^{-1}$ als durchaus möglich ansehen. Dementsprechend ist in Figur 7a die dem tieferen Dissoziationswert entsprechende Lage der Atomterme (Kurve *C* führt zu $\text{Pb}(^3P_2) + F(^2P_{3/2})$) durch dicke Linien, die andere mögliche Lage der Atomterme (*C* führt zu $\text{Pb}(^3P_1) + F(^2P_{3/2})$) durch dünne Linien dargestellt worden.

PbCl, PbBr und PbJ.

Die Systeme $B \leftarrow X$ dieser drei Moleküle lassen sich, wie bereits erwähnt, in Emission überhaupt nicht erregen, sie bestehen durchgehend aus mehr oder weniger unscharfen Banden. Deshalb muss hier die für die Prädissoziation verantwortliche Abstossungskurve *C* sicher unterhalb der Termhöhe $T_{0,0}(B)$ auslaufen. Unter Berücksichtigung ferner der früher erwähnten Stellen grosser Unschärfe und der Vibrationsstörungen im Term *B* dürften die Schnittpunkte der Kurven *C* mit den Kurven *B* etwa so, wie in den Figuren 7b, c, d dargestellt, liegen.

Aus der Ungleichung $D_0 > T_{0,0}(B) - T_a(C)$ ergibt sich mit $T_a = 10648$ bzw. $= 7817 \text{ cm}^{-1}$ lediglich je ein oberer Grenzwert für die Dissoziationsenergie des Radikals PbX im Grundzustand (siehe Tabelle 6).

Tabelle 6.

Obere Grenzwerte D_0 aus der Prädissoziation im Zustand <i>B</i>						
Molekül	$T_a = 10648 \text{ cm}^{-1}$ (Pb, 2P_2)		$T_a = 7817 \text{ cm}^{-1}$ (Pb, 2P_1)		$G''(v_{\max})$ lin. extr.	
	cm^{-1}	Volt	cm^{-1}	Volt	cm^{-1}	Volt
PbF ¹⁾	$= 25950 (\pm 300)$	3,22	$= 28780 (\pm 300)$	3,57	27650	3,43
PbCl	< 24590	3,05	< 27420	3,40	26180	3,24
PbBr	< 23900	2,96	< 26730	3,31	21450	2,66
PbJ	< 22860	2,83	< 25690	3,18	25680	3,18

¹⁾ Die vollständigkeitshalber mitangeführten Werte für PbF folgen aus der weiter oben besprochenen Gleichung $D_0 = T_{0,0}(B) + G(1) \pm 300 - T_a$.

Der Vergleich dieser oberen Grenzwerte mit den aus den Schwingungsquanten $G''(v)$ des Grundzustandes linear extrapolierten Dissoziationswerten (vgl. Tabelle 6) führt, wie bei PbF, zu einer Bevorzugung der kleineren ($T_{0,0} - T_a$)-Werte (mit $T_a = 10648 \text{ cm}^{-1}$), welche jedoch bei PbCl, PbBr und PbJ noch merklich grösser als die richtigen D_0 -Werte sein können.

Nun kann andererseits aus den *Fluoreszenzversuchen* von POPOV und NEUMIN⁸⁾¹⁰⁾ ein, allerdings ziemlich unsicherer, *unterer* Grenzwert für die Grösse D_0 gewonnen werden. Bei Bestrahlung der auf rund 500° C erhitzten Dämpfe von PbX_2 mit ultravioletttem Licht der Frequenz ν_i wird als Fluoreszenzstrahlung das Bandenspektrum $A \rightarrow X$ von PbX mit mehr oder weniger gut definierter kurzweiliger Grenze ν_{μ} emittiert. Bedeutet D_I die Energie (in cm^{-1}), die zur Abtrennung eines Halogenatoms X aus dem Molekül PbX_2 benötigt wird, und E_{th} die thermische Energie, die bei 500° C mit rund 1000 cm^{-1} eingesetzt werden kann, so gilt

$$D_I \leq (\nu_i - \nu_{\mu}) + E_{th}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt offenbar nur dann, wenn die Zerfallsprodukte keine kinetische Energie besitzen (vgl. z. B. Photo-dissoziation von HgCl_2 ¹¹⁾). Bei Kenntnis der atomaren Bildungswärme*) $Q_a = D_I + D_0$ ergibt sich daher ein *unterer* Grenzwert für die Dissoziationsenergie D_0 des Radikals PbX aus der Gleichung:

$$D_0 \geq Q_a - (\nu_i - \nu_{\mu}) - E_{th}.$$

In Tabelle 7 sind die für die Auswertung dieser Gleichung benötigten Energiewerte (in cm^{-1}) zusammengestellt. Die so abgeschätzten unteren Grenzwerte sind mit einer ziemlich grossen Unsicherheit behaftet. Sie können möglicherweise, selbst wenn keine Strahlungsenergie in Form von kinetischer Energie verloren geht, $2000\text{--}3000 \text{ cm}^{-1}$ zu gross, aber nicht sehr viel zu klein sein.

Durch Vergleich der *oberen* Grenzwerte (aus Tabelle 6) mit den *unteren* Grenzwerten (aus Tabelle 7) erhält man für PbCl, mit $T_a = 10648 \text{ cm}^{-1}$, den eng eingegabelten Wert.

$$\underline{D_0 (\text{PbCl}) = 24600 \text{ cm}^{-1}}$$

Mit kleinerer Wahrscheinlichkeit, nämlich mit $T_a = 7817$, ist jeder D_0 -Wert zwischen 27400 und $\sim 25000 \text{ cm}^{-1}$ möglich.

*) Q_a = Bildungswärme des gasförmigen Moleküls PbX_2 aus den gasförmigen Atomen bei 0° K .

Für $PbBr$, mit $T_a = 10648$, erhält man die grobe Eingabelung $23900 > D_0 > 17850$, so dass wir als wahrscheinlichsten runden Wert nur

$$\underline{D_0(PbBr) = 20000 (\pm 2000) \text{ cm}^{-1}}$$

angeben können. Der mit $T_a = 7818$ berechnete D_0 -Wert ist gegenüber dem Fluoreszenzwert so viel zu gross, dass er nicht in Frage kommt.

Tabelle 7.

Untere Grenzwerte D_0 (in cm^{-1}) aus Fluoreszenzversuchen von POPOV							
Mole- kül	Q_a^a ($0^\circ K$) cm^{-1}	erreg. Linie ν_i (nach ⁸) u. ¹⁰) cm^{-1}	($A-X$) kurzw. Ende \AA	Deutg. ^c ν', ν''	$\nu_{fl} =$ $T_{0,0}$ $+ G'(\nu')$ cm^{-1}	$D_1 \leq$ $(\nu_i - \nu_{fl})$ $+ E_{th}^d$ cm^{-1}	$D_0 \geq$ $Q_a - (\nu_i - \nu_{fl})$ $- E_{th}$ cm^{-1}
$PbCl_2$	50700	49340 (Zn)	4100	13,1	24660	25680	25000
$PbBr_2$	44000	47600 (Zn) ^b	4433	11,0	22550	26150	17850
PbJ_2	34500	42980 (Fe)	4450	23,2	22900	21080	13400

a) Berechnet aus den normalen Bildungswärmen (Q_f) nach BICHOWSKY und ROSINI¹²) für $PbCl_2$ und $PbBr_2$ bzw. nach ROTH und BERTRAMS¹³) für PbJ_2 , aus den Sublimationswärmen nach KELLEY¹⁴) und aus den bekannten Dissoziationswärmen der Halogene¹⁵).

b) Stärkste Zn-Linie im kurzwelligen U.-V. (keine näheren Angaben bei ¹⁰)).

c) Bande (ν', ν'') die dem kurzwelligen Ende des in Fluoreszenz erregten Systems $A \rightarrow X$ am nächsten kommt.

d) Thermische Energie $E_{th} \sim 1000 \text{ cm}^{-1}$ bei $500^\circ C$.

Dasselbe gilt in vermehrtem Masse für PbJ , trotz der zufälligen Übereinstimmung des mit $T_a = 7817$ berechneten Wertes mit dem aus $G''(\nu)_{\max}$ extrapolierten Wert*). Bei alleiniger Berücksichtigung von $T_a = 10648$ erhalten wir zunächst nur die grobe Eingabelung $22900 > D_0 > 13500 \text{ cm}^{-1}$. Nun kann man aber aus den stark konvergierenden Schwingungsquanten des Terms A , welche bis $G'(27) = 2700 \text{ cm}^{-1}$ beobachtet sind (vgl. Tabelle 4), einen ziemlich genauen (vermutlich oberen) Grenzwert $D'_0(A) = 3290 \text{ cm}^{-1}$ extrapolieren. Aus der Gleichung

$D_0 = T_{0,0}(A) + D'_0(A) - T_a(A)$ erhält man, je nach dem Bleiterm 3P_2 , 3P_1 oder 3P_0 , der $T_a(A)$ zugeordnet wird, die drei Werte: 13160, 15990 oder 23810 cm^{-1} . Unter Berücksichtigung der oben

*) Dass dieser letztere Wert tatsächlich viel zu gross sein muss, ergibt sich aus einem Vergleich mit dem entsprechenden Wert für $PbBr$, der mehr als 4000 cm^{-1} kleiner ist.

angegebenen groben Eingabelung darf als wahrscheinlichster, ziemlich genauer (oberer) Grenzwert

$$\underline{D_0(PbJ) = 15990 \text{ cm}^{-1}}$$

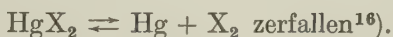
angesehen werden. Doch liegt auch der kleinere Wert 13160 cm^{-1} im Bereich der Möglichkeit.

Die Kenntnis möglichst genauer Dissoziationswerte für die Radikale PbX, zusammen mit der Kenntnis der Bildungswärmen der Moleküle PbX₂, bildet die Grundvoraussetzung für eine thermodynamische Berechnung der Dissoziationsgleichgewichte von PbX₂. Mit den hier abgeleiteten Daten ergibt sich, dass oberhalb etwa 1000°C PbX₂-Dampf (X = Cl, Br, J) überwiegend nach der Gleichung



zerfällt.

Vergleichshalber sei auf die Moleküle HgX₂ hingewiesen, die praktisch ausschliesslich nach der Gleichung



Die vorliegende Untersuchung ist in den Jahren 1947–49 im *Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Zürich* ausgeführt worden. Dem verstorbenen früheren Vorsteher Professor *H. von Halban* verdanken wir die Bereitstellung der Institutsmittel sowie sein freundliches Interesse. Die *Stiftung „Jubiläumsspende der Universität Zürich“* hat uns, wie früher schon, in grosszügiger Weise einen finanziellen Beitrag gewährt, aus welchem ein Hochfrequenzsender zur Erregung lichtschwacher Spektren gebaut werden konnte. Dafür sind wir dieser Stiftung, für die Konstruktion des bewährten Röhrensenders Herrn Professor *F. TANK* (ETH.) sowie seinem Assistenten Herrn *G. WEIBEL* zu bestem Dank verpflichtet. Dank schulden wir auch dem *Aluminium Fonds Neuhausen*, aus dessen Mitteln die benötigten elektrischen Öfen und Quarzapparaturen angeschafft werden konnten. Endlich möchten wir der wertvollen Hilfe gedenken, die uns aus kritischen Diskussionen mit Professor *E. MIESCHER* (Basel) erwachsen ist.

Literatur.

- ¹⁾ F. MORGAN, *Phys. Rev.* **49**, 47 (1936).
- ²⁾ G. D. ROCHESTER, *Proc. Roy. Soc. London* **153**, 407 (1936).
- ³⁾ G. D. ROCHESTER, *Proc. Roy. Soc. London* **167**, 567 (1938).

- ⁴⁾ Eine vorläufige Notiz findet sich in *Helv. Phys. Acta* **22**, 591 (1949).
 - ⁵⁾ K. BUTKOW, *Phys. Z. Sow.* **4**, 906 (1933).
 - ⁶⁾ P. SULZER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 531 (1950).
 - ⁷⁾ A. HERCZOG und K. WIELAND, *Helv. Phys. Acta* **21**, 6 (1948) und **22**, 552 (1949).
 - ⁸⁾ POPOV und NEUJMIN, *Phys. Z. Sow.* **2**, 394 (1932).
 - ⁹⁾ P. T. RAO, *Ind. I. Phys.* **23**, 321 (1949).
 - ¹⁰⁾ POPOV, *Acta Physicochem. URSS* **4**, 159 (1936).
 - ¹¹⁾ K. WIELAND, *Helv. Chim. Acta* **24**, 1285 (1941).
 - ¹²⁾ F. R. BICHOWSKY und F. D. ROSSINI, *Thermochemistry of Chemical Substances*, Reinhold Publ. Corp., New York (1936).
 - ¹³⁾ A. ROTH und BERTRAMS, *Z. phys. Chem.* **179**, 445 (1937).
 - ¹⁴⁾ K. K. KELLEY, U.S. Bureau of Mines (Washington), *Bull. Nr.* 383 (1935).
 - ¹⁵⁾ G. HERZBERG, *Spectra of Diatomic Molecules*, Von Nostrand Comp., New York (1950).
 - ¹⁶⁾ K. WIELAND und A. HERCZOG, *Helv. Chim. Acta* **32**, 889 (1949).
-

Distribution angulaire, dans le domaine des petits angles, de neutrons de 3,27 MeV diffusés par des deutons

par I. Hamouda et G. de Montmollin.

(Institut de physique de l'E.P.F. Zurich).

(21. XI. 1951.)

*Summary*¹⁾: We have investigated the angular distribution of 3.27 MeV (d, d)-neutrons scattered by protons and deuterons in the cloud chamber. 4,000 proton-recoils as well as 4,000 deuteron-recoils have been photographed and measured. The investigation covered the angular range of $\Theta = 18^\circ - 70^\circ$, where Θ = neutron scattering angle in C. M. system. The angular distribution of the neutron-proton scattering was found to be isotropic throughout the investigated angular range, which suggested the reliability of the measurements in the case of the neutron-deuteron scattering. The angular distribution data were made to join with the data of a former experiment to represent the angular distribution throughout the range from 18° to 180° . The experiment shows a pronounced maximum at 0° , a minimum around 90° and a smaller maximum at 180° .

Introduction.

La collision entre neutrons et deutons est un type relativement simple de diffusion qui donne la possibilité de mieux connaître la nature des forces nucléaires. En effet la grande dimension du deuton entraîne une intervention sensible de l'onde P , déjà pour une petite énergie du neutron incident (quelques MeV), l'interaction avec celui-ci étant plus importante que dans le cas de la collision neutron-proton. Ceci sans faire intervenir les forces dépendantes de la vitesse encore mal connues qui apparaîtraient pour les grandes énergies. D'autre part, l'étude de la diffusion (p-d), bien connue du point de vue expérimental, est plus compliquée que celle de la diffusion (n-d)²⁻⁵⁾.

Les expériences les plus importantes tendant à établir la distribution angulaire de neutrons d'énergie relativement petite (moins de 10 MeV) diffusés par des deutons ont été faites à la chambre de WILSON; citons les travaux de HAMOUDA, HALTER et SCHERRER en 1950⁶⁾ et de CAPLEHORN et RUNDLE en 1951⁷⁾. Ces deux travaux traitaient parallèlement la diffusion (n-p) comme contrôle de la méthode et leurs résultats concordent, mais ne renseignent pas sur

le comportement de la distribution angulaire *pour les petits angles de diffusion*. Les faibles parcours de recul pour ces angles-là rendent les mesures difficiles et inexactes avec les dispositions utilisées jusqu'ici. C'est pourtant dans ce domaine que la comparaison avec la théorie semble la plus intéressante.

En modifiant l'installation de HAMOUDA, HALTER et SCHERRER et en l'adaptant à la mesure des traces courtes, il nous a été possible de prolonger jusqu'à $\Theta = 18^\circ$ la courbe précédemment établie par ces auteurs entre 180° et 60° . (Θ est l'angle mesuré dans le système de coordonnées lié au centre de gravité.) L'extrapolation au voisinage de 0° est alors moins aléatoire. La vérification de l'isotropie de la distribution angulaire de neutrons diffusés par des protons dans les mêmes conditions, devait nous permettre de justifier les méthodes de mesure. C'est pourquoi les deux expériences ont été menées parallèlement et les mesures portèrent sur 4000 deutons et 4000 protons diffusés.

Description des appareils.

1. Disposition générale.

L'injection de neutrons (d, d) était produite par déviation des deutons accélérés sur la cible (target) de glace d'eau lourde, comme cela avait été réalisé par HAMOUDA, HALTER et SCHERRER⁶). Nous utilisons le même accélérateur et la même tension d'accélération (600 keV). La chambre de WILSON placée sous la cible comme le montre la figure 1, recevait la composante verticale de 3,27 MeV du faisceau de neutrons, symétrique par rapport à la direction des deutons incidents de la composante horizontale utilisée par HAMOUDA, HALTER et SCHERRER. La distance de 50 cm de la source au milieu de la chambre à détente était la même que dans le cas de l'irradiation horizontale.

La figure 1 montre également les deux appareils photographiques situés de part et d'autre de la source et dont les axes des objectifs forment un angle de 15° avec la direction verticale des neutrons, disposition que nous avons spécialement choisie pour faciliter la stéréographie dans leur vraies grandeurs des petites traces fortement diffusées. Nous avons utilisé du film de 35 mm de large Gevaert Panchromosa, 32° Sch.

Une décharge de 2 kV dans un tube au krypton SF₄, alimentée par un condensateur de 128 μ F de capacité, éclairait fortement la chambre de WILSON et permettait de diaphragmer suffisamment les

objectifs des appareils photographiques pour obtenir la profondeur de champ nécessaire.

La chambre utilisée était rectangulaire et avait les dimensions intérieures: $50 \times 25 \times 10$ cm. On n'en photographiait que la partie centrale de 25×25 cm. On verra plus loin que seules furent mesurées les traces situées entièrement à l'intérieur d'un cône tronqué de diamètre moyen égal à 20 cm et de hauteur inférieur à celle de la chambre de WILSON.

Pour l'étude de la diffusion (n—d), la chambre ne contenait que du deutérium, avec la quantité d'alcool et d'eau lourde nécessaire

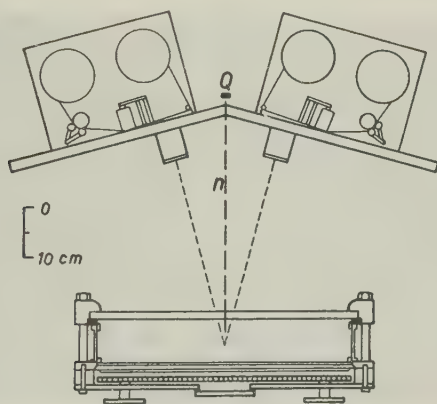


Fig. 1.

Chambre de WILSON avec les appareils photographiques et la source de neutrons Q . Les distances sont données par l'échelle. La ligne n représente la direction du faisceau des neutrons (d, d) incidents de 3,27 MeV. Les axes des objectifs forment un angle de 30° et sont dans le plan passant par n et le grand axe de la chambre de WILSON.

à la formation du brouillard, à la pression de 1,4 atm. environ avant l'expansion et de 1,2 atm. après l'expansion; à cette pression, le pouvoir d'arrêt calculé d'après LIVINGSTON et BETHE⁸⁾ était de 0,27 environ et permettait aux deutons de recul, diffusés suivant un angle $\alpha = 83^\circ$ d'avoir encore un parcours de 3 mm (α est l'angle mesuré dans le système de coordonnées lié au laboratoire).

Dans le cas de la diffusion (n—p), il était nécessaire que les protons aient pour chaque angle le même parcours que les deutons afin que les conditions soient pareilles. Le pouvoir d'arrêt du mélange gazeux composé d'hydrogène additionné de 7% d'argon était de 0,40 à 1,2 atm. de pression. Cette valeur calculée pour des protons projetés à 60° ne remplissait plus exactement la condition au voisinage de 50° ; de 60° à 90° par contre, les parcours des protons et des

deutons étaient identiques. D'autre part la pureté des deux sortes d'hydrogène était suffisante pour que le pouvoir d'arrêt soit bien déterminé dans les deux cas.

Le couplage de l'expansion et de l'injection était réalisé par un dispositif électronique de façon à ce que l'expansion précède l'injection et qu'il n'apparaissent pas de vieilles traces. L'éclairage était commandé par un relais à retardement magnétique. L'intervalle de 45 secondes entre les expansions était réglé par un interrupteur automatique commandant également l'avancement des films dans les appareils photographiques.

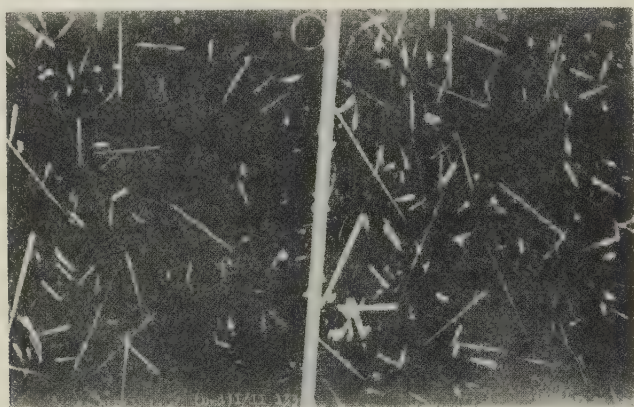


Fig. 2.

Vue stéréographique de deutons de recul. Les neutrons incidents viennent perpendiculairement à la feuille, d'en haut.

2. L'appareil de mesure.

(Voir fig. 3.)

Etant donné le très grand nombre de traces à mesurer, il était utile de disposer d'un appareil de mesure d'un maniement facile et rapide, permettant la lecture simultanée de l'angle de diffusion et du parcours de recul. L'appareil construit par HAMOUDA, HALTER et SCHERRER présentait ces avantages, nous en avons repris le principe.

Les deux appareils photographiques *K* qui sont exactement dans la même position relative que lors des prises de vues et dont les films sont spécialement fixés, servent d'appareils de projection et l'écran *S*, orientable, qui se déplace dans tout l'espace virtuel occupé précédemment par la partie utile de la chambre de WILSON, reçoit

les deux projections de la trace à mesurer. Il suffit de modifier la position du plan pour que les deux projections se superposent; l'image ainsi obtenue est la reproduction en vraie grandeur de la trace.

Pour faciliter les mesures, les deux projections sont de couleurs différentes; rouge et verte. Leurs origines sont amenées à coïncider

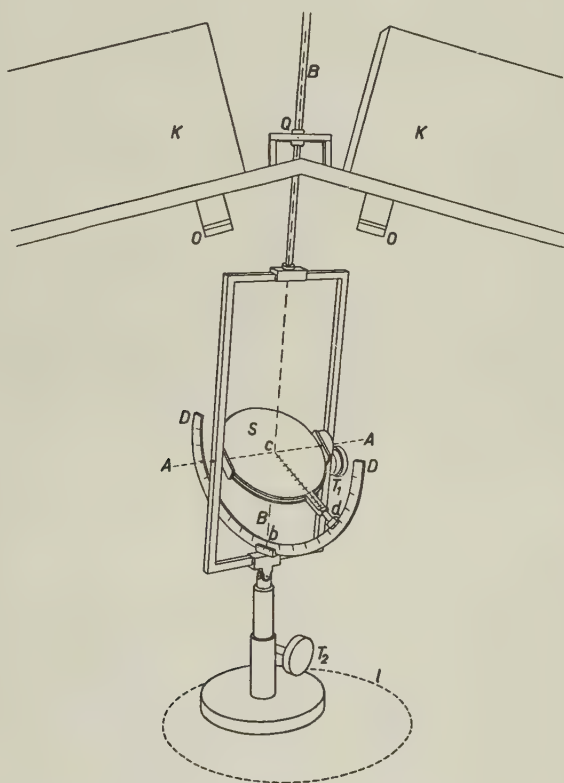


Fig. 3.

Voir les explications dans le texte.

au centre c de l'écran S , par une translation horizontale du pied télescopique et une modification de la hauteur commandée par la poignée T_2 . Le point c est donc à l'extrémité supérieure de la trace, à l'endroit où la diffusion (n-d) ou (n-p) s'était produite. En effet, la source des neutrons Q est représentée par un anneau monté sur un cardan dans lequel coulisse l'axe B . La droite BB est la direction du neutron passant par le centre c de l'écran. En modifiant avec

la poignée T_1 l'inclinaison de l'écran autour de son axe AA , donc sans déplacer le point c , on parvient à faire coïncider les deux projections et on obtient ainsi la trace en vraie grandeur. Une poignée placée sous l'écran permet de superposer la droite cd , graduée en cm, à la trace, la position du plan restant inchangée. La longueur de la trace est alors directement mesurée sur cette droite graduée, à partir de c , ainsi que l'angle de diffusion bd qui est bien l'angle formé par la direction du neutron incident BB et la direction de recul cd . L'arc métallique DD pivote autour de l'axe BB , étant entraîné par le curseur c ; il est gradué à partir de $b = 0$ jusqu'à 90° ; dans notre cas, seule la branche antérieure est utilisée. Le cadre de support est en général perpendiculaire au plan formé par les objectifs O et le centre c , mais peut tourner autour de l'axe BB , pour permettre la lecture de toutes les traces.

Seules étaient mesurées les traces qui n'avaient touché ni le couvercle de verre, ni le fond de la chambre de WILSON et les distances de leur origine et de leur extrémité à l'axe vertical de la chambre ne devaient pas excéder 10 cm. A cet effet, le déplacement du centre c de l'écran était limité verticalement par la course du tube télescopique et horizontalement en maintenant le pied de l'appareil à l'intérieur du cercle limite l .

Les mesures.

Le gros avantage de la chambre de WILSON dans une expérience de diffusion telle que celle traitée ici est de pouvoir mesurer à la fois l'angle de diffusion et le parcours de la particule de recul qui est fonction de son énergie et du pouvoir d'arrêt du gaz dans lequel elle se déplace. Théoriquement, un seul des paramètres cités, l'angle par exemple, suffirait à définir le parcours de recul en direction et en longueur. La mesure d'un deuxième paramètre permet d'éliminer presque toutes les traces provenant de neutrons réfléchis. A cet effet, on représente sur un diagramme chaque trace par un point dont l'abscisse est l'angle de diffusion et l'ordonnée le parcours (fig. 4 et 5).

La relation entre l'énergie E_n du neutron incident et l'énergie E_r de la particule de recul de masse m_r se déduit des lois de conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie :

$$E_r = \frac{4 m_r}{(m_r + 1)^2} E_n \cos^2 \alpha$$

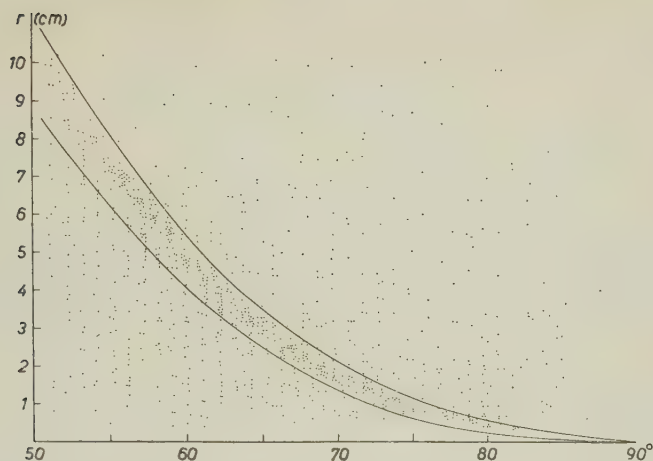


Fig. 4.

Représentation des 1000 premiers parcours de protons de recul mesurés. On a en abscisse l'angle formé par la direction du neutron incident et la trace de recul dans le système de coordonnées du laboratoire. Le parcours de chaque particule est reporté en ordonnée.

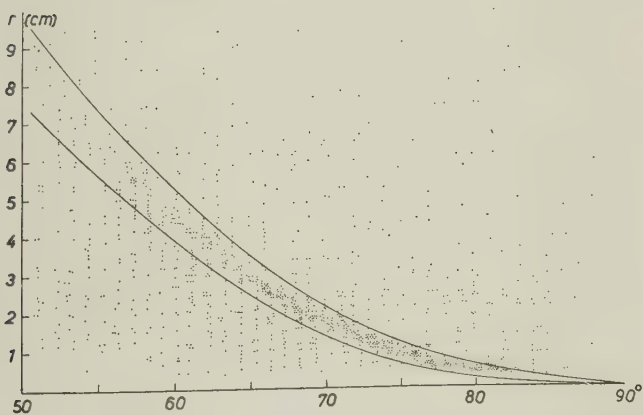


Fig. 5.

Représentation des 1000 premiers parcours de deutons de recul mesurés et reportés comme les protons sur le diagramme précédent. On remarque que la largeur de la bande de mesure est pour chaque angle la même que dans le cas de la diffusion (n—p). Par contre, les parcours pour les angles inférieurs à 60° sont un peu plus petits que les parcours correspondants des protons.

où α est l'angle formé par la direction du neutron incident et le parcours de recul. Pour un proton $m_r = 1$

$$E_p = E_n \cos^2 \alpha$$

et pour un deuton $m_r = 2$

$$E_d = 8/9 E_n \cos^2 \alpha$$

LIVINGSTON et BETHE⁸⁾ donnent le parcours des deutons ou des protons dans l'air en fonction de l'énergie et la variation du pouvoir d'arrêt de l'hydrogène en fonction du parcours de la particule.

Tous les points des figures 4 et 5 devraient se répartir sur une courbe calculable d'après ces données. En réalité, ils sont dispersés sur tout le diagramme, mais forment une zone de forte concentration utilisable pour la statistique, comme c'est expliqué dans le travail de HAMOUDA, HALTER et SCHERRER⁶⁾. La largeur de cette bande diminue quand l'angle de diffusion augmente. En effet, les fluctuations de l'énergie des neutrons et de la densité du gaz créent des variations absolues de parcours décroissantes avec la longueur de ces derniers.

Les courbes limitant avec précision la bande de mesure ont été choisies pour la diffusion (n—p) de façon qu'elles soient symétriques par rapport à la courbe théorique et qu'elles contiennent la zone de forte concentration. Ce choix s'est révélé judicieux, car nous avons obtenu, en ne tenant compte que des points de cette bande, une répartition isotrope de la diffusion (n—p) dans un grand domaine angulaire. Pour la diffusion (n—d), nous avons évidemment repris une bande ayant les mêmes largeurs. Comme nous l'avons signalé plus haut, les courbes théoriques des deux genres de diffusion ne se superposent plus à 50°, le pouvoir d'arrêt des gaz ayant été calculé pour les petits parcours.

Les points répartis en dehors des bandes proviennent des neutrons réfléchis et n'entrent pas dans nos calculs. On élimine ainsi presque toutes les traces indésirables; il est évident que certaines d'entre elles figurent quand même dans ces bandes, mais elles ne semblent pas avoir une influence si on se réfère à la diffusion (n—p).

Pour obtenir le nombre de neutrons diffusés sous chaque angle θ , dans le système de coordonnées lié au centre de gravité, nous devons compter le nombre de traces de recul dans des intervalles égaux de $\cos 2\alpha = |\cos \theta|$. Nous avons choisi ces intervalles tels que $\cos 2\alpha$ varie pour chacun d'eux de 0,1, mais comme nous mesurons l'angle α au degré près, chaque intervalle doit recouvrir un nombre

entier de degrés et par conséquent ne répond plus exactement à la condition :

$$\cos 2\alpha - \cos [2\alpha + \Delta(\alpha)] = 0,1$$

où $\Delta(\alpha)$ est l'intervalle en degrés correspondant à l'angle α . Pour atténuer les fluctuations qui résulteraient inévitablement de cette inexactitude, si on avait simplement juxtaposé ces intervalles, nous les avons choisis tels qu'ils se superposent l'un l'autre sur les 4/5 de leur largeur. Chacun de ces intervalles débutait à l'endroit où la valeur de $\cos 2\alpha$ était de 0,02 plus grande qu'à l'origine du précédent. Ensuite, nous avons groupé les résultats de trois intervalles successifs en prenant leur moyenne. C'est ces résultats qui

Table 1.

Intervalles		Θ	(n-p)		(n-d)	
N ^o	$-\cos 2\alpha$		N	\bar{N}	N	\bar{N}
1	0,34—0,44	64°	357 ± 19	314 ± 18	138 ± 12	132 ± 12
2	0,36—0,46		294 ± 17		117 ± 11	
3	0,38—0,48		292 ± 17		141 ± 12	
4	0,40—0,50		382 ± 20		191 ± 14	
5	0,42—0,52	60°	276 ± 17	309 ± 18	150 ± 12	164 ± 13
6	0,44—0,54		270 ± 16		150 ± 12	
7	0,46—0,56		363 ± 19		210 ± 14	
8	0,48—0,58		273 ± 17		160 ± 13	
9	0,50—0,60	56°	265 ± 16	300 ± 17	207 ± 14	192 ± 14
10	0,52—0,62		256 ± 19		267 ± 16	
11	0,54—0,64		342 ± 18		248 ± 16	
12	0,56—0,66		249 ± 16		188 ± 14	
13	0,58—0,68	50°	326 ± 18	316 ± 18	273 ± 17	234 ± 15
14	0,60—0,70		328 ± 18		306 ± 17	
15	0,62—0,72		307 ± 18		327 ± 18	
16	0,64—0,74		307 ± 18		327 ± 18	
17	0,66—0,76	46°	309 ± 18	320 ± 18	339 ± 18	336 ± 18
18	0,68—0,78		315 ± 18		343 ± 19	
19	0,70—0,80		290 ± 17		332 ± 18	
20	0,72—0,82		284 ± 17		354 ± 19	
21	0,74—0,84	42°	345 ± 19	310 ± 18	449 ± 21	378 ± 19
22	0,76—0,86		326 ± 18		465 ± 22	
23	0,78—0,88		301 ± 17		477 ± 22	
24	0,80—0,90		335 ± 18		600 ± 24	
25	0,82—0,92	36°	323 ± 18	320 ± 18	601 ± 25	514 ± 23
26	0,84—0,94		352 ± 19		696 ± 26	
27	0,86—0,96		295 ± 17		650 ± 25	

sont représentés par les points noirs de la figure 6. Les points blancs étant les résultats de HAMOUDA, HALTER et SCHERRER⁶).

En définitive, seuls les points compris dans les bandes définies plus haut et représentés sur les figures 4 et 5 ont servi à la statistique

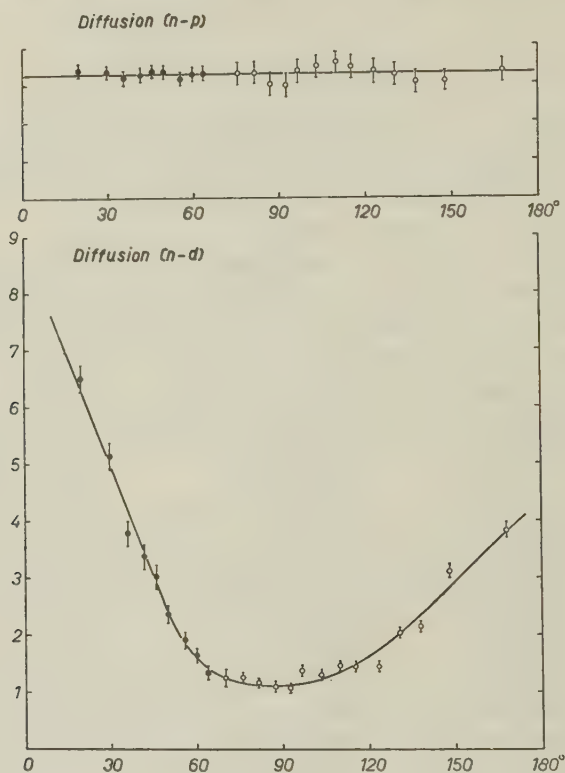


Fig. 6.

Distributions angulaires de neutrons (d,d) de 3,27 MeV diffusés par des protons (courbe du haut) et par des deutons (courbe du bas), dans le système du c. d. g. La section efficace différentielle est reportée en ordonnée dans des unités arbitraires. $\bar{\square}$ sont les résultats obtenus par HAMOUDA, HALTER et SCHERRER, \square représentent les résultats établis d'après nos mesures faites sur 4000 protons et 4000 deutons de recul.

après avoir été dénombrés par le système d'intervalles. Cette statistique est basée pour chacun des deux genres de diffusion sur 4000 traces reportées sur quatre diagrammes semblables à ceux représentés par les figures 4 et 5 qui se rapportent aux mille premières traces mesurées. Les 8000 mesures ont été faites avec l'appareil décrit précédemment.

Les résultats sont groupés dans la table ci-dessous et ont été reportés ensuite sur la figure 6 où on a en abscisse l'angle de diffusion dans le système du centre de gravité et en ordonnée le nombre relatif de neutrons diffusés pour chaque Θ .

La première colonne donne le numéro d'ordre des intervalles répartis de 55° à 82° dans le système du laboratoire. La seconde colonne donne les variations de $\cos 2\alpha$ pour chaque intervalle. Θ est l'angle pour lequel le nombre de neutrons diffusés est calculé. N est le nombre de traces comptées dans l'intervalle correspondant avec l'erreur statistique. \bar{N} est la moyenne des valeurs précédentes établie sur trois intervalles.

Discussion des résultats.

Etant donné l'isotropie remarquable de la répartition angulaire de la diffusion (n-p), il n'a pas été nécessaire de faire des corrections pour la diffusion (n-d).

Nous avons raccordé sur la figure 6, les résultats de HAMOUDA, HALTER et SCHERRER aux nôtres ce qui donne la distribution angulaire de la diffusion (n-d) de 180° à 18° . *L'extrapolation qui reste à faire de 18° à 0° est mieux définie et il est indubitable que ce maximum est plus prononcé que celui apparaissant à 180° , donc qu'il y a plus de neutrons diffusés vers l'avant que vers l'arrière.*

De tous les travaux expérimentaux parus jusqu'à ce jour, aucun, à notre connaissance, ne se rapporte à la diffusion (n-d) dans le domaine des petits angles, à l'exception de celui de CAPLEHORN et RUNDLE⁷⁾ effectué également à la chambre de WILSON avec un gaz de faible pouvoir d'arrêt et pour des neutrons (d, d) de 3 MeV d'énergie. Les résultats certains que donnent ces auteurs ne s'étendent pas au-dessous de $\Theta = 40^\circ$, mais jusque là ils correspondent aux nôtres de façon satisfaisante.

Par contre, la distribution angulaire que nous avons obtenue ne s'accorde avec aucune des deux distributions calculées par MASSEY et BUCKINGHAM³⁾ pour une énergie de 2,5 MeV. Le désaccord est plus marqué pour la distribution où la force d'échange a été prise en considération, d'autant plus que ces mêmes auteurs signalent qu'en tenant compte, dans les calculs, de l'onde D, le maximum à 180° tend à être augmenté par rapport au maximum à 0° ⁹⁾.

VERDE a donné les calculs numériques pour la distribution angulaire à 200 MeV⁴⁾ et il signale qu'en général le fait d'avoir le maximum le plus prononcé à 0° est contraire aux propriétés caractéristiques de la théorie symétrique.

Nous pensons qu'il est prématuré de vouloir tirer des conclusions théoriques de ces résultats expérimentaux, car aucune théorie ne tient compte du couplage spin-orbite.

C'est avec plaisir que nous remercions ici vivement Monsieur le Professeur Dr. P. SCHERRER pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses précieux conseils.

Bibliographie.

- ¹⁾ I. HAMOUDA et G. DE MONTMOLLIN, Phys. Rev. **83**, 1277 (1951).
 - ²⁾ R. A. BUCKINGHAM et H. S. MASSEY, Proc. Roy. Soc. A **179**, 123 (1941).
 - ³⁾ H. S. MASSEY et R. A. BUCKINGHAM, Phys. Rev. **71**, 558 (1947).
 - ⁴⁾ M. VERDE, Helv. Phys. Acta **22**, 339 (1949).
 - ⁵⁾ A. TROESCH et M. VERDE, Helv. Phys. Acta **24**, 39 (1951).
 - ⁶⁾ I. HAMOUDA, J. HALTER et P. SCHERRER, Phys. Rev. **79**, 539 (1950); Helv. Phys. Acta **24**, 217 (1951).
 - ⁷⁾ W. F. CAPLEHORN et G. P. RUNDLE, Proc. Phys. Soc. **64**, 546 (1951).
 - ⁸⁾ M. S. LIVINGSTON et H. A. BETHE, Rev. Mod. Phys. **9**, 268 et 274 (1937).
 - ⁹⁾ MARTIN, BURHOP, ALCOCK et BOYD, Proc. Phys. Soc. **64A**, 884 (1950). (Voir note ajoutée par BUCKINGHAM.)
-

Untersuchung der Reaktion $B^{10}(n, \alpha)Li^7$ mit Neutronen verschiedener Energien

von H. Blehse, W. Hälg, P. Huber und A. Stebler

Physikalische Anstalt der Universität Basel.

(5. IX. 1951.)

1. Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wurde das Verzweungsverhältnis K der $B^{10}(n, \alpha)Li^7$ Reaktion für den Übergang in den Grundzustand bzw. in das 478,5 keV-Niveau*) des Lithiumendkernes im Energiegebiet 0—4 MeV gemessen. Für thermische Neutronen ist das Verzweungsverhältnis bereits mehrfach bestimmt worden¹⁾. Seine Abhängigkeit von der Neutronenenergie zu kennen ist für das Verständnis von Kernübergängen wertvoll.

Sodann befasst sich die Arbeit mit der Bestimmung von Energietönungen. Es wird dabei eingegangen auf die Genauigkeit der Ionisationskammermethode für die Messung von Q -Werten.

2. Registriereinrichtung.

Die Registrierung der Kernreaktionen erfolgt im wesentlichen mit der früher beschriebenen Einrichtung²⁾.

Die Reaktionen werden im Füllgas einer Ionisationskammer ausgeführt. Die durch Ionisation des Gases erzeugten Ladungen werden in einem elektrischen Feld von maximal 12 kV/cm gesammelt, proportional verstärkt und in einem Impulsspektrographen nach Grösse und Anzahl sortiert. Verstärkungsgrad und Linearität des Verstärkers werden durch Influenzladungen kontrolliert.

2.1. Impulsspektrograph.

In den Publikationen über den photographischen Impulsspektrographen³⁾⁴⁾ wurde bisher nichts über die Genauigkeit der Energiemessung ausgeführt, weshalb es hier angebracht ist, darauf einzutreten.

Im Impulsspektrographen erzeugt der verstärkte Ionisationskammerimpuls eine ihm proportionale horizontale Ablenkung des

*) Angeregte Kerne seien mit * bezeichnet, z. B. Li^* .

Elektronenstrahles einer Braunschen Röhre. Es folgt eine von der Impulsgrösse unabhängige vertikale Ablenkung, so dass jeder Impuls als ein vertikaler Strich auf dem Schirm der Röhre erscheint. Der zentrale Teil des Leuchtschirms (ungefähr die halbe Fläche) wird mit einem Graukeil abgedeckt, und der ganze Leuchtschirm optisch auf eine Photoplatte abgebildet. Die Änderung der Schwärzung auf der Photoplatte ist ungefähr proportional dem Logarithmus der Anzahl Impulse und der Dichte des Graukeils. Mit Testversuchen wurde der genaue Zusammenhang zwischen Impulszahl und Schwärzung bestimmt. Ihre Auswertung ergibt, dass absolute Impulszahlen mit einem mittleren quadratischen Fehler von $\pm 15\%$ bestimmt werden können (er rührt vor allem von der Reproduzierbarkeit der Plattenentwicklung her).

Das Verhältnis der Impulszahlen von zwei Impulsgruppen auf derselben Platte wird vor allem durch die Ungleichmässigkeit der Plattenentwicklung beeinflusst. Die Messung mit Testgruppen ergibt dafür einen Fehler von $\pm 10\%$.

Vor der Photoplatte wird zu beiden Seiten des Spektrums eine horizontale, 5 mm breite Blende angebracht, wodurch ein Teil der Platte während der Messung unbelichtet bleibt. Am Anfang und Ende der Messung werden auf diese unbelichteten Stellen mit Hilfe von Influenzladungen Eichmarken gegeben. Die Verbindungsgeraden dieser Eichmarken geben den Lauf des Elektronenstrahles der Braunschen Röhre, und durch lineare Interpolation zwischen diesen Geraden lassen sich die Ladungen der gemessenen Impulsgruppen bestimmen (Figur 1)*).

Als Dispersion lässt sich wie in der Spektroskopie die Grösse Ladungsmenge pro Längeneinheit $D = \delta Q / \delta l$ definieren. Sie hängt von der Verstärkung ab.

Die Genauigkeit der Ladungsmessung wird experimentell für verschiedene Dispersionen bestimmt:

a) Die Reaktion $B(n, \alpha)Li$ wird mit Neutronen der Energie $E_n = 2,9$ MeV bei der Dispersion $D_1 = 5 \cdot 10^{-15}$ Coulomb/cm gemessen. Es werden 16 Aufnahmen mit je 100 Impulsen gemacht. Der mittlere Fehler des Maximums der Einzelaufnahme beträgt $\pm 0,45\%$.

b) Die Reaktion $B(n, \alpha)Li^*$ mit thermischen Neutronen ergibt bei $D_2 = 2 \cdot 10^{-15}$ Coulomb/cm aus 20 Messungen mit je 500 Impulsen als mittleren Fehler der Einzelaufnahme $\pm 0,23\%$.

c) Die Alphateilchen von U^{238} in Stickstoff gemessen mit je 400 Impulsen ergeben bei $D_3 = 10^{-15}$ Coulomb/cm als mittleren Fehler der Einzelmessung $\pm 0,1\%$.

*) Für die Bildkrümmungsfehler wird korrigiert.

Diese Fehler werden durch die Inkonzanz der gesamten Apparatur, durch statistische Schwankungen der Impulsgruppen, die Ungenauigkeit der Plattenvermessung und durch Verzerrungen des photographischen Bildes beim Entwickeln und Kopieren erzeugt. Für absolute Ladungsmessungen kommt noch der Fehler der Influenzladungen dazu (0,6%).

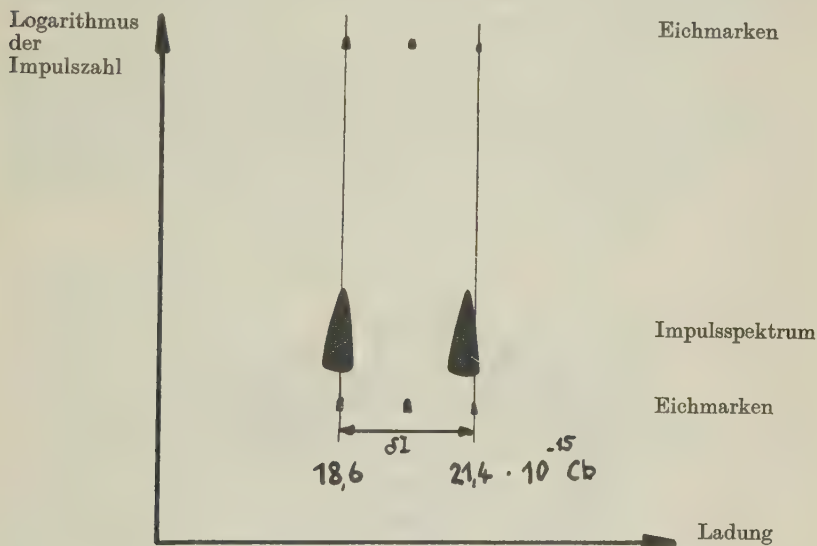


Fig. 1.

Impulsspektrum der Alphateilchen von U^{238} und U^{234} . Die Figur ist die zweite Kopie einer Aufnahme. Es sind die Verbindungsgeraden der Eichmarken eingezeichnet und die zugehörigen Ladungen angeschrieben.

2.2. Verstärker.

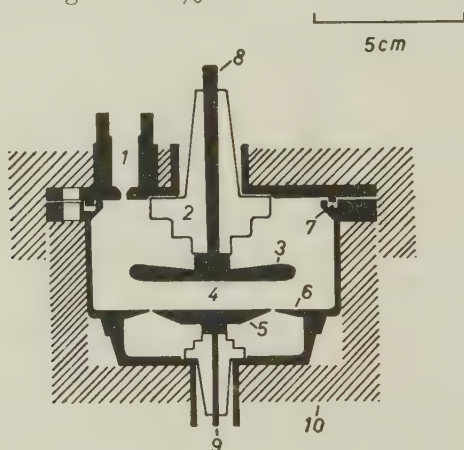
Es wird der schon früher beschriebene Verstärker mit einigen Verbesserungen verwendet⁵⁾. Um stabileres Arbeiten zu erreichen, wird auch die erste Stufe gegengekoppelt; ihre Speisespannungen werden aus Netzgeräten entnommen. Die Schwankungen des Verstärkungsgrades überschreiten während Wochen 1% nicht. Der Verstärker enthält zwei RC -Filter, von denen das eine die tiefen und das andere die hohen Frequenzen beschneidet. Sind beide Filter geöffnet, so ist die untere Grenzfrequenz ungefähr 5 Hz, die obere zirka 8000 Hz. Das beste Verhältnis von Nutzsignal und Verstärkeruntergrund wird erreicht, wenn die Zeitkonstanten der beiden Filter einander gleich sind⁶⁾. Bei ballistischer Messung muss

die Laufzeit t_s der positiven Ionen*) klein sein gegenüber dieser Zeitkonstanten. Da t_s der Ionen, die im Füllgas der Kammer entstehen, im Mittel etwas grösser ist als diejenige der Ionen, die durch eine Reaktion aus einer Schicht auf der negativen Platte entstehen, werden die Ausgangsimpulse der Reaktion im Gas bei einer Verkleinerung von RC etwas schneller abnehmen, als diejenigen der Schichtreaktion. Die experimentelle Untersuchung zeigt, dass dieser Effekt weniger als 0,1 % Einfluss hat.

2.3. Ionisationskammer.

Als Ionisationskammer dient ein Parallelplattenkondensator mit Schutzring. Dimensionen und Einzelheiten sind in Fig. 2 angegeben.

Die Plattendistanz ändert sich nach mehrmaligem öffnen und Schliessen um weniger als 1 %.



Figur 2.

Ionisationskammer.

- | | |
|--|--|
| 1. Nadelventil. | 6. Schutzring. |
| 2. Hochspannungsisolator aus Steatit (mit Araldit gekittet). | 7. Bleidichtung. |
| 3. Hochspannungsplatte (positiv). | 8. Hochspannungsdurchfuhrung (mit aufschraubbarem Stecker). |
| 4. Zählvolumen. | 9. Durchführung zum Verstärker. |
| 5. Auffangerplatte. | 10. Bormantel. |

Da die keramischen Isolatoren durch BF_3 angegriffen werden und die Isolation auf 10^9 Ohm absinkt, werden sie mit Plicene**) überzogen, wodurch die Isolation 10^{12} Ohm bleibt.

Die Korrosion des Eisens bei BF_3 -Füllung wird durch Vergoldung der Ionisationskammer vermieden.

*) Die negativen Ladungen sind zur Hauptsache Elektronen, deren Laufzeit rund tausendmal kleiner ist als t_s .

**) Ein Pizein-ähnlicher Stoff der Central Scientific Company.

2.4. *Bormantel.*

Um die Reaktion schneller Neutronen mit Bor zu messen, müssen vor allem die thermischen Neutronen vom Zählvolumen ferngehalten werden. Für Bor ist der Wirkungsquerschnitt für thermische Neutronen 10^4 mal grösser als für Neutronen mit der Energie 3 MeV. Wenn also nur 1% thermische Neutronen neben den schnellen Neutronen auftreten, ist es bei Ionensammlung und vernünftiger Aufnahmedauer (z. B. 1 h) bereits sehr schwierig, schnelle Neutronenreaktionen zu registrieren. Im vorliegenden Fall wird ein Bormantel mit einer Dicke von $1,2 \text{ g/cm}^2$ rund um die Ionisationskammer angebracht, wodurch die Zahl der thermischen Neutronen zwanzigmal reduziert wird.

2.5. *Füllungen der Ionisationskammer.*

Die Füllung der Ionisationskammer muss folgenden Bedingungen genügen:

a) Die Reichweite r_0 der Reaktionsprodukte muss genügend klein sein, so dass die Impulsgruppen durch den Randeffect nicht stark verschmiert werden.

b) Die Ladungsverluste zufolge Rekombination und Laufzeit der Ionen (Sättigungsdefizite) dürfen nicht zu gross werden; im vorliegenden Fall ist bei der höchsten auftretenden elektrischen Feldstärke zirka 10% noch zulässig.

Das Zählvolumen der Ionisationskammer ist ein Zylinder von $R = 2 \text{ cm}$ Radius und $d = 1 \text{ cm}$ Höhe. Nach ROSSI und STAUB⁷⁾ ergibt sich als Näherung für den Randeffect in Prozent die Formel

$$e = 100 r_0 \left(\frac{1}{2d} + \frac{1}{R} \right).$$

Der erste Summand bedeutet den Anteil der parallelen Platten, der zweite gibt den Anteil durch die Zylinderwand an.

Bei einer Gesamtenergie von 6,6 MeV der Endprodukte der Reaktion $B(n, \alpha) Li$ (Neutronenenergie 3,9 MeV) beträgt die Summe der Reichweiten der Bruchstücke in Normalluft 4,3 cm. Damit $e \leq 40\%$, d. h. $r_0 \leq 0,4 \text{ cm}$ ist, muss ein Gas verwendet werden, dessen Bremsvermögen demjenigen von 10 ata Luft entspricht. Für reines BF_3 gibt dies eine Füllung von 6 ata. Experimentell wurde nun festgestellt, dass bei einem so hohen BF_3 -Druck das Sättigungsdefizit etwa 30% beträgt. Dadurch werden die Impulsgruppen von Uranalphateilchen bereits so stark verschmiert, dass eine genaue Messung unmöglich wird (Fig. 3a).

Zum Vergleich gibt Figur 3b die Messung in 5 ata N_2 , wo nur ein Sättigungsdefizit von 0,5% auftritt.

Es ist also notwendig zur Verkleinerung der Reichweite dem BF_3 ein Edelgas als Bremssubstanz beizumischen.

Verwendet wurden Mischungen von 1 ata BF_3 + 9 ata A und 0,5 ata BF_3 + 4,5 ata Kr. Der Randeffekt beträgt für die erste Füllung ($40 \pm 15\%$), für die zweite ist er etwas höher. Die vom Randeffekt berührten Impulse verteilen sich unter der Annahme, dass die Ionendichte entlang der Spur homogen ist, gleichmässig auf das ganze Intervall von 0–6,6 MeV. Bei einer Halbwertsbreite der Impulsgruppe von 0,3 MeV wird somit die mittlere Höhe der durch



Fig. 3a.



Fig. 3b.

Impulsspektrum der Alphateilchen von U^{238} und U^{234} bei einer Ionisationskammerfullung von

a) 5 ata BF_3

b) 5 ata N_2 .

den Randeffekt überdeckten Fläche nur 3% der Höhe der Impulsgruppe. Die Beeinflussung der Impulszahlmessungen durch den Randeffekt kann vernachlässigt werden, da ihre Genauigkeit stets schlechter als 10% ist.

Bei den Impulsgruppen mit kleineren Energien wird der Randeffekt pro Energieintervall noch kleiner, da die Reichweite schneller abnimmt als die Energie.

Die Sättigungseigenschaften wurden genauer untersucht. Im 6. Abschnitt werden folgende Verhältnisse von Ladungen gebraucht:

$$s/q$$

$$p/q$$

s ist die durch die Endprodukte der Reaktion $\text{B}(n, \alpha)\text{Li}$ mit schnellen Neutronen erzeugte Ladung, p diejenige der Alphateilchen des U^{238} und q entsteht durch die Reaktion $\text{B}(n, \alpha)\text{Li}^*$ mit thermischen Neutronen.

s und q werden bei sonst gleichen Bedingungen und konstantem Durchlassbereich des Verstärkers in der mit 1 ata BF_3 + 9 ata A

gefüllten Ionisationskammer mit variabler elektrischer Feldstärke E gemessen. Das Resultat ist in Figur 4 dargestellt. Die Ladungen, in einem relativen Maßstab, sind als Funktion von $1/E$ aufgetragen.

In erster Näherung kann nach der Jafféschen Theorie angenommen werden, dass die Ladungen zu $1/E$ proportional sind, so dass für die Feldstärke unendlich die Werte der Ladungen durch

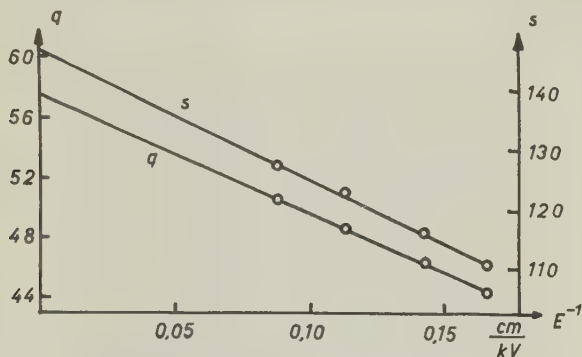


Fig. 4.

Sättigungskurve: Ladung (in relativem Maßstab) in Funktion der Feldstärke E . q ist die Ladung, die durch die Reaktion $B(n, \alpha) Li^*$ mit thermischen Neutronen, s diejenige, die durch $B(n, \alpha) Li$ mit schnellen Neutronen erzeugt wird.

eine Gerade extrapoliert werden können. Figur 4 zeigt, dass diese Näherung der Jafféschen Theorie hier zutreffend ist. Beim extrapolierten Wert ist s/q um $(1,2 \pm 0,4\%)$ grösser als bei $E = 11$ kV/cm.

Die Ladungen p und q werden bei einer Füllung von 0,5 ata BF_3 + 4,5 ata A auf gleiche Weise wie oben gemessen. Das Sättigungsdefizit beträgt bei einer Feldstärke von 11 kV/cm nur 0,4%. Eine Änderung des Verhältnisses für Feldstärken von 4–11 kV/cm ist nicht messbar.

Das BF_3 wird einer Druckflasche entnommen (Produkt der Ohio Chemical and Mfg. Co.) und durch mehrmalige fraktionierte Destillation gereinigt.

3. Die Hochspannungsanlage.

Für die Beschleunigung der Deuteronen benutzten wir einen Kaskadengenerator von 1 MV. Da solche Anlagen bereits mehrfach beschrieben worden sind, sollen hier nur einige spezielle Daten unserer Maschine wiedergegeben werden. Die Apparatur besteht aus dem Hochspannungsgleichrichter, dem Beschleunigungsrohr, der Ionenquelle, dem Pumpsystem und der Steueranlage (Fig. 5).

3.1. Der Hochspannungsgleichrichter*).

Er ist aus sechs Spannungsverdopplungsstufen aufgebaut, unter Verwendung von Quecksilberdampfventilen von Philips für 200 kV Sperrspannung. Die benötigte Heizleistung wird in jeder Stufe durch Wechselstromgeneratoren mit permanenten Magnetankern erzeugt; diese sind über eine isolierte Welle durch einen auf Erdpotential



Fig. 5.

Hochspannungsanlage für 1 MV.
Gleichrichter vorne links, Kanalstrahlrohr rechts hinten,
Ionenquelle in der oberen, hinteren Abschirmung.

stehenden Motor angetrieben. Die Primärspannung besitzt die Frequenz 400 Hz, so dass bei gleicher Welligkeit die Kapazitäten wesentlich kleiner gehalten werden können als bei 50 Hz. Die maximal erreichbare Spannung beträgt 1050 kV.

Der Gleichrichter liefert bei 1 MV einen Strom von 7 mA, mit einer Welligkeit von 5%. Die Hochspannungsmessung geschieht durch einen mit Öl isolierten Hochohmwiderstand (IRC-Widerstände von total $1,145 \cdot 10^{10}$ Ohm) und wurde mit der Li(p, γ)-Resonanz bei 441 keV⁸) kontrolliert⁹).

*) Der Gleichrichter wurde von der Firma E. Haefely & Co., Basel, geliefert.

3.2. Das Beschleunigungsrohr.

Dieses ist mit den einzelnen Stufen des Gleichrichters durch Widerstände von zirka 80 kOhm verbunden und besteht dementsprechend aus sechs Beschleunigungsstufen mit Porzellanisolatoren von 345 mm Innendurchmesser und einem Meter Länge. Die Beschleunigungselektroden haben 102 mm Durchmesser und tragen an den dem höheren Potential zugekehrten Seiten einen Permanentmagneten. Dadurch werden die durch Streuionen in der betreffenden Elektrode ausgelösten Elektronen an die Wand abgelenkt, bevor sie durch das Feld zur nächsten Stufe hin beschleunigt werden. Schnelle Elektronen, welche gegen die Ionenquelle fliegen, sind äusserst unerwünscht, da sie nicht nur Wärme und eine starke Röntgenbremsstrahlung erzeugen, sondern den Gleichrichter zusätzlich belasten. Das System der Beschleunigungselektroden wirkt gleichzeitig als Ionenlinse. Die Linse bildet den 2,2 mm breiten Strahl in die zirka vier Meter entfernte Targetebene vergrössert ab. Die Vergrösserung beträgt etwa 3,5. Ein Elektromagnet lenkt den Strahl um 30° aus der direkten Richtung ab. Die Quelle liefert zur Zeit 400 μA Totalstrom an Deuteriumionen, wovon ca. 50% Atomionen sind. Als Ionenquelle dient eine Hochspannungsgasentladung¹⁰).

3.3. Pumpsystem und Steueranlage.

Das Beschleunigungsrohr ist über ein Ventil mit 35 cm Durchlassöffnung an sechs Öldiffusionspumpen mit wassergekühlten Baffles angeschlossen. Als Pumpmedium dient Silikonöl. Eine Vorvakuumpumpe mit einer Saugleistung von 3 m³/h erzeugt den notwendigen Vorvakuumdruck. Als totale Pumpgeschwindigkeit wurde am Eingang zum Beschleunigungsrohr 600 l/sec Luft bei einem Druck von 10^{-4} Torr gemessen.

Die ganze Anlage ist durch Verwendung von Wasserdurchflussanzeigern, Relais und Schützen automatisch gesichert gegen Ausbleiben des Kühlwassers, Lufteinbrüche in das Vakuumssystem und Überströme in den Gleichrichtern.

4. Neutronenspektrum.

Da für eine Neutronenenergie stets die beiden Reaktionen $B(n, \alpha) Li$ und $B(n, \alpha) Li^*$ auftreten, gibt es im Impulsspektrum zwei Gruppen im Abstand von 0,48 MeV, die sich bei breiten Neutronenspektren überlagern.

Die Neutronen werden mit der Reaktion $C(d, n)$ für die Energie 0,5 MeV, für alle andern Energien mit der Reaktion $D(d, n)$ erzeugt.

Das Neutronenspektrum, das durch den Bormantel nach kleineren Energien verschmiert wird, ist nur bei 3,5 und 3,9 MeV so breit, dass sich die beiden Impulsgruppen stark beeinflussen. Es wird im folgenden Abschnitt angegeben. Bei den andern Energien werden die Korrekturen bei der Auswertung der gemessenen Impulsspektren angegeben.

4.1. Neutronenspektrum der Energien 3,5 und 3,9 MeV.

Die mittlere Energie der auffallenden Deuteronen ist $E_d = 0,83$ MeV für $E_n = 3,9$ MeV und $E_d = 0,53$ MeV für $E_n = 3,5$ MeV. Das Neutronenspektrum unter 0° nach einer dicken D_2O -Target wurde von Herrn Hürlimann für 3,9 MeV mit Rückstossprotonen in Photoplatten untersucht; seine Form ist in Figur 6 dargestellt.

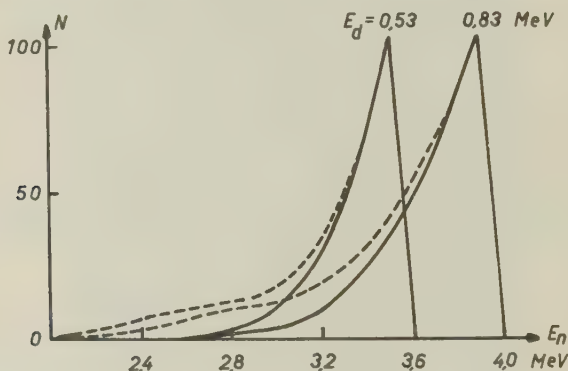


Fig. 6.

Neutronenspektrum nach der Target ——— und in der Ionisationskammer - - -

N = Neutronenzahl pro Energieintervall.

E_n = Energie der Neutronen.

Die Form des Spektrums für 0,53 MeV-Deuteronen ist darin ebenfalls enthalten: Es ist der Teil des Spektrums unterhalb der Neutronenenergie 3,5 MeV. Der Abfall des Spektrums nach höheren Energien wird als gleich angenommen wie für die 0,83 MeV Deuteronen, da er im wesentlichen durch das Gasentladungsspektrum bedingt ist. Das Spektrum der Neutronen nach dem Bormantel ist approximativ berechnet worden (Fig. 6).

5. Messung des Verzweungsverhältnisses.

In diesem Abschnitt wird die Bestimmung des Verhältnisses K der beiden Wirkungsquerschnitte σ und σ^* der Reaktionen $B(n, \alpha)Li$ und $B(n, \alpha)Li^*$ für verschiedene Neutronenenergien angegeben. Beide Reaktionen werden gleichzeitig in der Ionisationskammer

ausgeführt und registriert. Der Neutronenfluss ist also für beide Reaktionen derselbe, ebenso die geometrische Anordnung, so dass K allein durch das Verhältnis der Impulsszahlen bestimmt ist.

Die Impulsspektren B_a und B_a^* , die den Reaktionen $B(n_a, \alpha) Li$ und $B(n_a, \alpha) Li^*$ entsprechen (der Index a bedeute die Neutronenenergie in MeV), überlappen sich bei thermischen Neutronen und bei $E_n = 0,5$ MeV nicht.

Bei den andern Energien sind die gemessenen Impulsspektren in die einzelnen Gruppen zu zerlegen. Das Verhältnis der Maxima b und b^* der so erhaltenen Impulsspektren ist gleich demjenigen K , das der Neutronenenergie des Maximums zugeordnet ist. Die gesamten Messfehler können quadratisch aus den Einzelfehlern addiert werden, da diese statistisch voneinander unabhängig sind.

5.1. Thermische Neutronen.

Hier wurden die Impulsszahlen sowohl mit dem 19-Kanalspektrographen¹¹⁾ als auch mit dem photographischen Impulsspektrographen gemessen. Die Impulsszahlen der Gruppen sind folgende:

$$B^* = 1407, B = 99 \text{ (Figur 7a, 7b).}$$

Der Randeffect kann vollständig vernachlässigt werden, da er B^* höchstens um 0,4% erhöht. K wird damit:

$$K = B/B^* = 0,070 \pm 0,007.$$

Der Wert stimmt mit dem Verhältnis der Maxima b/b^* überein. Der Fehler ist hier nur statistisch bedingt.

5.2. Neutronenenergie 0,5 MeV.

Das Impulsspektrum weist drei Gruppen auf (Figur 8): A enthält die $B(n_0, \alpha) Li^*$ -Reaktion, B besteht aus den beiden Anteilen $B(n_0, \alpha) Li$ und $B(n_{0,5}, \alpha) Li^*$, die gerade zusammenfallen und C umfasst die $B(n_{0,5}, \alpha) Li$ -Impulse.

Die beiden in B zusammenfallenden Impulse sind bei andern Neutronenenergien aufgelöst: Figur 9 zeigt eine Aufnahme mit 0,26 MeV-Neutronen.

Das Maximum der Gruppe B in Figur 8 wird von der Gruppe C nicht beeinflusst, da sich diese Gruppen nur sehr wenig überdecken. K ist deshalb das Verhältnis der Maxima c von C und b'' , das den Anteil von $B(n_{0,5}, \alpha) Li^*$ an B bedeutet. Es wird

$$K = 0,31 \pm 0,04.$$

Der gesamte Fehler von 13% setzt sich zusammen aus 10% Auswertefehler und 8% statistischem Fehler.

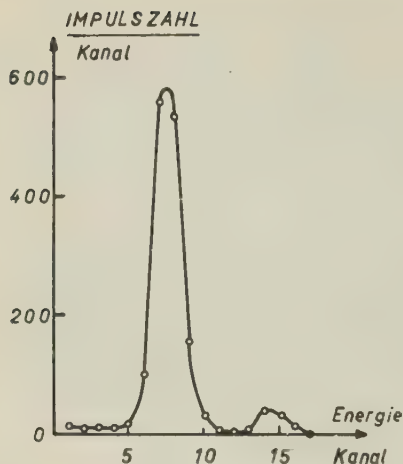


Fig. 7a.



Fig. 7b.

Impulsspektrum der Reaktionen $B(n, \alpha) Li^*$ und $B(n, \alpha) Li$ mit thermischen Neutronen.

a) mit 19-Kanalspektrograph,

b) mit photographischem Impulsspektrograph registriert.

Füllung der Ionisationskammer: 8 ata A + 1 ata BF_3 .

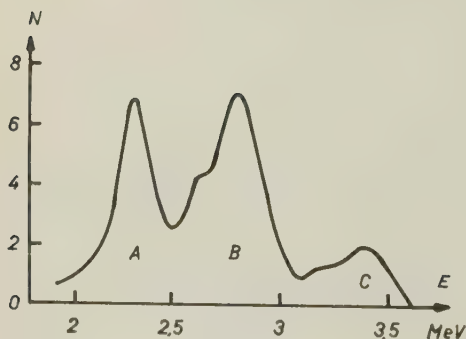


Fig. 8.

Impulsspektrum für die Reaktionen

$B(n_0, \alpha) Li^* \dots \dots A.$

$B(n_0, \alpha) Li + B(n_{0,5}, \alpha) Li^* \dots \dots B.$

$B(n_{0,5}, \alpha) Li \dots \dots C.$

N = relative Impulszahl pro Energieintervall.

E = Gesamtenergie der Reaktionsprodukte.

Füllung der Ionisationskammer:

4,5 ata Kr + 0,5 ata BF_3 .

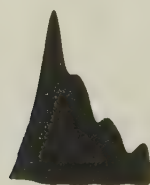


Fig. 9.

Impulsspektrum
für thermische Neutronen
(erstes und drittes Maxi-
mum) und 0,26 MeV Neu-
tronen (zweites und viertes
Maximum).

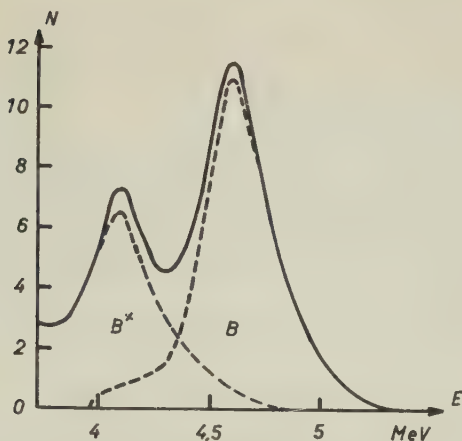


Fig. 10.

Impulsspektrum der Reaktion $B(n, \alpha) Li$ und $B(n, \alpha) Li^*$ für die Neutronenenergie 1,80 MeV. Die zugehörigen Impulsgruppen sind mit B und B^* bezeichnet.

$$K = 1,7 \pm 0,3.$$

N und E wie in Fig. 8. Füllung der Ionisationskammer: 4,5 ata Kr + 0,5 ata BF_3 .

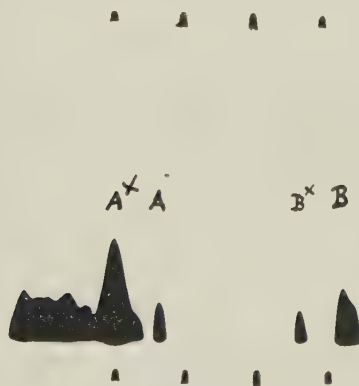


Fig. 11.

Die Aufnahme zeigt die beiden Reaktionen mit thermischen Neutronen (A^* und A) und mit Neutronen der Energie 2,10 MeV (B^* und B).

Zur Verminderung der Zahl der thermischen Neutronen wurde hier Cadmium verwendet, wodurch weniger Streuneutronen als beim Bormantel in Erscheinung treten und die Resonanz bei 1,8 MeV nicht merklich auftritt. Diese Abschirmung ist nur in den Fällen zweckmässig, wo der Wirkungsquerschnitt für die schnellen Neutronen relativ gross ist; bei den andern Energien würden die thermischen Neutronen zu stark überwiegen.

Füllung der Ionisationskammer: 4,5 ata Kr + 0,5 ata BF_3 .

5.3. Neutronenenergien 1,80–2,95 MeV.

Es werden Impulsspektren bei folgenden Energien registriert: 1,80, 2,10, 2,55 und 2,95 MeV.

Durch das Auftreten von Einfangsresonanzen des B^{10} im Gebiet von 1,8 bis 2,1 MeV¹²⁾¹³⁾ treten hier neben den gesuchten Hauptgruppen mehrere Nebengruppen auf, die sich alle überlagern. Deshalb ist nur bei 1,80 und 2,95 MeV eine sichere Bestimmung von K möglich, während sie bei 2,10 und 2,55 MeV einen gröſseren Fehler aufweist.

K ist bei den Figuren 10–13 angegeben.

5.4. Neutronenenergie 3,5 MeV.

Das Impulsspektrum (Fig. 14) zeigt die Gruppen B , B^* und nach tieferen Energien anschliessend den Anstieg der mit aufgenommenen U^{234} -Alphateilchen. Die berechneten Impulsspektren sind gestrichelt eingetragen. Die Differenz zwischen gemessenem und berechnetem Impulsspektrum ist als schraffierte Fläche eingezeichnet. Sie beträgt zirka 10% der Fläche von B und zeigt damit, dass die Annahmen über das berechnete Impulsspektrum ziemlich zutreffend sind. K berechnet sich zu

$$1,4 \pm 0,3.$$

Der gesamte Fehler von 20% setzt sich zusammen aus Auswertefehler 10%, Fehler durch die Korrektur für die Streuneutronen 15% und statistischer Fehler 6%.

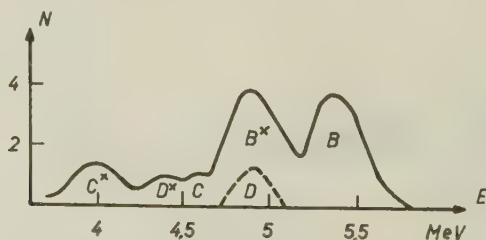


Fig. 12.

Neutronenenergie 2,55 MeV, Kadmiumblech zur Verminderung der Zahl der thermischen Neutronen.

C^* , C gehören zu $B(n_{1,8}, \alpha)Li^*$, Li

D^* , D gehören zu $B(n_{2,1}, \alpha)Li^*$, Li

B^* , B gehören zu $B(n_{2,5}, \alpha)Li^*$, Li .

$$K = 1,5 \pm 0,4.$$

N und E wie in Fig. 8. Füllung der Ionisationskammer: 4,5 ata Kr + 0,5 ata BF_3 .

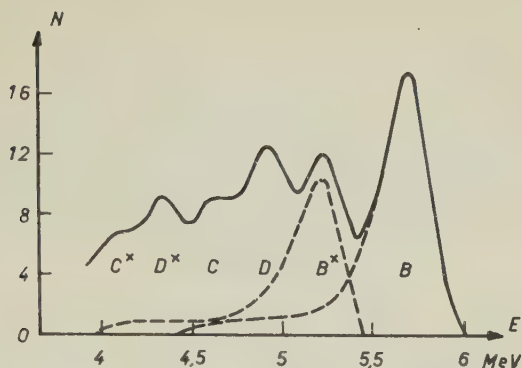


Fig. 13.

Neutronenenergie 2,95 MeV. Die Gruppenbezeichnung ist gleich wie bei Fig. 12. D überdeckt den Abfall der Gruppe B^* .

$$K = 1,8 \pm 0,3.$$

N und E wie in Fig. 8. Füllung der Ionisationskammer: 9 ata A + 1 ata BF_3 .

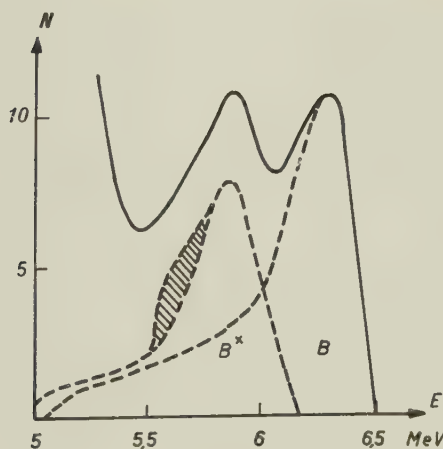


Fig. 14.

Impulsspektrum für die Neutronenenergie 3,5 MeV.

Die Differenz zwischen berechnetem und gemessenem Impulsspektrum ist als schraffierte Fläche eingezeichnet.

N und E wie in Fig. 8. Füllung der Ionisationskammer: 5 ata Kr + 0,4 ata BF_3 .

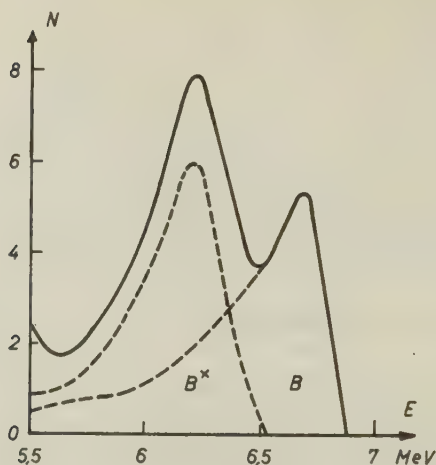


Fig. 15.

Impulsspektrum für die Neutronenenergie 3,9 MeV.

Der Unterschied zwischen gemessenem und berechnetem Impulsspektrum ist kleiner als 5%.

N und E wie in Figur 8. Füllung der Ionisationskammer: 5 ata Kr+0,4 ata BF_3 .

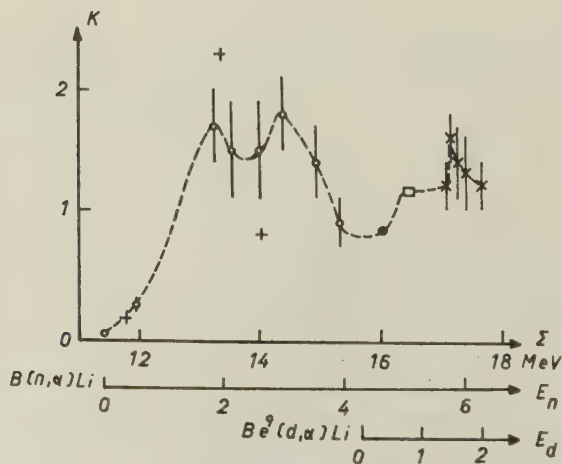


Fig. 16.

K als Funktion der Anregungsenergie Σ des Zwischenkerns B^{11} .

o Vorliegende Messung. • GRAVES. + MILLER¹⁶⁾. □ INGLIS. × BUECHNER.

Die Energieskalen E_n bzw. E_d beziehen sich auf die benutzte Neutronenenergie in der Reaktion $\text{B}(n, \alpha)\text{Li}$ respektive Deuteronenenergie in der Reaktion $\text{Be}^9(d, \alpha)\text{Li}$.

5.5. Neutronenenergie 3,9 MeV.

Für die Darstellung des Impulsspektrums (Fig. 15) gilt das gleiche, das bei 3,5 MeV gesagt wurde. Die Differenz zwischen berechnetem und gemessenem Impulsspektrum beträgt hier höchstens 5% von B , was zeigt, dass die angebrachte Korrektur für die Streuneutronen wahrscheinlich besser als auf 15% stimmt (was als Fehler angenommen wird). K berechnet sich zu

$$0,9 \pm 0,2.$$

5.6. Ergebnis.

In Figur 17 sind — mit Resultaten anderer Autoren — unsere Messungen der Grösse

$$K = \frac{\sigma[B(n, \alpha) Li]}{\sigma^*[B(n, \alpha) Li^*]}$$

graphisch dargestellt.

Einige Werte wurden bereits früher publiziert¹⁴). Mit thermischen Neutronen hat HANNA¹) das Verzweungsverhältnis $K = 0,062 \pm 0,001$ bestimmt. Der in der vorliegenden Arbeit gefundene Wert steht im Einklang mit dieser Bestimmung. Auf die theoretische Deutungsmöglichkeit dieses Verzweungsverhältnisses wurde von INGLIS¹⁵) hingewiesen.

Mit Neutronenenergien von 0,35 bis 2,6 MeV wurde K von MILLER et al.^{16) 17)} gemessen. Die Ergebnisse bis 1,8 MeV stimmen im wesentlichen mit denjenigen der vorliegenden Arbeit überein, dagegen ergibt sich ein Unterschied in der Interpretation des Resultates bei 2,6 MeV. Die Impulsspektren (vgl. Figur 4 der Veröffentlichung von MILLER¹⁷) mit Figur 12 der vorliegenden Arbeit) sehen praktisch gleich aus, K ist aber verschieden, da wir die angegebene Korrektur anbringen.

Als Ergänzung sind nun die Messungen der Reaktion $Be^9(d, \alpha) Li$, die den gleichen angeregten Zwischenkern B^{11} aufweist, interessant. Zum Vergleich mit der vorliegenden Messung wird K zweckmässig als Funktion der Anregungsenergie Σ des B^{11} angegeben. In der Literatur finden sich folgende Messungen:

GRAVES¹⁸) misst die Reaktion mit der Deuteronenenergie 0,326 MeV und aus ihren Messungen erhält man $K = 0,85$.

INGLIS untersucht die gleiche Reaktion mit einem magnetischen Spektrographen¹⁹) bei $E_d = 0,6$ MeV und aus Figur 2 (p. 106) ergibt sich aus dem Vergleich der Maxima $K = 1,16$.

BUECHNER et al.^{20) 21) 22)} haben verschiedene Arbeiten publiziert. In einem Briefe wurden uns K -Werte für Deuteronenenergien von 1,36 bis 1,81 MeV mitgeteilt.

6. Messung der Energietönung von $B(n, \alpha)Li$ und $D(d, n)He^3$.

Werden Q -Werte mit Hilfe der Ionisationskammer bestimmt, so ist zu beachten, dass in der Ionisationskammer Ladungen q gemessen werden. Die Energie der Reaktionsprodukte berechnet sich aus der Zahl der Ionenpaare q/e und der Arbeit W , die aufgewendet werden muss, um ein Ionenpaar zu erzeugen:

$$E = W q/e.$$

Die Ladungen werden wie ublich²⁾ durch Influenzladungen, die über eine Eichkapazitat gegeben werden, geeicht. Die Influenzladungen können relativ zueinander mit einer Genauigkeit von 0,1% bestimmt werden. Der Vergleich der gemessenen Ladungen mit den Influenzladungen ergibt eine weitere Ungenauigkeit, die in 2.1. besprochen wurde.

Ungünstiger liegen die Verhältnisse bei $W(E)$. Nach den in der Literatur angegebenen Resultaten ist noch nicht sichergestellt, wie W von der Energie der Teilchen abhängig ist. Nach CRANSHAW und HARVEY²³⁾ soll für Argon gelten:

$$W(E) = 27,5 + 1,9 E^{-1/2} \quad (\text{eV}),$$

wobei E in MeV einzusetzen ist.

JESSE et al.²⁴⁾ finden dagegen für Argon einen konstanten W -Wert.

6.1. Energietönung der Reaktion $B^{10}(n, \alpha)Li$.

Bei Reaktionen, die mit thermischen Neutronen verlaufen, lässt sich die Energietönung besonders gut bestimmen: sie ist gleich der Energie der Reaktionsprodukte.

Zur Energiebestimmung werden zwei verschiedene Vergleichsenergien verwendet: die Energie des angeregten Zustandes von Lithium und die Energie der Alphateilchen von U^{238} . Bei der ersten Methode werden die beiden Reaktionen $B(n, \alpha)Li$ und $B(n, \alpha)Li^*$ mit langsamen Neutronen in der Ionisationskammer erzeugt. Es wird das Verhältnis der Ladungen q_1 und q gemessen:

$$q_1/q = 1,215 \pm 0,002.$$

Der Wert ist für Sättigung korrigiert,

Für den Fall von konstanter Arbeit pro Ionenpaar gilt für dieses Ladungsverhältnis

$$q_1/q = Q/(Q - E^*)$$

wobei Q die Energietönung der Reaktion und E^* die Anregungsenergie des Li^* von 478,5 keV⁸⁾ ist.

Daraus berechnet sich $Q = 2,70 \pm 0,02$ MeV.

Dabei wird angenommen, dass W für ein Alpha- und ein Lithiumteilchen dasselbe ist.

Wenn die Arbeit pro Ionenpaar nach CRANSHAW energieabhängig angenommen wird, heisst die Gleichung

$$q_1/q = \frac{\frac{E_\alpha}{W_\alpha} + \frac{E_{Li}}{W_{Li}}}{\frac{E_{\alpha^*}}{W_{\alpha^*}} + \frac{E_{Li^*}}{W_{Li^*}}} \quad (1)$$

Ausserdem ist

$$Q = E_\alpha + E_{Li} = E_{\alpha^*} + E_{Li^*} + E^* \quad (2)$$

und

$$E_\alpha/E_{Li} = E_{\alpha^*}/E_{Li^*} = m_{Li}/m_\alpha. \quad (3)$$

Es bedeuten E_k die Energie des k -ten Produktes der Reaktion und W_k die zugehörige Arbeit pro Ionenpaar.

Wir wollen nun annehmen, dass die Arbeit pro Ionenpaar für ein Lithiumteilchen und ein Alphateilchen gleicher Geschwindigkeit dieselbe ist.

Weiter nehmen wir an, dass für das betrachtete Gemisch 10% BF_3 + 90% Argon für W eine ähnliche Formel wie für reines Argon gelten soll:

$$W_\alpha(E) = k(27,5 + 1,9 E^{-\frac{1}{2}}). \quad (4)$$

Diese Annahme wird gestützt durch den experimentellen Befund, wonach das Verhältnis der Ladungen, die von Uran-Alphateilchen und von der Reaktion $B(n, \alpha) Li^*$ erzeugt werden, gleich ist für reines BF_3 und das hier verwendete Gemisch. Gleichung (1) lässt sich mit Gleichung (2) und (3) umformen zu

$$q_1/q = \frac{Q \left(\frac{7}{W_\alpha} + \frac{4}{W_{Li}} \right)}{(Q - E^*) \left(\frac{7}{W_{\alpha^*}} + \frac{4}{W_{Li^*}} \right)}$$

Die Energietönung wird nun durch sukzessive Approximation unter Annahme von Gleichung (4) für W_α und W_{Li} berechnet und ergibt sich zu

$$Q = 2,78 \pm 0,02 \text{ MeV.}$$

Die zweite Methode wird experimentell folgendermassen ausgeführt: Auf der negativen Elektrode der Ionisationskammer (Aufhängersplatte) wird elektrolytisch eine Uranschicht niedergeschlagen.

Die Füllung der Ionisationskammer besteht aus 0,5 ata BF_3 und 4,5 ata A. Durch Einstrahlen von thermischen Neutronen ergibt sich die Reaktion $\text{B}(n, \alpha)\text{Li}^*$. Zwischen zwei Messungen der Reaktion werden die Uranalphateilchen registriert, wobei ein allfälliger Gang der Apparatur durch die gleichzeitige Registrierung der Eichimpulse herausfällt.

Das auf Sättigung korrigierte Verhältnis p/q (s. p. 11) ergibt sich zu $1,879 \pm 0,005$. Wir haben daran eine Korrektur anzubringen, die von der Absorption der Alphateilchen in der Uranschicht selbst und in einer BF_3 -schicht auf der Uranschicht herrührt. Sie wird experimentell bestimmt, und es wird damit

$$p/q = 1,891 \pm 0,010.$$

Zur Kontrolle der Messanordnung wird das Verhältnis der Ladungen p und p_1 der Uranalphateilchen von U^{238} und U^{234} gemessen. Das Verhältnis der Energien stimmt mit den Messungen von SEABORG und PERLMANN²⁵⁾ überein.

Der Q -Wert mit konst. W ergibt sich zu

$$Q = 2,69 \pm 0,02 \text{ MeV},$$

und mit energieabhängigem W nach CRANSHAW

$$Q = 2,77 \pm 0,02 \text{ MeV}.$$

Als Mittelwert von beiden Bestimmungen folgt für

$$W \text{ konstant} \quad Q = 2,695 \pm 0,02 \text{ MeV}.$$

$$W \text{ energieabhängig nach CRANSHAW} \quad Q = 2,775 \pm 0,02 \text{ MeV}.$$

Der erste Wert weicht um den fünffachen Betrag des Messfehlers von der Messung im magnetischen Spektrographen von LAURITSEN et al.²⁶⁾: $2,794 \pm 0,006 \text{ MeV}$ ab, während der zweite gut damit übereinstimmt.

6.2. Energietönung der Reaktion $\text{D}(d, n)\text{He}^3$.

Der Q -Wert der (d,d) -Reaktion lässt sich berechnen, wenn die Energie des Deuterons und des Neutrons bekannt sind²⁷⁾.

Die Neutronenenergie wird folgendermassen gemessen: Führt man die Reaktion $\text{B}(n, \alpha)\text{Li}$ gleichzeitig mit thermischen und schnellen Neutronen aus, so wird die Differenz der Energien der Endprodukte gleich der Neutronenenergie. Zur vorliegenden Mes-

sung wird ein Neutronenspektrum mit dem Maximum der Intensität bei ca. 2,9 MeV benützt (siehe²⁾). Die Auswertung wird auf Grund von 16 Aufnahmen (Fig. 17) mit je 100 Impulsen in der Hauptgruppe nach der gleichen Methode wie in 6.1. ausgeführt, wobei W_α und W_{Li} nach Gleichung (4) des vorhergehenden Abschnittes berechnet werden.

Es ergibt sich als Neutronenenergie

$$E'_n = 2,94 \pm 0,03 \text{ MeV.}$$

Daran ist noch eine Korrektur anzubringen, die davon herrührt, dass die Ionisationskammer einen Winkelbereich von 14° überdeckt. Die mittlere registrierte Neutronenenergie ist dadurch um zirka 10 keV kleiner als die Energie der Neutronen in der Vorwärtsrichtung (bei 14° ist die Neutronenenergie 2,933 MeV, wenn sie in Vorwärtsrichtung 2,950 MeV beträgt). Diese Differenz ist zu E'_n zu addieren, um die Energie E_n der Neutronen in der Vorwärtsrichtung zu erhalten:

$$E_n = 2,95 \pm 0,03 \text{ MeV.}$$

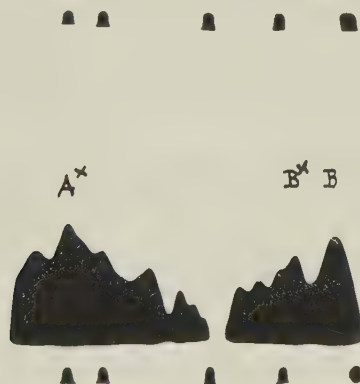


Fig. 17.

Aufnahme der bei der Neutronenenergie 2,9 MeV auftretenden Reaktionen.
Bezeichnung wie bei den vorigen Figuren.

Die Beschleunigungsspannung wird nach drei verschiedenen Methoden mit grosser Genauigkeit bestimmt:

- a) Bestimmung des Einsatzpunktes der Reaktion $B^{11}(p, \gamma)C$;
- b) ballistische Eichung;
- c) Unterteilung der Hochspannung mit einem unter Belastung genau geeichten Potentiometer und Messung der Teilspannung mit einem Präzisionsvoltmeter.

Die Energie des Maximums des Deuteronenspektrums wird damit zu $0,157 \pm 0,005$ MeV bestimmt. Die Unsicherheit rührt vor allem von der Unbestimmtheit des Gasentladungsspektrums her. Damit ist es nun möglich, die Energietönung der Reaktion $D(d, n)He^3$ zu berechnen:

$$Q = 3,24 \pm 0,04 \text{ MeV.}$$

Dieser Wert steht in guter Übereinstimmung mit der Messung von TOLLESTRUP et al.²⁸⁾: $3,256 \pm 0,016$ MeV mit einem magnetischen Spektrographen und von LIVESEY: $3,25 \pm 0,02$ MeV²⁹⁾, wobei Rückstossprotonen in Photoplatten gemessen wurden.

6.3. Diskussion.

Die Bestimmung von Energietönungen in diesem Kapitel liefert das Material zu einer kritischen Betrachtung der Ionisationskammermethode für die Bestimmung von Teilchenenergien. Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Methode gestattet, Verhältnisse von Ladungen mit einer Genauigkeit von 0,2% zu bestimmen, sofern genügend grosse Impulszahlen gemessen werden können.

Zur Einhaltung dieser Genauigkeit ist es weiterhin erforderlich, die Abhängigkeit der Impulsgrösse von der primär erzeugten Ladung sorgfältig zu untersuchen: die Impulsgrösse hängt vom Frequenzgang des Verstärkers und von der Sättigung in der Ionisationskammer ab.

Das grösste Hindernis der Ionisationskammermethode scheint die Unsicherheit in der Arbeit zur Erzeugung eines Ionenpaares zu sein. Es könnte behoben werden, wenn genügend gut bekannte Eichsubstanzen zur Energiemessung verwendet werden. Dazu dürfte die thermische Neutronenreaktion $B(n, \alpha)Li$ aus dünner Schicht sehr gut geeignet sein.

Der Schweiz. Studienkommission für Atomenergie und dem E. W. Basel danken wir für die Finanzierung der Hochspannungsanlage.

Literaturverzeichnis.

- 1) G. C. HANNA, Phys. Rev. **80**, 530, 1950 (gibt auch ältere Literatur).
- 2) A. STEBLER und P. HUBER, Helv. Phys. Acta **21**, 59 (1948).
- 3) D. MAEDER, Helv. Phys. Acta **20**, 139 (1947).
- 4) D. MAEDER, P. HUBER und A. STEBLER, Helv. Phys. Acta **20**, 230 (1947).
- 5) E. BALDINGER, W. HÄLG, P. HUBER und A. STEBLER, Helv. Phys. Acta **19**, 423 (1946).
- 6) W. C. ELMORE, NUCLEONICS, Vol. **2**, Heft 2—5, 1948.
- 7) B. B. ROSSI und H. H. STAUB, Ionization Chambers and Counters, p. 228ff, McGraw Hill Book Company, New York, 1949.

- 8) W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON and W. A. FOWLER, *Revs. mod. Phys.* **22**, 311 (1950).
 - 9) P. HUBER, E. BALDINGER und W. G. PROCTOR, *Helv. Phys. Acta* **24**, 302 (1951).
 - 10) O. HIRZEL und H. WÄFFLER, *Helv. Phys. Acta* **20**, 375 (1947).
 - 11) E. BALDINGER und R. CASALE, *Helv. Phys. Acta* **21**, 172 (1948).
 - 12) R. K. ADAIR, *Revs. mod. Phys.* **22**, 258 (1950).
 - 13) A. STEBLER, H. BICHSEL und P. HUBER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 511 (1950).
 - 14) H. BICHSEL, W. HÄLG, P. HUBER, A. STEBLER, *Phys. Rev.* **81**, 456 (1951).
 - 15) D. R. INGLIS, *Phys. Rev.* **82**, 181, 1951.
 - 16) D. W. MILLER, B. PETREE and C. H. JOHNSON, *Bull. Am. Phys. Soc.* **3**, 20 (1951).
 - 17) B. PETREE, C. H. JOHNSON and D. W. MILLER, *Phys. Rev.* **83**, 1148 (1951).
 - 18) E. R. GRAVES, *Phys. Rev.* **57**, 855 (1940).
 - 19) D. R. INGLIS, *Phys. Rev.* **78**, 104 (1950).
 - 20) W. W. BUECHNER, E. N. STRAIT, C. G. STERGIPOULUS, A. SPERDUTO, *Phys. Rev.* **74**, 1572 (1948).
 - 21) W. W. BUECHNER, E. N. STRAIT, *Phys. Rev.* **76**, 1548 (1949).
 - 22) E. N. STRAIT, D. M. VAN PATTTER, W. W. BUECHNER, A. SPERDUTO, *Phys. Rev.* **81**, 752 (1951).
 - 23) T. E. CRANSHAW and J. A. HARVEY, *Can. Journ. Res. A* **26**, 243 (1948).
 - 24) W. P. JESSE, H. FORSTAT, J. SADAUSKIS, *Phys. Rev.* **77**, 782 (1950).
 - 25) G. T. SEABORG and I. PERLMANN, *Revs. mod. Phys.* **20**, 637 (1948).
 - 26) C. Y. CHAO, C. C. LAURITSEN, A. V. TOLLESTRUP, *Phys. Rev.* **76**, 586 (1949).
 - 27) A. O. HANSON, R. F. TASCHEK and J. H. WILLIAMS, *Revs. mod. Phys.* **21**, 648 (1949).
 - 28) A. V. TOLLESTRUP, F. A. JENKINS, W. A. FOWLER and C. C. LAURITSEN, *Phys. Rev.* **76**, 181 (1949).
 - 29) D. L. LIVESEY and D. H. WILKINSON, *Proc. Roy. Soc. A* **195**, 123 (1948).
-

Streuung von schnellen Neutronen an O^{16}

von E. Baldinger, P. Huber und W. G. Proctor.*)

(1. IX. 1951.)

The differential cross-sections for the scattering of neutrons from O^{16} have been measured at various energies between 2 and 4 MeV, using an ionization chamber. These data, together with the known total cross-section, permit an analysis to be made for the partial wave phases responsible for the scattering. The analysis shows that four levels, given in Table I of the text, with suitable potential scattering, are responsible for the observed total and differential cross-sections.

Einleitung.

Bis heute ist eine grosse Menge von Daten über die Energieniveaus der leichten Kerne bekannt¹⁾. Die meisten Experimente geben aber nur eine Lokalisation der relativ scharfen Energiezustände. Es ist nun aber gerade im Hinblick auf das Schalenmodell und die Frage nach der Grösse der Spin-Bahnkopplung wichtig, auch den Charakter der Energiezustände und ihre Breite kennenzulernen. Streuexperimente von Neutronen bieten dazu eine geeignete Methode. Gewöhnlich werden totale Wirkungsquerschnitte σ_T gemessen. Aus ihnen kann, sofern das Neutronenspektrum gut monochromatisch ist, der totale Drehimpuls des Zwischenkerns berechnet werden²⁾. Indirekt kann aus der Halbwertsbreite der Zustände in gewissen Fällen auf den Bahndrehimpuls des Zwischenzustandes geschlossen werden³⁾. Diese Methode ist in letzter Zeit für einige Energiezustände mit Erfolg benutzt worden⁴⁾, obwohl Überlappung von Zuständen und Inhomogenität der Neutronenenergie vielfach eindeutige Zuordnungen verunmöglichen. Wenn nun aber für eine bestimmte Energie sowohl σ_T als auch der differentielle Wirkungsquerschnitt $\sigma(\Theta)$ bekannt sind, ist es möglich, die Phasen der Streuwellen, die für die Streuung verantwortlich sind, zu berechnen. Aus dem Phasenverlauf der Streuwellen kann dann sehr einfach auf den Charakter des Niveaus geschlossen werden, sowohl was totalen und Bahn-Drehimpuls als auch Niveaubreite betrifft.

In jüngster Zeit haben BOCKELMAN, MILLER, ADAIR und BARSCHALL⁵⁾ im Energiegebiet von 0 bis 3,3 MeV den Verlauf des to-

*) Jetzt Stanford University, California.

talen Wirkungsquerschnittes von Sauerstoff genau bestimmt, wobei sie mehrere Resonanzstellen identifizierten.

FREIER, FULK, LAMPI und WILLIAMS⁶⁾; RICAMO, ZÜNTI, BALDINGER und HUBER⁷⁾ und RICAMO und ZÜNTI⁸⁾ haben im Bereich von 2–4 MeV mehrere Resonanzstellen gefunden. In diesem Gebiet wurde von uns nun der differentielle Querschnitt für die $n-O^{16}$ -Streuung gemessen.

Zur Bestimmung von $\sigma(\theta)$ wird Sauerstoffgas mit monochromatischen Neutronen bestrahlt. Die Energieverteilung der Sauerstoff-Rückstöße liefert, wie weiter unten gezeigt wird, eine direkte Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnittes. Diese Methode wurde zuerst von BARSCHALL und KANNER⁹⁾ angegeben und beruht auf der Messung der Energieverteilung von Rückstosskernen, wie sie erstmals BALDINGER, HUBER und STAUB¹⁰⁾ gemessen haben. Diese Methode wurde bereits mehrfach benutzt, so für die Streuung von Neutronen an Deuteronen¹¹⁾¹²⁾, Helium¹¹⁾ und anderen leichten Gasen¹¹⁾¹³⁾. Die Methode kann natürlich, wenn $\sigma(\theta)$ bekannt ist, zur Messung des Neutronenspektrums verwendet werden, worauf BALDINGER, HUBER und STAUB¹⁰⁾ hinwiesen. Mit Wasserstoff als Streugas wird sie heute vielfach zur Ermittlung von Neutronenspektren angewandt¹⁴⁾.

Apparatur und Messmethode.

Als Neutronenquelle diente uns die $d-d$ -Reaktion. Ein Kaskadengenerator¹⁵⁾ mit einer maximalen Spannung von 1 MeV erzeugte die Beschleunigungsspannung. Der magnetisch ausgeblendete Kanalstrahl fällt auf eine dünne Target aus schwerem Eis. Diese Target wird durch Kondensation einer abmessbaren Menge von D_2O -Dampf auf einer mit flüssiger Luft gekühlten Kupferplatte erhalten. Die verwendete Targetdicke war derart, dass ein „long counter“¹⁶⁾, in einem Abstand von 2 m und in Vorwärtsrichtung aufgestellt, 20% der Intensität einer dicken Target mass. Unsere Neutronenenergie liegt somit ungefähr im oberen Fünftel der Energieverteilungskurve einer dicken Target¹⁵⁾¹⁷⁾. Zur Variation der Neutronenenergie im Gebiete von 2,0 bis 3,1 MeV wurde, bei konstanter Beschleunigungsspannung von 400 keV, der Beobachtungswinkel geändert, wobei die Distanz Target-Ionisationskammer mindestens 25 cm betrug. Messungen mit höheren Neutronenenergien erfolgten ausschliesslich in Vorwärtsrichtung und mit entsprechender Beschleunigungsspannung.

Die Ionisationskammer besteht aus 2 koaxialen Aluminiumzylindern, wobei die innere Elektrode einen Durchmesser von 1 cm

und die äussere Elektrode, bei einer Wandstärke von 2 mm, einen Innendurchmesser von 3 cm aufweist. Mit $16,2 \text{ cm}^3$ Zählvolumen und $40,7 \text{ cm}^2$ Oberfläche wird ein günstiges Verhältnis von Volumen zu Oberfläche erreicht. Ein Fülldruck von ca. 1 ata ergab die besten Messergebnisse. Bei kleinerem Druck wird der Wandeffect grösser und bei grösserem Druck können schnelle Elektronen mehr Energie im Zählvolumen der Kammer verlieren. Eine Abschätzung zeigte ferner, dass der Einfluss der Aluminiumrückstosskerne vernachlässigbar ist.

Die Ladung der von den Rückstosskernen erzeugten Ionen wurde mit Hilfe eines Verstärkers¹⁸⁾ ballistisch gemessen. Die Begrenzung des verstärkten Frequenzbandes erfolgte nach hohen und nach tiefen Frequenzen durch 2 RC-Glieder gleicher Zeitkonstante¹⁹⁾ und zwar so, dass das Maximum des Durchlassbereiches bei 100 Hz lag. Ein zu hohes Frequenzband würde keine einwandfreie ballistische Messung erlauben. Mit einer Ionisationskammer-Spannung von 2500 Volt hatten sowohl die ballistischen wie die Rekombinationsverluste keinen merklichen Einfluss auf die gemessenen Verteilungskurven.

Der Störpegel des Verstärkers, mit eingeschalteter Ionisationskammer-Spannung entsprach einem Effektivwert von ca. 10 keV, der bei 3 MeV Neutronenenergie mit der maximalen Rückstossenergie der Sauerstoffkerne von 664 keV zu vergleichen ist. Die Amplitudenverteilung der Ausgangsimpulse des Verstärkers wurde mit Hilfe eines 19-Kanal-Impulsspektrographen²⁰⁾ registriert. Die so gemessenen Verteilungskurven stellen, wie noch dargelegt wird, den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von $x = \cos \Theta$ dar, wobei Θ der Streuwinkel des Neutrons im Schwerpunktsystem bedeutet. Der Impulsspektrograph war so eingestellt, dass der niedrigste Kanal nur noch ausnahmsweise Störimpulse, herührend vom Untergrund, registrierte. Der höchste Kanal lag genügend oberhalb der maximalen Rückstossenergie. Diese Einstellung entspricht bei 3 MeV Neutronenenergie einer Kanalbreite von 40 keV. Der Störpegel des Verstärkers bewirkt eine Verschmierung der wirklichen Verteilungskurven. Zum Vergleich einer theoretisch erhaltenen Kurve des differentiellen Wirkungsquerschnittes $\sigma(x)$ mit dem Experiment, sollte deshalb die theoretische Kurve mit einer Glättungsfunktion $S(x' - x)$ ausgeglichen werden, die in diesem Falle als Gauss'sche Kurve betrachtet werden darf. Wir erhalten so eine neue Funktion

$$\sigma'(x) = \text{const.} \int \sigma(x') \cdot S(x' - x) dx' \quad (1)$$

Einen ähnlichen Einfluss übt das infolge der Gasentladungsspannung und der endlichen Dicke der Target entstehende Neutronenspektrum aus. Alle diese Einflüsse zusammen entsprechen bei einer Neutronenenergie von 3 MeV einer Verschmierung mit einer Gauss'schen Kurve von etwa 50 keV Halbwertsbreite.

Im folgenden wird noch gezeigt, wie aus der Energieverteilung der Rückstosskerne auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt geschlossen werden kann⁹⁾. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutron unter dem Winkel Θ (im Schwerpunkssystem) in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut wird, ist $\frac{\sigma(\Theta)}{\sigma_T} d\Omega$. Dabei bedeutet σ_T den totalen Wirkungsquerschnitt. Jedes unter dem Winkel Θ gestreute Neutron verliert einen bestimmten Energiebetrag E (Laborsystem) an den Streukern. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Rückstosskern eine Energie zwischen E und $E + dE$ erhält, sei durch $p(E)dE$ gegeben.

$$p(E) dE = \frac{\sigma(\Theta)}{\sigma_T} d\Omega. \quad (2)$$

Um aus der Energieverteilung $p(E)$ den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma(\Theta)$ zu erhalten, müssen wir den Zusammenhang zwischen dE und $d\Omega$ kennen. Unter der Voraussetzung elastischer Streuung kann dieser Zusammenhang leicht berechnet werden. Ein im Laborsystem unter dem Winkel ϑ gestreuter Rückstosskern erhält die Energie

$$E = \frac{4M}{(M+1)^2} E_0 \cos^2 \vartheta = E_{\max} \cos^2 \vartheta \quad (3)$$

E_0 : einfallende Neutronenenergie.

M : Atomgewicht des Streukerns.

E_{\max} : maximale Energie des Rückstosskernes.

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$2\vartheta = 180^\circ - \Theta$$

folgt daraus

$$dE = \frac{1}{2} E_{\max} \sin \Theta d\Theta = \frac{E_{\max}}{4\pi} d\Omega \quad (4)$$

so dass schlussendlich der gesuchte Zusammenhang¹⁴⁾

$$\sigma(\Theta) = \frac{E_{\max}}{4\pi} \sigma_T p(E) \quad (5)$$

erhalten wird.

Ergebnisse und Diskussion.

Der totale Wirkungsquerschnitt, wie er von FREIER, FULK, LAMPI und WILLIAMS⁶⁾, RICAMO und ZÜNTI⁸⁾ und BOCKELMAN⁵⁾ et al. gemessen wurde, ist in Fig. 1 wiedergegeben. Die Genauigkeit dieser Querschnitte beträgt ca. $\pm 5\%$. Das breite Maximum von σ_T zwischen 3 und 4 MeV kommt offenbar von zwei breiten, sich überlappenden Resonanzen, wie dies bereits von FREIER et al.⁶⁾ vermutet wurde. Denselben Eindruck erhält man aus den differentiellen Querschnittsmessungen von BALDINGER, HUBER, RICAMO und ZÜNTI¹³⁾. Diese Autoren fanden in der Gegend von 3,3 MeV eine grosse Anisotropie der Rückstossverteilung, d. h. eine starke Rückwärtsstreuung

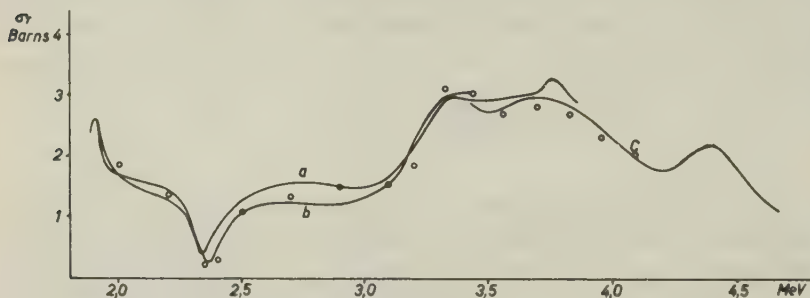


Fig. 1. Totaler Wirkungsquerschnitt von O^{16} von 2,0 bis 4,5 MeV.

a: RICAMO und ZÜNTI, *Helv. Phys. Acta*, **24**, 419 (1951).

b: BOCKELMAN, MILLER, ADAIR und BARSCHALL, *Phys. Rev.* **84**, 73, 1951.

c: FREIER, FULK, LAMPI und WILLIAMS, *Phys. Rev.* **78**, 508, 1949.

ung der Neutronen im Schwerpunktssystem gegenüber einer Streuung von 90° , während bei 3,7 MeV kein Unterschied gefunden wurde. Neu gemessene differentielle Querschnitte $\sigma(\theta)$ im Energiegebiet von 2–4 MeV zeigen die Fig. 3–16. Die $\sigma(\theta)$ -Kurven, oder was gleichbedeutend ist, die Energieverteilungskurven der Sauerstoff Rückstösse sind als Stufenkurven aufgetragen. Jede Stufe entspricht der Zahl der Impulse pro Kanal des Impulsspektrographen. Da jeder Kanal einen 4-fach Untersetzer enthält, ist die Zahl der Rückstösse 4mal grösser als die aufgetragenen Ordinaten. Die differentiellen Querschnittskurven zeigen, dass die starke Anisotropie bei 3,33 MeV etwas tiefer liegt als das erste Maximum von σ_T . Bei dieser Energie und bei allen Verteilungen mit starker Anisotropie liegt das Minimum von $\sigma(\theta)$ ziemlich genau bei $\theta = 90^\circ$. Das zweite Maximum von σ_T bei 3,75 MeV entspricht einer Verteilung, wo $\sigma(180^\circ)$ und $\sigma(90^\circ)$ gleich gross sind. Weiter haben

ZÜNTI und RICAMO festgestellt⁸⁾, dass die negative Resonanz bei 2,3 MeV mit grösster Wahrscheinlichkeit eine $S_{\frac{1}{2}}$ -Resonanz ist, da bei dieser Energie die S -Potentialstreuung ungefähr -90° sein wird. Diese Kenntnisse vereinfachten die Analyse der $\sigma(\theta)$ -Messkurven wesentlich. Eine rein rechnerische Bestimmung der Phasen enthielt zu viel numerische Rechenarbeit, so dass die Ermittlung des Phasenverlaufs der Streuwellen durch Probieren erfolgte.

Die theoretische Beschreibung des Streuprozesses an Kernen mit Spin Null mit Einschluss einer Spin-Bahnpkopplung wurde von BLOCH²¹⁾ und anderen gegeben. Für Neutronenstreuung im Schwerpunkssystem wurde als differentieller Wirkungsquerschnitt

$$k^2 \sigma(\theta) = \left| \sum_l (2l+1)^{-\frac{1}{2}} [(l+1) e^{i\eta_{l+\frac{1}{2}}} \sin \eta_{l+\frac{1}{2}} + l e^{i\eta_{l-\frac{1}{2}}} \sin \eta_{l-\frac{1}{2}}] Y_l^0 \right|^2 + \left| \sum_l \left(\frac{l(l+1)}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} [e^{i(\eta_{l+\frac{1}{2}} + \eta_{l-\frac{1}{2}})} \sin (\eta_{l+\frac{1}{2}} - \eta_{l-\frac{1}{2}})] Y_l^1 \right|^2 \quad (6)$$

angegeben. Dabei bedeuten $\eta_{l \pm \frac{1}{2}}$ die Phasen der Streuwellen, l den Bahndrehimpuls und Y_l^0 und Y_l^1 die normierte und ihre zugeordnete Kugelfunktion 1. Art. Integriert man den differentiellen Querschnitt über den ganzen Winkelraum, so erhält man den totalen Streuquerschnitt σ_T :

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l [(l+1) \sin^2 \eta_{l+\frac{1}{2}} + l \sin^2 \eta_{l-\frac{1}{2}}]. \quad (7)$$

In der Nähe einer Resonanzstelle erwartet man folgenden Verlauf der Phasen:

$$\eta_{l,J} = \text{arctg} \frac{\Gamma_{l,J}/2}{E_{l,J} + \Delta_{l,J} - E} + \varphi_{l,J} \quad (8)$$

$\Gamma_{l,J}$ ist eine experimentelle, die Halbwertsbreite der Resonanz bestimmende Konstante, $E_{l,J}$ die Energie des l, J -Niveaus*) und $\varphi_{l,J}$ ist die Phase der Potentialstreuung, die natürlich auch den Abfall anderer Resonanzstellen mit denselben l und J enthalten kann. Die Veränderung von $\Gamma_{l,J}$ mit k kann vernachlässigt werden, wenn das betrachtete Energiegebiet in der Nähe der Resonanzenergie $E_{l,J}$ liegt. In diesem Falle kann $\varphi_{l,J}$ auch konstant angenommen werden.

Wie bei der Bestimmung der Resonanzstellen vorgegangen wurde, sei kurz angedeutet. Gleichung (7) und der experimentelle Verlauf von σ_T begrenzt die Grösse von J . Ist J gewählt, so kann aus dem Verlauf des differentiellen Querschnitts in der Nähe der

*) $\Delta_{l,J}$ ist eine von verschiedenen Dingen abhängige Energieverschiebung des Niveaus (siehe R. G. THOMAS, Phys. Rev. **81**, 148, 1951).

Resonanz auf den Bahndrehimpuls l geschlossen werden. Die Gleichung (8) gibt dann den Phasenverlauf in der Nähe der Resonanzstelle. Wenn man z. B. annimmt, dass der Buckel von σ_T bei 3,5 MeV von zwei sich überlappenden Resonanzstellen herrührt, zusammen mit einer starken S -Potentialstreuung, was ja durch die negative Resonanzstelle bei 2,3 MeV sich aufdrängt, so verlangt Gleichung (7) für beide Niveaus $J = 3/2$. Nimmt man für das tiefere der beiden Niveaus $l = 2$ an, so zeigt Gleichung (6), dass nur gerade Potenzen von $\cos \Theta$ vorkommen, so dass die Verteilung zu $\Theta = 90^\circ$ symmetrisch sein muss, was auch beobachtet wird. In dieser Weise wurden die Phasen zu bestimmen versucht. Als Kriterium der Resultate dienen die auf Grund dieser Phasen berechneten σ_T als auch $\sigma(\Theta)$ -Kurven.

Die mit Hilfe des totalen und differentiellen Querschnitts erhaltenen Phasen sind in Fig. 2 als Punkte eingezeichnet. Die aus-

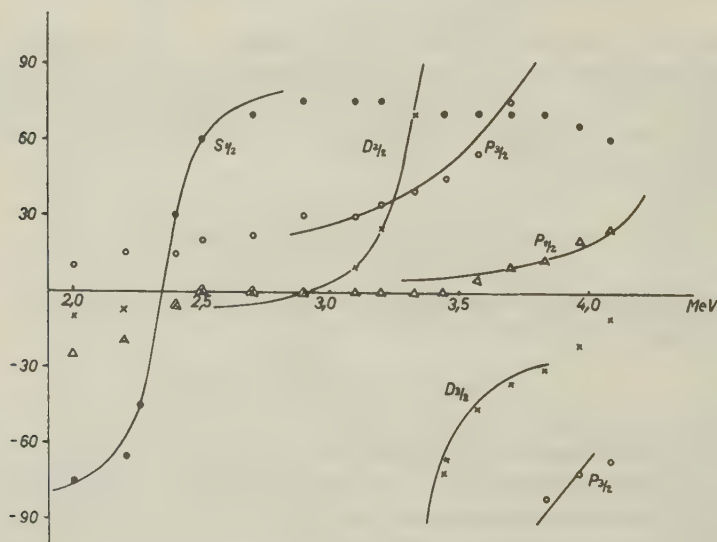


Fig. 2

Phasenverlauf der Streuwellen zwischen 2,0 und 4,1 MeV.

gezogenen glatten Kurven in den Fig. 3—16 sind die auf Grund dieser Phasenverläufe berechneten differentiellen Querschnitte. Infolge des Untergrundes ist die gemessene gegenüber der theoretischen Verteilung verschmiert. Zum Vergleich müssen daher die theoretischen Kurven mit dem gleichen Untergrund ausgeglättet werden. Die Wirkung des Untergrundes macht sich besonders bei Spitzen in der theoretischen Verteilungskurve bemerkbar, wie das

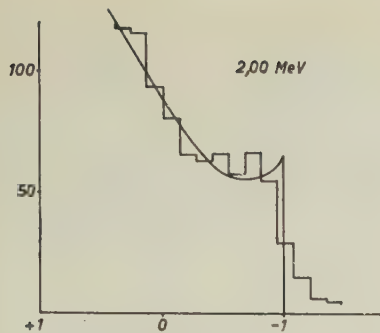


Fig. 3

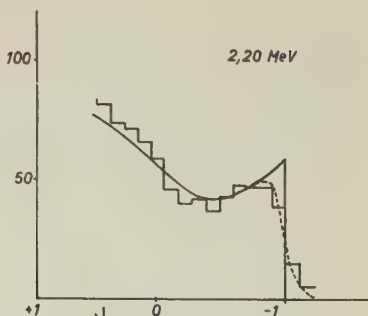


Fig. 4

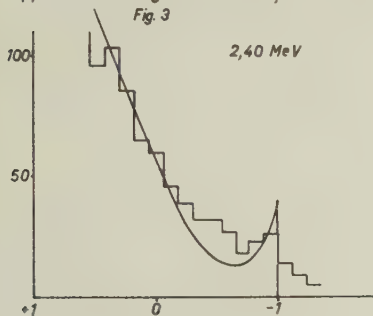


Fig. 5

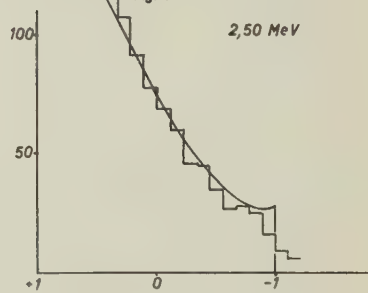


Fig. 6

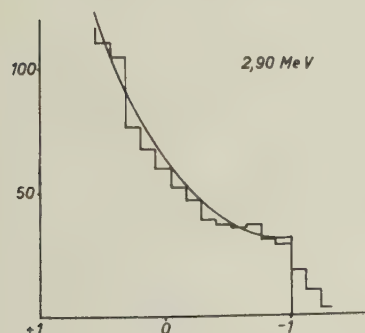


Fig. 7

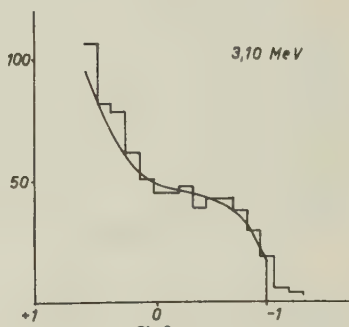


Fig. 8

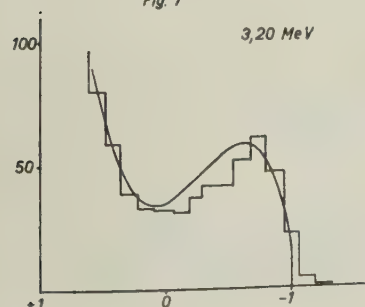


Fig. 9

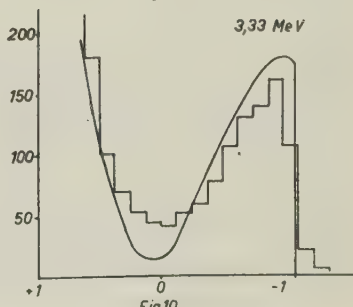


Fig. 10

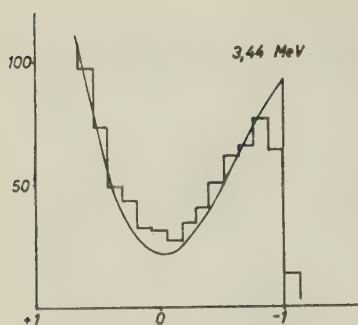


Fig. 11

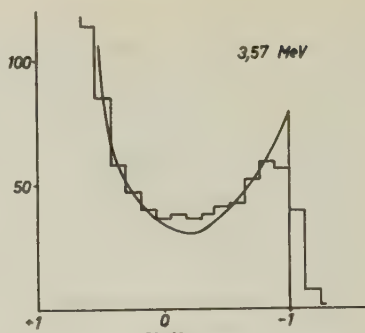


Fig. 12

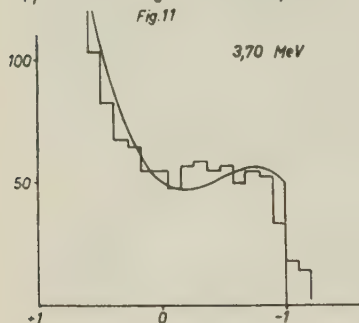


Fig. 13

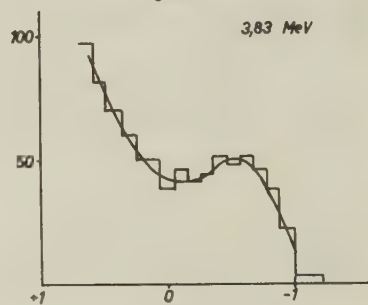


Fig. 14

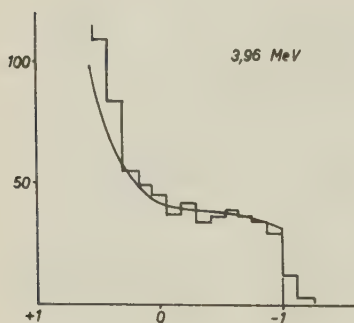


Fig. 15

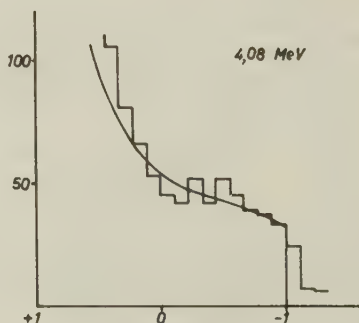


Fig. 16

Fig. 3—16.

Differentielle Wirkungsquerschnitte. Als Abszisse ist $\cos \Theta$, als Ordinate ein Viertel des Impulszahl/Kanal aufgetragen.

Stufenkurven = gemessene Werte. Glatte Kurven = gerechnete Werte.

Beispiel in Fig. 4 (gestrichelte Linie) zeigt. Die Phasen wurden, mit Ausnahme von einigen kritischen Fällen, nur bis auf 5° genau bestimmt. Dies war zulässig, da Phasenänderungen von 1° die differentiellen Querschnittskurven meistens nur sehr wenig ändern. Um den Phasenverlauf in Fig. 2 möglichst gedrängt zeichnen zu

können, wurden für die $D_{3/2}$ und $P_{3/2}$ Streuwelle die Phasen $> 90^\circ$ von -90° bis 0 eingetragen, was wohl zu keinen Missverständnissen Anlass bieten dürfte. Die ausgezogenen Kurven in Fig. 2 geben den Phasenverlauf wieder, wie er nach Gleichung (8) vorgeschrieben wird. Die Konstanten in Gleichung (8), mit deren Werten diese Kurven berechnet wurden, sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Niveau	Energie*) des Niveaus in MeV	Γ in keV	φ
$P_{1/2}$	1,9	—	—
$S_{1/2}$	2,35	180	-90°
$D_{3/2}$	3,33	220	-15°
$P_{3/2}$	3,80	800	0°
$P_{1/2}$	4,40	280	0°

Die Energieniveaus sind auf ca. 30 keV, die Halbwertsbreite Γ auf ca. 10% und die Phasen der Potentialstreuung auf ca. 5° genau. Diese relativ grosse Unbestimmtheit kommt zur Hauptsache daher, dass die Phasen lediglich durch Probieren gefunden wurden.

Die Phase der $S_{\frac{1}{2}}$ -Streuwellen erreicht den asymptotischen Wert von 90° nicht ganz, weil die Phase $\varphi_{S_{\frac{1}{2}}}$ der Potentialstreuung mit wachsendem k abnimmt. Obschon nur im Energiegebiet von 2–4 MeV gemessen wurden, lassen sich die angrenzenden Resonanzstellen bei 1,9 und 4,4 MeV ziemlich eindeutig als $P_{\frac{1}{2}}$ -Zustände erkennen. Aus der Grösse von σ_T bei 1,9 MeV muss auf $J = \frac{1}{2}$ geschlossen werden. Ein $S_{\frac{1}{2}}$ -Zustand ist auszuschliessen, da die Phase $\varphi_{S_{\frac{1}{2}}}$ der Potentialstreuung eine negative Resonanz erzeugen würde. Analoge Überlegungen führen beim 4,4-MeV-Zustand zu einem $P_{\frac{1}{2}}$ -Niveau.

Die hier identifizierten Zustände gehören dem Kern O^{17} an. Die Energien über dem Grundzustand von O^{17} werden erhalten, indem man zu den in der Tabelle aufgeführten Werten, umgerechnet auf das Schwerpunktsystem, 4,15 MeV addiert. Man kommt dann zu den Werten 5,94; 6,36; 7,28; 7,73 und 8,29 MeV. In diesem Energiebereich sind die Energien der O^{17} -Niveaus aus O^{16} (d, p) und F^{19} (d, α)-Reaktionen bekannt: sie betragen²²⁾ 5,76; 6,24; 6,89; 7,51 und 8,27 MeV**).

*) Angegeben ist die zum Niveau (s. Fig. 2) gehörige Neutronenenergie im Lab-System. Die Energie der Niveaus sind weiter unten berechnet.

**) Wegen der Unbestimmtheit der $\Delta_{l,j}$ sind unsere Energiewerte für die Niveaus nicht so sicher wie die aus den Reaktionen bestimmten Werte.

Bei der Analyse der Messergebnisse wurden $D_{5/2}$ -Wellen und Streuwellen mit höheren l und J nicht berücksichtigt. Wenn die Phasen solcher Streuwellen auch nur wenige Grad betragen würden, so könnten sie den Verlauf von $\sigma(\theta)$ beträchtlich ändern. Ausserdem ist nicht gezeigt worden, ob die Phasen in Fig. 2 die einzig möglichen sind. Bei der Analyse der p -He-Streuung durch CRITCHFIELD and DODDER²³⁾ sind z. B. zwei mit den Experimenten verträgliche Phasenverläufe angegeben worden. Wir glauben aber, dass die hier angegebenen Argumente, die bei der Wahl der Phasen benutzt wurden und die gute Übereinstimmung der berechneten und gemessenen $\sigma(\theta)$ und σ_T -Kurven für die in dieser Arbeit angegebenen Phasen sprechen.

Die Verfasser möchten Prof. H. H. BARSCHALL und Dr. R. K. ADAIR und Drs. R. RICAMO und W. ZÜNTI für die Zustellung der σ_T -Ergebnisse, Herrn Prof. M. FIERZ für wertvolle Diskussionen danken.

Literaturverzeichnis.

- 1) W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON und W. A. FOWLER, Rev. Mod. Phys. **22**, 291 (1950).
- 2) Siehe z. B. FESHBACH, PEASLEE und WEISSKOPF, Phys. Rev. **71**, 145 (1947).
- 3) R. K. ADAIR, Rev. Mod. Phys. **22**, 249 (1950).
- 4) C. K. BOCKELMAN, Phys. Rev. **80**, 1011 (1950).
- 5) C. K. BOCKELMAN, D. W. MILLER, R. K. ADAIR und H. H. BARSCHALL, Phys. Rev. **84**, 69, 1951.
- 6) FREIER, FULK, LAMPI und WILLIAMS, Phys. Rev. **78**, 508 (1950).
- 7) RICAMO, ZÜNTI, BALDINGER und HUBER, Helv. Phys. Acta **23**, 508 (1950).
- 8) W. ZÜNTI und R. RICAMO, Helv. Phys. Acta **24**, 419 (1951).
- 9) H. H. BARSCHALL und M. H. KANNER, Phys. Rev. **58**, 590 (1940).
- 10) BALDINGER, HUBER und STAUB, Helv. Phys. Acta **11**, 245 (1938).
- 11) J. H. COON und H. H. BARSCHALL, Phys. Rev. **70**, 592 (1946).
- 12) J. H. COON und R. F. TASCHKE, Phys. Rev. **76**, 710, 1949.
- 13) BALDINGER, HUBER, ZÜNTI und RICAMO, Helv. Phys. Acta **23**, 503 (1950).
- 14) B. ROSSI und H. H. STAUB, Ionization Chambers and Counters: Experimental Techniques, McGRAW-HILL, New York, 1949, p. 135.
- 15) BICHSEL, HÄLG, HUBER und STEBLER, Helv. Phys. Acta **25**, 119 (1952).
- 16) A. O. HANSON und J. L. MCKIBBEN, Phys. Rev. **72**, 673 (1947).
- 17) D. L. LIVESEY und D. H. WILKINSON, Proc. Roy. Soc. A. **195**, 123 (1948).
- 18) BALDINGER, HÄLG, HUBER und STEBLER, Helv. Phys. Acta **19**, 423 (1946).
- 19) W. C. ELMORE, Nucleonics **2**, March 1948, p. 16.
- 20) E. BALDINGER und R. CASALE, Helv. Phys. Acta **21**, 172 (1948).
- 21) F. BLOCH, Phys. Rev. **58**, 829 (1940).
- 22) H. B. BURROWS, C. F. POWELL und J. ROTBLATT, Proc. Roy. Soc. **209**, 478 (1951).
- 23) C. L. CRITCHFIELD und D. C. DODDER, Phys. Rev. **76**, 602 (1949).

Die Energie und Winkelverteilung der Lithium- γ -Strahlung

von H. Nabholz, P. Stoll und H. Wäffler*) (ETH., Zürich).

(25. X. 1951.)

Zusammenfassung. 1. Das Spektrum der im Prozess $\text{Li}^7(\text{p}, \gamma)\text{Be}^8$ entstehenden Gammastrahlung wird unter Verwendung dicker Lithiumschichten als Target mit Hilfe der Photospaltung des Kohlenstoffes $\text{C}^{12}(\gamma, \alpha)2\alpha$ untersucht.

Zum Nachweis dieser Kernphotoreaktion wird die photographische Methode benützt. Es treten die bereits bekannten γ -Linien von 17,6 und 14,7 MeV Quantenenergie auf. Daneben sind noch Andeutungen einer weiteren Linie bei $\approx 12,5$ MeV vorhanden.

Die Messung der Winkelverteilung der beiden intensivsten Komponenten (17,6; 14,7 MeV) ergibt für die bei 440 keV Protonenenergie auftretende Resonanzstrahlung eine innerhalb 20% isotrope Richtungsverteilung.

2. Die Messungen der Winkelverteilung für die Gesamtstrahlung mit Hilfe einer Koinzidenzanordnung bestätigen die Ergebnisse der photographischen Methode. Bei einer Protonenenergie von 550 keV und dicker Target macht sich die nichtresonante, sehr stark anisotrope γ -Strahlung bereits bemerkbar.

Für die resonante Strahlung kann S -Einfang der einfallenden Protonenwelle angenommen werden, während die Anisotropie der nichtresonanten Strahlung nur durch P und eventuell D -Einfang erklärt werden kann.

§ 1. Einleitung.

1. Problemstellung.

Die harte γ -Strahlung, die durch Resonanzeinfang von Protonen am Lithium ($\text{Li}^7(\text{p}, \gamma)\text{Be}^8$) entsteht, wird häufig zur Erzeugung von Kernreaktionen (γ, n ; γ, p ; γ, α -Prozesse) verwendet.

Über das Spektrum dieser γ -Strahlung hatte man während langer Zeit nur ungewisse, zum Teil widersprechende Angaben. Es erschien daher von Interesse, dasselbe auch noch mit einer anderen als den allgemein üblichen Methoden aufzunehmen. Zudem gestattet die verwendete Messanordnung, die Winkelverteilung der einzelnen γ -Linien in bezug auf die Protoneneinfallrichtung zu messen. Die Resultate dieser Untersuchungen ermöglichen deshalb, Schlüsse über die Zustände des Be^8 -Kernes zu ziehen.

*) Jetzt an der Universität Zürich.

2. Übersicht der bekannten Resultate.

a) Messungen des Spektrums.

Die älteren Arbeiten wurden ausnahmslos mit Wilson-Kammern (W. K.) durchgeführt. Diese W. K.-Messungen zeigten zum Teil widerspruchsvolle Resultate. Im allgemeinen wurden Compton-elektronen und -paare in einem dünnen Sekundärstrahler ausgelöst. Die Energie derselben wurde aus der Krümmungsmessung der Elektronenbahnen im Magnetfeld bestimmt.

GAERTTNER und CRANE¹⁾²⁾ fanden Linien bei 17; 14,5; 11,5 und möglicherweise 8,5 MeV.

Durch Verbesserung der W.K.-Methode (es werden nur Elektronenpaare ausgemessen) konnten von DELSASSO, FOWLER und LAURITSEN³⁾ 2 Linien sichergestellt werden, nämlich

$$\begin{array}{r} 17,1 \pm 0,5 \text{ MeV} \\ 14 \qquad \qquad \text{MeV} \end{array}$$

wobei keine Strahlung zwischen 2 und 10 MeV beobachtet wurde.

Einen grossen Fortschritt in der Messtechnik bedeutet die Anwendung des Paarspektrographen durch WALKER und McDANIEL⁴⁾.

Die Messungen dieser Autoren bestätigte die seit langem vermutete 14,8 MeV-Linie mit einer Messgenauigkeit von

$$\begin{array}{r} 17,6 \pm 0,2 \text{ MeV} \\ 14,8 \pm 0,3 \text{ MeV} \end{array}$$

Die 14,8 MeV γ -Linie ist allerdings beträchtlich breiter als das experimentelle Auflösungsvermögen, so dass WALKER und McDANIEL die Vermutung aussprachen, dass mehrere unaufgelöste Linien vorhanden seien.

Das Verhältnis der Intensitäten $J_{14,8}/J_{17,6}$ ändert sich mit der Energie der einfallenden Protonen und beträgt für $E_p = 0,46 \text{ MeV}$ 0,54⁴⁾ *).

Zusammenstellung

der hauptsächlichsten Daten der $\text{Li}^7(p, \gamma)$ -Reaktion⁵⁾.

$\text{Li}^7(p, \gamma)$ -Resonanz $441,4 \pm 0,5 \text{ keV}$

Verhältnis der Intensitäten bei	14,8	MeV (vgl. 4))	33 %
$E_p = 460 \text{ keV}$ und dünner Target	17,6		
			67 %

Ausbeute Y (Quantenzahl/Proton) = $1,9 \cdot 10^{-8}$

Halbwertsbreite der Resonanzkurve = 12 keV

Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{Res.}} = 6,0 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$

*) Laut mündlicher Mitteilung von Prof. McDANIEL ist dieses Intensitätsverhältnis für $\Theta = 41^\circ$ (Θ = Winkel zwischen der Richtung des Protonenstrahls und der Emissionsrichtung des γ -Quants) bestimmt worden.

b) Die Winkelverteilung der Lithium- γ -Strahlung.

Wenn man von den ersten Messungen von AGENO⁶⁾ u. a. absieht, die Isotropie ergeben, so bleibt die Arbeit von DEVONS und HINE⁷⁾, in welcher die Winkelverteilung der γ -Strahlung leichter Kerne experimentell und theoretisch untersucht wird.

Mit einer 2×2 fachen Koinzidenzanordnung (um 180° schwenkbar, siehe Abschnitt § 6) werden die in einem Sekundärstrahler ausgelösten Paar- und Comptonelektronen gezählt.

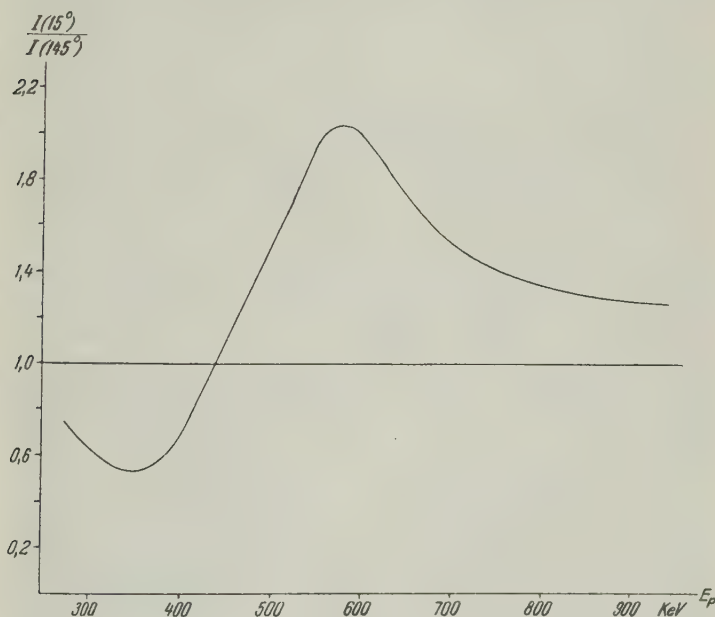


Fig. 1.

Abhängigkeit der Winkelverteilung der Lithium- γ -Strahlung von der Protonenenergie nach DEVONS und HINE (vgl. 7)).

Dabei wird für eine Protonenenergie von 500 keV bei dicker Target Symmetrie in bezug auf 90° bei einer max. Anisotropie von $\pm 7\%$ gefunden.

Mit dünner Target ist die Winkelverteilung in Funktion der Protonenenergie gemessen worden, dabei zeigt sich eine starke Spannungsabhängigkeit.

Als Hauptresultat, ebenfalls mit dünner Target (12 keV), kann der Gang des festen Verhältnisses der Intensitäten $I_{15^\circ}/I_{145^\circ}$ (siehe Fig. 1) gewertet werden.

In der Nähe der Resonanz wird gerade Isotropie erreicht; bei $E_p > E_{\text{Resonanz}}$ Überschuss in der Vorwärts-Richtung, und umgekehrt bei $E_p < E_{\text{Resonanz}}$.

Die Änderung der Winkelverteilung der Lithium- γ -Strahlung bei Resonanz und dünner Target haben DEVONS und LINDSEY⁸⁾ in einer weiteren Arbeit mit einem Paarspektrographen untersucht und fanden Isotropie innerhalb 20%.

Zusätzlich werden für die beiden Fälle des als *S*- oder *P*-Welle einfallenden Protons alle Möglichkeiten für die Winkelverteilung der resultierenden γ -Strahlung berechnet und diskutiert.

B. D. McDANIEL und M. B. STEARNS*) fanden mit Hilfe eines Paarspektrographen ebenfalls Isotropie der 440 keV-Resonanzstrahlung. Bei einer Protonenenergie von $1,15 \pm 0,05$ MeV und einer Targetdicke von 250 keV (nichtresonante Strahlung) zeigte sich sowohl für die 17,6 MeV- als auch für die 14,7 MeV-Komponente eine starke Anisotropie.

c) Die Photospaltung des Kohlenstoffes (C^{12}).

Der in der vorliegenden Arbeit benützte Spaltungsprozess des Kohlenstoffkerns durch die Lithium- γ -Strahlung wurde erstmals von H. HÄNNI**) beobachtet.

Eine eingehende sowohl theoretische als auch experimentelle Untersuchung dieser Reaktion haben TELEGI und ZÜNTI³³⁾ durchgeführt.

§ 2. Experimentelle Anordnung.

a) Die Hochspannungsapparatur.

Die Bestrahlungen wurden mit einer bereits¹⁹⁾ beschriebenen Hochspannungsapparatur ausgeführt.

Daten: Protonenstrom 400 μA .

Max. Protonenenergie $E_p = 550$ keV.

Bei der Bestrahlung für die Untersuchung der (γ, α) -Prozesse ist es von grosser Wichtigkeit, dass neben den gewünschten γ -Strahlen keine Neutronen auftreten. Da die (n, α) -Wirkungsquerschnitte gross sind im Vergleich zu denen der (γ, α) -Prozesse, so wirkt in den photographischen Platten auch ein kleiner Neutronenbeitrag sehr schnell störend.

Das Deuterium, als natürliche Beimischung des gewöhnlichen Wasserstoffs, erzeugt durch die Reaktion $\text{Li}^7(d, n) \text{Be}^8$ schnelle

*) Herrn Prof. McDANIEL, Cornell University, Ithaca, möchten wir für die Überlassung der brieflichen Mitteilung vor der Publikation bestens danken.

**) H. HÄNNI, Diplomarbeit, unveröffentlicht.

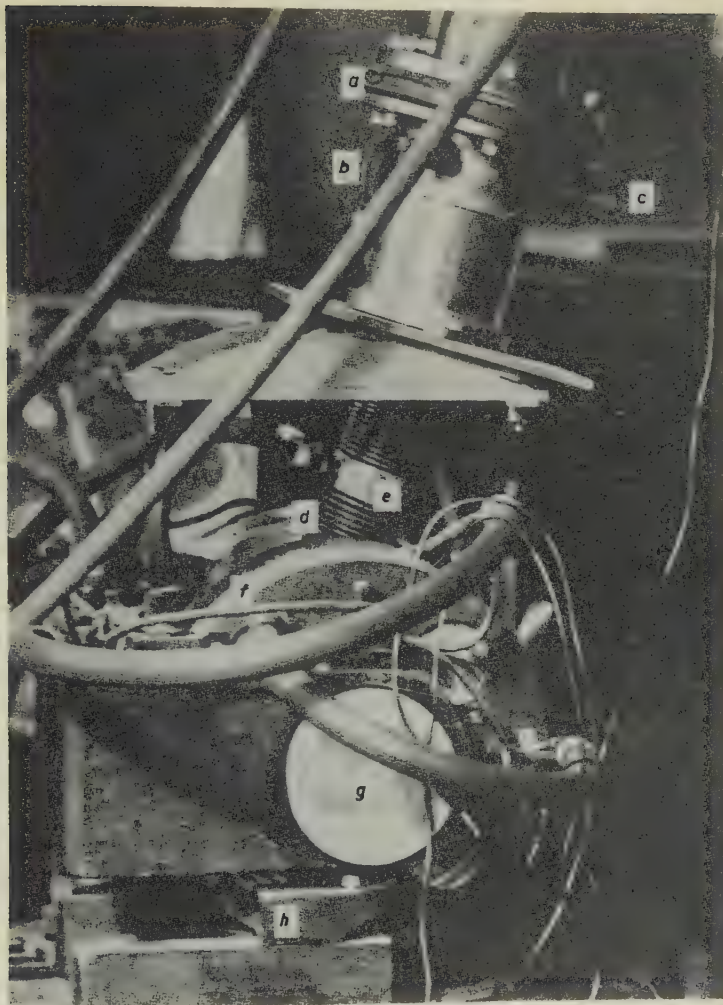


Fig. 2.

Ablenkammer.

- a* = Isolierter Zwischenflansch. Gegenspannung und Permanentmagnete zur Protonenstrommessung.
- b* = Stromzuführung für Aufdampfvorrichtung.
- c* = Schauglas. (Kontrolle des Protonenstrahles).
- d* = Tombak.
- e* = Wasserkühlung (Kühlmantel, eingelassen in Tombak), Deutonen- und Molekülonenauffänger.
- f* = Magnet mit Wasserkühlung.
- g* = Eisenkern des Magneten.
- h* = Justierungsvorrichtung.

Neutronen mit einer maximalen Energie von 14 MeV. Durch die magnetische Ablenkung des Protonenstrahles um 25° werden die Deutonen so abgelenkt, dass sie nicht mehr auf die Target auftreffen können. Damit fällt der Beitrag der störenden Neutronen dahin. (Siehe Fig. 2.)

Die 8,85 MeV α -Teilchen aus der Reaktion $\text{Li}^7(p, \alpha)\text{He}^4$ können in der Target Neutronen von maximal 4,64 MeV auslösen ($\text{Li}^7[\alpha, n]\text{B}^{10}$), spielen aber für die Ausmessung der Photospaltung des Kohlenstoffes keine Rolle.

b) Target.

Für die Plattenbestrahlungen wurde im Vakuum Li-Metall aufgedampft. Bei den Zählrohrmessungen (siehe § 4), für welche die Intensität mehr als ausreichend war, haben wir Li_2O verwendet, das den Vorteil grosser Haltbarkeit aufwies.

Die Form des Auffängers wurde dem Versuch angepasst. Der die Lithiumschicht tragende Boden war unter 45° zum Protonenstrahl geneigt, so dass die γ -Strahlen in den Richtungen 0° , 90° , 45° und 135° nur Material von der Dicke x oder $x/\sqrt{2}$ durchsetzen mussten.

Um die photographischen Platten vor weicher γ -Strahlung (Bremsstrahlung beschleunigter Elektronen) zu schützen, wurde der ganze Auffänger, mit Ausnahme des obersten Teils, mit einer 15 mm dicken Bleischicht ausgelegt.

Der Halter für die Kreisblende war zurückziehbar ausgebildet (Gummidichtung), damit der Ofen für das Aufdampfen von Lithium ungehindert vor die gekühlte Targetfläche gebracht werden konnte.

Ein Schauglas gestattete die Kontrolle des Aufdampfens sowie die Einstellung des Protonenstrahles. (Siehe Fig. 3.)

c) Spannungskalibration mit Hilfe der Anregungskurve für dicke Schicht²⁰⁾.

Mit Hilfe einer zweifachen Koinzidenzanordnung (siehe § 6) wurde die Anregungskurve für dicke Target aufgenommen und mit den Kurven von FOWLER u. a. verglichen. (Def. des Resonanzpunktes 440 keV).

FOWLER u. a.²⁰⁾ benutzten für die Messung einen beinahe monochromatischen Protonenstrahl. Es war daher zu erwarten, dass sich unsere Kurve wegen der starken Inhomogenität der Protonen unterscheiden wird. (Überschuss von energieärmeren Protonen.) Die Streuung in der Protonenenergie dürfte einige keV betragen.

Eine Verbesserung in dieser Hinsicht könnte nur durch elektrostatische und magnetische Ablenkung geschehen, wobei dann auf grosse Protonenströme verzichtet werden müsste. Wegen der er-

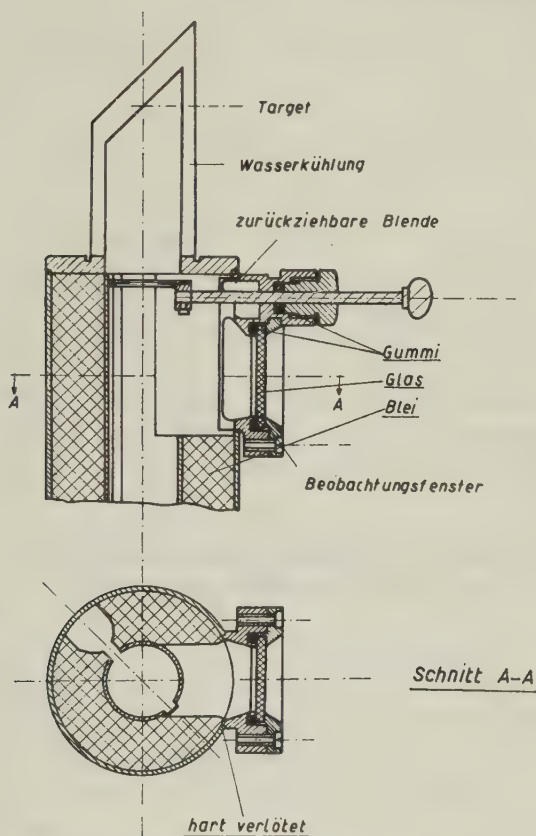


Fig. 3.

Target für die Plattenbestrahlungen.

wählten Inhomogenität des Protonenstrahles konnten auch keine Messungen mit dünner Target ausgeführt werden.

Messung der γ -Intensität.

Für die Ausmessung der Quantenzahl wurde ein Bleizählrohr mit Wismut-Einsatz von 14 mm Wandstärke (Sättigungsdicke für die von der 17 MeV γ -Linie ausgelösten Elektronen) benutzt. (Dim. $50 \times 18 \text{ mm}^2$.)

Mit Hilfe der Messungen von FOWLER²⁰⁾ u. a. konnte dieser γ -Monitor absolut geeicht werden. Derselbe wurde hauptsächlich zur Dosierung der Plattenbestrahlung verwendet.

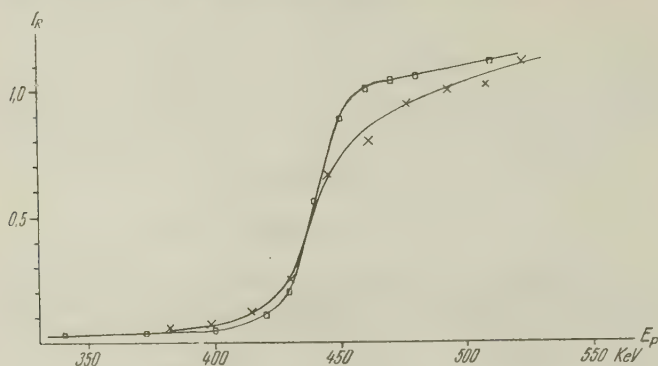


Fig. 4.

Anregungskurve für dicke Target. Spannungskalibration.

- = Messung von FOWLER u. a. (Rev. Mod. Phys. **20**, 243), die zur Eichung benützt wird.
 x = Eigene Messung.

§ 3. Die Ausmessung des Energiespektrums der Lithium- γ -Strahlung mit Hilfe der photographischen Methode.

a) Methode.

Als „Spektrometer-Reaktion“ wurde die Spaltung des C^{12} in 3 α -Teilchen verwendet⁹⁾.



E_i = Energie von α_i ;

$\sum_1^3 E_i$ = Totale Energie des C^{12} -Sternes;

$$\sum_1^3 E_i + Q_B = \left(\sum_1^3 E_i + 7,3 \right) \text{ MeV} = h \cdot \nu \quad (2)$$

Der Mechanismus dieses (γ, α) -Prozesses ist von VERDE und TELEGI eingehend untersucht worden¹⁰⁾

Der Wirkungsquerschnitt der vorliegenden Reaktion hat bei 18 MeV ein erstes Maximum (10^{-28} cm^2) und fällt gegen kleinere Energien stark ab¹¹⁾¹⁷⁾.

Messungen mit der Lithium- γ -Strahlung ergeben¹²⁾¹³⁾ einen Gesamtquerschnitt $\sigma_{(17,5 + 14,8)} = 0,8 \pm 0,3 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$.

(Die Genauigkeitsgrenze wird stets durch die Absolutmessung der γ -Quantenzahl limitiert.)

Kern-Photoplatten (Kodak NTla [200 μ dick]) wurden unter verschiedenen Winkeln (0° , 45° , 90° , 135°) zum Protonenstrahl in definierter Geometrie der Lithium- γ -Strahlung ausgesetzt. Dadurch erhält man zugleich auch die Winkelverteilung der einzelnen Komponenten des Lithium- γ -Spektrums.

Die NTla-Platte erwies sich für unsere Versuche wegen ihrer geringen γ -Empfindlichkeit als besonders geeignet.

Die Spurenqualität ist gut; zum Beispiel feinkörniger als in der gebräuchlicheren E_1 -Platte der Ilford Comp.*).

Die Empfindlichkeiten verschiedener Lieferungen von NTla-Platten schwanken allerdings sehr stark. Durch geeignete Entwicklungsmethoden konnten jedoch die Protonenspuren beinahe zum Verschwinden gebracht werden. (Siehe Abschnitt b.)

Das Absuchen, sowie das Ausmessen der Platten wurde mit binokularen Mikroskopen vorgenommen, wobei folgende Optik verwendet wurde:

Sucher: Objektiv Fluoritsystem 95:1, A = 1,32.

Okular 8 \times .

Messung: Objektiv Fluoritsystem 95:1, A = 1,32.

Mess-Okular 15 \times .

Die Eichung des Mess-Okulars erfolgte mit einer Strichplatte (Leitz).

Es wurden folgende Bestimmungsstücke gemessen:

Koord. des Ereignisses.

Horizontalprojektion l' (Skalenteile).

Vertikalprojektionslänge (Höhe) h (μ).

Winkel zwischen γ -Richtung und den einzelnen α -Teilchen des C^{12} -Sternes.

Für die Reichweite l einer Spur gilt die Beziehung:

$$l = (l'^2 + (h \cdot S)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Messgenauigkeit.

Die Messfehler horizontaler Spuren sind durch die Korngrösse, Korndichte und Dichteschwankungen der Emulsion bedingt. (Für ein α -Teilchen mittlerer Energie beträgt dieser $\approx 3\%$ aus der Halbwertsbreite der Energieverteilung der U - α -Teilchen.)

*) Wir möchten Herrn Dr. R. H. HERZ, dem Leiter der Versuchsabteilung der Kodak Research Comp., Harrow (England) für die freundliche Überlassung diverser Versuchsemulsionen auch an dieser Stelle bestens danken.

Kennt man die Unsicherheit der Horizontalprojektion $\Delta l'$, Vertikalprojektion Δh und der Schrumpfungsmessung ΔS , dann berechnet sich der totale Messfehler der Reichweite l zu:

$$\Delta l = \frac{l' \Delta l'}{l} + \frac{S^2 h \Delta h}{l} + \frac{h^2 S \Delta S}{l} \quad (\text{vgl. } 33) \quad (4)$$

b) *Die Entwicklung der NTla-Platten*^{14) 15)}.

Das Ziel, das erstrebt wird, ist die Herabsetzung des „Backgrounds“ und Eliminierung der Protonenspuren bei guter Qualität der α -Spuren.

1. Entwicklungsvorschrift I: (für 200 μ dicke Emulsionen). Entwickler ID19.

Verdünnung 1:3 (dest. H_2O)

- | | | | |
|----------------------|-------|---------|--|
| 1. Kaltbad | 4° C | 45' | Ruhe. |
| 2. Warmbad | 18° C | 35'–40' | Schaukelbewegung. |
| 3. Unterbrechungsbad | | 10' | 2% Essigsäure. |
| 4. Fixierung | | 4–5 h | 30% Natriumthiosulfat.
Rotierende.
Bewegung des Fixierbades. |
| 5. Wässerung | | 3 h | Nachher langsames Trocknen. |

Nach dieser Entwicklungsvorschrift I konnte eine genügende Durchentwicklung der 200 μ NTla-Platte erreicht werden. Die Unterscheidbarkeit zwischen α -Teilchen und Protonen bleibt durchwegs sehr gut; teilweise waren die Protonenspuren überhaupt nicht mehr sichtbar. Wegen des kleinen Wirkungsquerschnittes der Kohlenstoffspaltung wurden die Platten bis zu 60 Std. $1,6 \cdot 10^9$ Quanten/cm² bestrahlt, so dass der Untergrund sehr stark wurde. Für die Ausmessung wirkt sich dieser Umstand sehr hindernd aus, so dass verschiedene Methoden ausprobiert wurden, um eine Aufhellung zu erreichen.

a) *Nachfixieren.*

5–7 Std., mit 30% Hypo. (24 Std. alt). Resultat: Schwache Aufhellung bei nachlassender Spurenqualität.

b) *Auswaschung in verdünnter HCl-Säure und Nachfixieren.*

HCl konz.: 30% HCl. Verdünnung 1:1200, Vol. m. mit H_2O dest. 30' in verd. HCl; 90' Nachfixieren.

Resultat: Die Schicht wird durchsichtiger. Keine Schädigung der α -Spuren.

Diese Methode wurde oft benutzt.

Als weitere Möglichkeit wurde die Entwicklung mit Essigsäurezusatz verwendet¹⁶⁾.

2. Entwicklungsvorschrift II.

Entwickler: 1 Teil ID19, $2\frac{1}{2}$ Teile H_2O , $\frac{1}{2}$ Teil 1% Essigsäure.
Entwicklung nach Vorschrift I.

Resultat: Die durch den Essigsäurezusatz bedingte härtere Entwicklung verbessert die Verhältnisse in bezug auf den Untergrund; die α -Spuren sind noch von guter Qualität; Protonen stärker geschwächt als unter Vorschrift I.

c) *Schrumpfungsmessung; Reichweite – Energie – Beziehung.*

Die Schrumpfung wurde mit Hilfe der Tastuhr mehrmals gemessen. Sie schwankt sehr stark ($S = 2,35$ — $2,65$) von Lieferung zu Lieferung. Jede Platte (1×2 Zoll) wurde vor der Behandlung in 3 Stücke zerschnitten, und das mittlere für die Schrumpfungsmessung benützt.

Für die Reichweite – Energie – Kurve wurden mit Po, U und Sm- α -Teilchen (Po: 5,4 MeV; U^{238} : 4,18 MeV; U^{234} : 4,76 MeV; Sm: 2,4 MeV) Eichpunkte gemessen und dabei festgestellt, dass dieselben für die NTla-Platte auf die Reichweite – Energie – Kurve von LATTES u. a.¹⁸⁾ zu liegen kommen.

§ 4. Das Gesamtspektrum.

a) *Auswertung und Diskussion der Messungen über das Spektrum der Lithium- γ -Strahlung.*

1. Versuchsanordnung.

NTla-Photoplatten wurden unter verschiedenen Winkeln (0° , 45° , 90° , 135°) der Lithium- γ -Strahlung ausgesetzt. Die entsprechende Behandlung und Entwicklung der Platten (vgl. § 3) ermöglichte es, die Bestrahlungsdauer auszudehnen, so dass auf 1 cm^2 Plattenfläche 40—50 Kohlenstoffsterne entfallen.

2. Auswertungsmethode.

Aus der Tatsache, dass der Impuls des γ -Quants im Vergleich zu den Impulsen der ausgesandten Alphateilchen sehr klein ist, ergibt sich eine Möglichkeit, die Zuverlässigkeit der Messdaten zu überprüfen. Die Impulserhaltung als Kontrolle wurde bei sämtlichen Sternen ausgeführt, die eine Gesamtenergie $E_T < 6,5\text{ MeV}$

aufweisen und zusätzlich bei solchen Exemplaren, bei denen sich eines der 3 Alphateilchen (infolge starker Verkürzung) nur ungenau ausmessen liess.

Die Berechnung der Impulskomponenten vor der Schrumpfung erfolgt nach dem folgenden Formelschema, wobei zu den üblichen Bestimmungsstücken l' , h und S die Winkel α_i , die die Alpha-spuren zu einer festen Richtung bilden, dazukommen. Als Einheit des Impulses wird der Impuls eines Alphateilchens von 1 MeV eingeführt.

$$\begin{aligned} p_x^{(i)} &= l'_{(i)} (E_i)^{\frac{1}{2}} \cos \alpha_i / l_i \\ p_y^{(i)} &= l'_{(i)} (E_i)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha_i / l_i \\ p_z^{(i)} &= h_{(i)} S (E_i)^{\frac{1}{2}} / l_i \end{aligned} \quad (5)$$

Der Betrag des Gesamtimpulses lässt sich daraus berechnen.

Bei der Kontrolle darf der Betrag des Gesamtimpulses den vierfachen Betrag des γ -Quantimpulses, der für die 17,6 MeV γ -Linie in den gewählten Impulseinheiten 0,2 beträgt, nicht übersteigen. Sterne, die dieser Bedingung nicht genügen, werden nicht in die Statistik aufgenommen.

TELEGDI und ZÜNTI³³⁾ beschreiben in ausführlicher Weise die Hilfsmittel, die zur Impulskontrolle und Auswertung benützt werden können.

3. Das Auflösungsvermögen.

Das Auflösungsvermögen der verwendeten photographischen Methode kann mit demjenigen des von WALKER und McDANIEL⁴⁾ verwendeten Paarspektrographen verglichen werden. Hierzu lässt sich die intensive 17,6 MeV-Komponente verwenden. Bei Berücksichtigung der Wirkungsquerschnitte für Paarerzeugung und Kohlenstoffspaltung sowie des Auflösungsvermögens des Paarspektrographen kann aus den Messungen der obigen Autoren die Vergleichskurve konstruiert werden. Diese ist in Figur 5 strichpunktirt eingezeichnet, zusätzlich sind die Ergebnisse in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

	$E (\gamma)$	Γ (MeV)	E_P (MeV)	Targetdicke
Paarspektrograph . . .	17,6	1	0,46	150 keV
Photospaltung C ¹² . . .	17,6	1,4	0,44—0,40	dicke Target

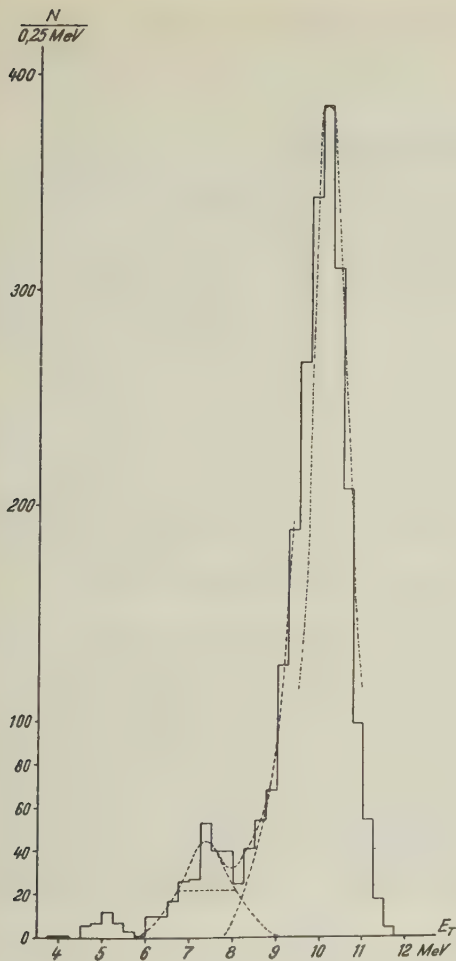


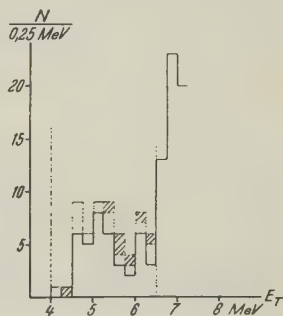
Fig. 5.

Gesamtspektrum $\text{Li}^7(p, \gamma) \text{Be}^8$. $N_T: 1927 \quad h\nu = E_T + 7,3 \text{ MeV.}$ Strichpunktierte Kurve: Vergleich mit den von WALKER und Mc DANIEL⁴⁾ ausgeführten Messungen.

Fig. 6.

Resultate der Impulskontrolle der Sterne
 $E_T \leq 6,5 \text{ MeV.}$

Erklärungen zu der Figur:

schwarz ausgezogen: $p < |0,6|$ schwarz punktiert: $|0,6| \leq p \leq |0,8|$ schwarz schraffiert: $p > |0,8|$ (in der Statistik weggelassen).

Die Gegenüberstellung in Tabelle 1 zeigt, dass in diesem Energiebereich beide Methoden in bezug auf das Auflösungsvermögen nahezu ebenbürtig sind.

4. Das Spektrum.

Die Verteilung der Sterne zeigt deutlich 2 Maxima, die unkorrigiert bei $E_T = 10,15$ MeV und $7,2$ MeV liegen.

Mit Hilfe der sehr gut bekannten $17,55$ MeV γ -Linie lässt sich die Reichweite-Energiekurve kontrollieren, wobei diese um 1% nach oben korrigiert werden muss. Das kleinere Maximum bei $E_T = 7,3$ MeV (korr.) $h\nu = 14,6$ MeV stimmt dann gut mit der $14,7$ MeV-Linie überein.

Diskussion der Sterne mit $E_T \leq 6,5$ MeV.

Sämtliche Sterne mit $E_T \leq 6,5$ MeV werden der Impulskontrolle unterworfen. Im Blockdiagramm sind einzeln alle Sterne angeführt, wobei diejenigen, die den vorgeschriebenen Impulskriterien nicht genügen, gestrichelt eingezeichnet sind.

Die Achse der Verteilung dieser kontrollierten Ereignisse mit $E_T \leq 6,5$ MeV liegt bei ungefähr $5,2$ MeV. Mit der Annahme von gestreuten Quanten können diese kleinen Sterne nicht erklärt werden, wie mit der nachfolgenden Versuchsanordnung bewiesen wurde: Bei einer Bestrahlungsserie wurden die Platten im Gegensatz zu den üblichen dünnen Papierumhüllungen in 5 mm dicke Bleikassetten eingepackt. Die Gegenüberstellung von je 1000 Sternen zeigte eindeutig, dass die kleinen Exemplare innerhalb des statistischen Fehlers mit gleicher Häufigkeit und an der gleichen Stelle auftraten.

Als weitere Annahme bleibt noch die Möglichkeit, dass eine schwache Gammalinie von $12,5$ MeV vorhanden ist, die auf ein Be^8 -Niveau von $4,9$ MeV führen könnte, das bereits durch GREEN und GIBSON^{21) 22)} durch Ausmessung des Neutronenspektrums der $\text{Li}^7(d, n) \text{Be}^8$ -Reaktion bekannt ist. Zusätzlich fanden BENNETT u. a.^{35) 39)} γ -Strahlen von $4,9$ MeV, die als Übergänge vom $4,9$ MeV-Niveau in den Grundzustand interpretiert werden müssen.

Über die Intensitätsverhältnisse dieser möglichen Komponente können nur Abschätzungen gemacht werden, da der Verlauf des Wirkungsquerschnittes der C^{12} -Spaltung bei diesen Quantenenergien schlecht bekannt ist; sie dürfte aber im Mittel ~ 4 mal schwächer sein als die $14,7$ MeV-Komponente. (Abschätzung aus dem Gesamtspektrum 0° , 45° , 90° , 135°).

5. Zusammenfassung der Resultate.

Die 17,6 MeV-Komponente (Übergang in den Grundzustand des Be^8) eignet sich als Testlinie für den Vergleich verschiedener Methoden der γ -Spektroskopie in diesem Energiebereich.

Das Maximum der Verteilung bei $E_T = 7,3$ MeV entspricht der 14,7 MeV-Linie, die auf das bekannte 2,9 MeV-Niveau des Be^8 führt. Die Linienbreite Γ der 14,7 MeV-Linie liegt unter dem von WALKER und McDANIEL⁴⁾ angegebenen Wert von 2,1 MeV und dürfte wegen der Abnahme des Wirkungsquerschnittes der C^{12} -Spaltung nach kleineren Quantenenergien, die eine zusätzliche Verzerrung der gemessenen Spektren bewirkt, $\leq 1,8$ MeV sein.

Zusätzlich sei noch erwähnt, dass GREEN und GIBSON²²⁾ ein weiteres Niveau im Be^8 bei 4,05 MeV finden, so dass es grundsätzlich nicht ausgeschlossen wäre, dass bei 13,6 MeV im Spektrum eine weitere Linie vorhanden sein könnte, die aber niemals mit dem bestehenden experimentellen Auflösungsvermögen von der 14,8 MeV-Komponente getrennt werden könnte.

b) Verlauf des Wirkungsquerschnittes der Kohlenstoffspaltung

$\text{C}^{12}(\gamma, \alpha) 2\alpha$ mit der Quantenenergie.

Die Messungen von WALKER und McDANIEL mit dem Paarspektrographen wurden unter einem Winkel von 40° ²³⁾ durchgeführt. Photoplaten, die unter 45° bestrahlt und ausgemessen worden sind, liefern dasselbe Spektrum aus der Photospaltung des Kohlenstoffes. Der direkte Vergleich ermöglicht es, den Gang des Wirkungsquerschnittes der Kohlenstoffspaltung bei Quantenenergien von 17,6 und 14,7 MeV anzugeben, bei einer mittleren Protonenenergie von 440 keV

$$\frac{\sigma(14,7)}{\sigma(17,6)} = 0,24 \pm 0,03.$$

Aus dem gesamten Wirkungsquerschnitt der Kohlenstoffspaltung mit der Lithium- γ -Strahlung ($\sigma_{\text{total}} = \sigma(17,5) + \sigma(14,7) = 8 \pm 3 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2$ vgl. 13) berechnet sich der Wert von $\sigma(14,7)$ zu

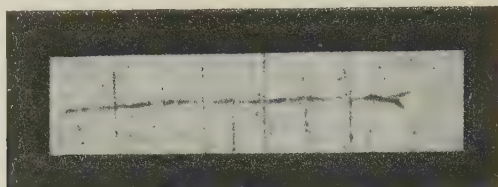
$$\sigma(14,7) = 2,7 \pm 0,8 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2.$$

c) Übergänge in den Grundzustand. ($\text{C}^{12} + h\nu = \text{Be}^8 + \text{He}^4$).

Die (γ, α) -Reaktion am Kohlenstoff verläuft nach TELEGI u. a.³³⁾ vorwiegend über das Be^8 -Niveau von 2,9 MeV.

In der grossen Statistik von C^{12} -Sternen werden aber auch Ereignisse beobachtet, die dem Übergang in den Grundzustand

von Be^8 entsprechen. Diese seltenen Exemplare zeichnen sich durch eine sehr lange und zwei kurze Alphaspuren aus, wobei die letzteren einen spitzen Winkel bilden (vgl. ³³)).



Übergang in den Grundzustand.
 $E_T = 10.2 \text{ MeV}$ Kodak NT 1a.

Auf 2500 Sterne der 17,6 MeV γ -Linie entfallen 30 Sterne, die als Übergang in den Grundzustand interpretiert werden können, was einem Verzweungsverhältnis von 1,2% entspricht.

§ 5. Die Winkelverteilung der einzelnen Komponenten der Lithium- γ -Strahlung.

1. Messanordnung und Auswertung.

Bestrahlung: Dicke Target $\text{Li}_{\text{Met.}}$. Protonenstrom 300 μA . NTla-Kernphotoplatten.

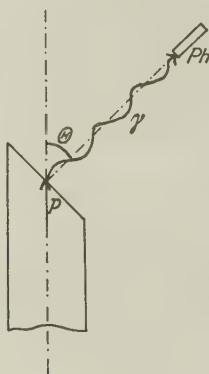


Fig. 7.

Schema der Anordnung zur Bestrahlung:

P = Protonenstrahl. γ = Gammaquant. Ph = Photoplatte

Die Winkelauflösung bei allen Anordnungen für Plattenbestrahlungen (senkrechte und streifende Inzidenz für γ -Quanten) war stets $\pm 7^\circ$.

Um das gesuchte Verhältnis $I_{(14)}/I_{(17)}$ zu erhalten, berechnet man mit Hilfe des Blockdiagrammes die Energieverteilung der Kohlenstoffsterne, die der 17,6 MeV-Komponente entsprechen, in der Annahme, dass diese Energiieverteilung einer Gaussverteilung entspricht. Da es sich hier um eine „abgeschnittene Verteilung“ handelt (der linke Teil der 17,6 MeV-Sternverteilung wird einerseits durch die 14,7 MeV-Komponente, andererseits durch andere systematische Abweichungen, die später diskutiert werden, gestört) kann der Durchschnitt \bar{x} und die Streuung s der Verteilung nicht ohne weiteres angegeben werden.

Die für die Lösung angegebenen Methoden (STEVENS³⁷), COHEN⁴⁰) sind mehrfache Approximationen, wobei die erste davon die Annahme von Durchschnitt und Streuung aus dem Blockdiagramm bedeutet. Die mit diesen Annahmen berechnete Verteilung (Kurve a) kann mit der beobachteten Verteilung mit Hilfe des Prüfverfahrens der χ -Verteilung verglichen werden, um zu entscheiden, ob die Gesamtheit der Unterschiede zufällig oder wesentlich sind³⁸). Die Verteilung der Sterne $E_T = 9.3 - 12$ MeV kann befriedigend mit einer Gaussverteilung wiedergegeben werden. Von $E_T < 9,3$ MeV scheinen systematische Abweichungen vorhanden zu sein.

Folgende Argumente können dafür angeführt werden:

- I. Beim Ausmessen einer Alpha-Spur hat man stets die Tendenz eher zu klein als zu gross zu messen.
- II. Der steile Abfall der Wirkungsquerschnittskurve der Kohlenstoffspaltung muss eine Verzerrung bewirken.
- III. Gestreute Quanten (kleiner Beitrag vgl. § 4, Abschnitt 4).
- IV. Beitrag der 14,7 MeV-Komponente.

Die endgültige Auswertung des Verhältnisses $I_{(14)}/I_{(17)}$ geschieht mit folgender Methode: Der Abfall der 17,6 MeV-Verteilung wird aus der linken Flanke extrapoliert. Die Verteilung der Sterne um 14,7 MeV lässt sich mit einer Gaussverteilung recht gut annähern. Die Überlagerung der beiden eingezeichneten Komponenten muss sich dem Blockdiagramm anpassen. Die Güte der Approximation lässt sich mit Hilfe des Prüfverfahrens der χ -Verteilung³⁸) kontrollieren. Die Abweichung von der Gausskurve unterhalb $E_T = 9,3$ MeV bei der 17,6 MeV-Komponente ist bekannt. Dieselbe dürfte bei der 14,7 MeV-Komponente angenähert vorhanden sein. Mit diesen Annahmen kann als Fehler der Auswertung der 2fache Betrag der Abweichung von der Gaussverteilung der 17,6 MeV-Komponente definiert werden.

2. Resultate.

Die Resultate, Tabelle 2, liefern infolge des energieabhängigen Wirkungsquerschnitts der C^{12} -Spaltung nicht das wirkliche Intensitätsverhältnis.

Tabelle 2.

Θ°	N_{Total}	$I_{(14)}/I_{(17)}$
0°	675	$13,5 \pm 2\%$
45°	531	$12 \pm 2\%$
90°	703	$12 \pm 2\%$
135°	477	$11,5 \pm 3\%$

Dagegen ist das Verhältnis

$$A_{0^\circ}^{90^\circ} = \left[\frac{(I \cdot \sigma)_{14,7}}{(I \cdot \sigma)_{17,6}} \right]_{\Theta=0^\circ} : \left[\frac{(I \cdot \sigma)_{14,7}}{(I \cdot \sigma)_{17,7}} \right]_{\Theta=90^\circ} \quad (6)$$

I : Anzahl der γ -Quanten.

σ : Wirkungsquerschnitt der Kohlenstoffspaltung

unabhängig vom Wirkungsquerschnitt.

$$A_{0^\circ}^{90^\circ} = 1,1(4) \pm 0,25 \quad A_{0^\circ}^{135^\circ} = 1,1(7) \pm 0,3$$

Die Winkelverteilung der beiden Komponenten der Resonanzstrahlung kann somit innerhalb der angegebenen Fehler als isotrop angesehen werden. Die Methode der Zuordnung der verschiedenen Flächen, entsprechend der beiden γ -Komponenten ist mit einem grossen Fehler behaftet. Das Verhältnis $A_{0^\circ}^{90^\circ}$ lässt sich mit einem kleineren Fehler direkt bestimmen. Unter 0° und 90° wurden je 700 Sterne ausgemessen, so dass die beiden Spektren miteinander verglichen werden können. Für $A_{0^\circ}^{90^\circ}$ wird folgender Wert erhalten:

$$A_{0^\circ}^{90^\circ} = 1,1 \pm 0,2.$$

Die hier angegebenen Resultate unterscheiden sich von den Messungen im provisorischen Bericht (siehe 34), da die Nachkontrolle der Platten Unregelmässigkeiten in den Messungen der verschiedenen Beobachter ergeben hatte.

Durch den Vergleich entsprechender Plattenflächen, die unter verschiedenen Winkeln bestrahlt worden sind, kann ausserdem festgestellt werden, dass die Winkelverteilung (0° , 45° , 90° , 135°) der 17,6 MeV-Komponente innerhalb 15% isotrop ist.

$$\Theta = 90^\circ \quad \frac{I_{(14)}}{I_{(17)}} = 12 \pm 2\%$$

$$N_T = 704$$

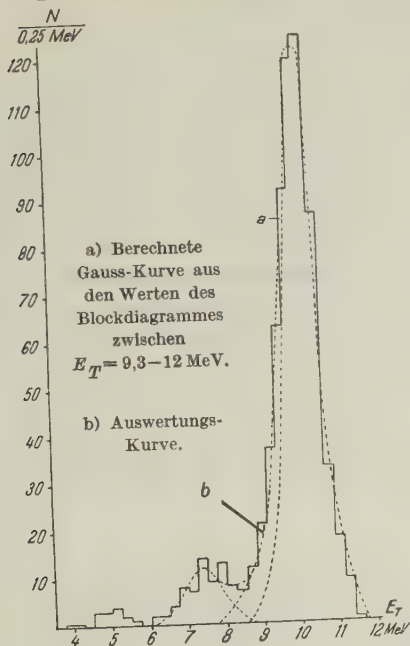


Fig. 8.

$$\Theta = 0^\circ \quad \frac{I_{(14)}}{I_{(17)}} = 13,5 \pm 2\%$$

$$N_T = 675$$

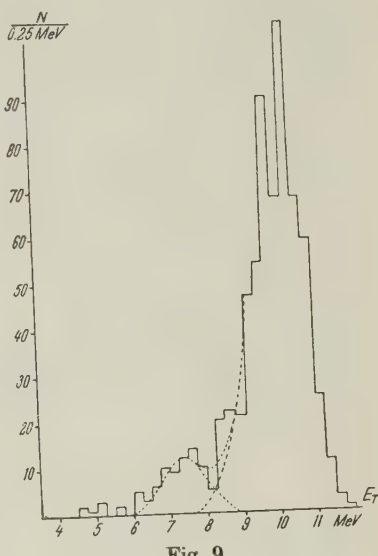


Fig. 9.

$$\Theta = 45^\circ \quad \frac{I_{(14)}}{I_{(17)}} = 12 \pm 2\%$$

$$N_T = 531$$

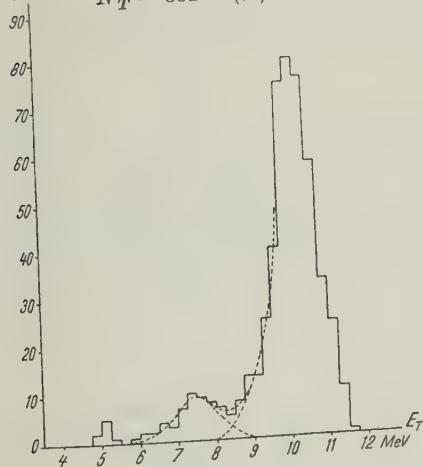


Fig. 10.

$$\Theta = 135^\circ \quad \frac{I_{(14)}}{I_{(17)}} = 11,5 \pm 3\%$$

$$N_T = 477$$

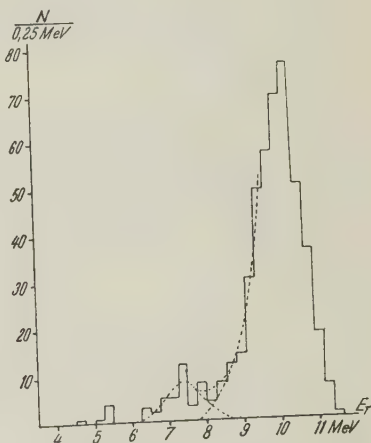


Fig. 11.

Spektren mit eingezeichneten Auswertkurven. (Konstruktion und Fehlerangabe siehe § 5, Abschnitt 1.)

3. Bemerkungen zum Vergleich der Messungen mit denjenigen anderer Autoren.

Die Resultate in Tabelle 2 können noch nicht ohne weiteres mit den Ergebnissen von DEVONS und LINDSEY⁸⁾ oder McDANIEL und STEARNS³⁶⁾ verglichen werden. Die Betrachlungen fanden alle bei $E_p = 440$ keV statt; da aber der Protonenstrahl eine beträchtliche Breite von 50–60 keV aufweist (es wurde mit einer Gasentladungsionenquelle gearbeitet, welche bei Betriebsspannungen von 70 keV Protonenströme von 300 bis 400 μ A liefert), so ist der Anteil der Protonen, die eine Energie < 440 keV aufweisen, beträchtlich. Der Beitrag der nichtresonanten, anisotropen Strahlung (vgl. § 6) darf also nicht ganz vernachlässigt werden. Bei einer Versuchsanordnung, die es gestatten würde, die Winkelverteilung ohne Messfehler zu messen, ergäbe sich somit eine Abweichung von der theoretischen isotropen Verteilung.

Dieser anisotrope Beitrag liegt weit innerhalb der Fehlergrenzen der verwendeten Messanordnung.

4. Folgerungen aus den Messresultaten.

Aus der Richtungsverteilung der Li- γ -Strahlung können Aussagen über die Parität des 17,6 MeV-Niveaus gemacht werden. Diese Richtungsverteilung muss isotrop sein, wenn der Resonanzeinfang durch ein *S*-Proton erfolgen würde und in diesem Falle hätte das 17,6 MeV-Niveau im Be^{8*} ungerade Parität. (Li⁷ ungerade Parität.) Beim Resonanzeinfang einer *P*-Welle braucht dagegen die Strahlung nicht mehr isotrop zu sein, die Parität wäre dann gerade.

Die gemessene Isotropie innerhalb 20% der 17,6 und 14,8 MeV-Komponente der Resonanzstrahlung kann durch *S*-Einfang erklärt werden, das hochangeregte Niveau von Be^{8*} muss dann ungerade Parität besitzen. Dagegen hat CHRISTY²⁴⁾ auf Grund der Messungen von COHEN²⁵⁾ (Protonen-Streuung an Li⁷) angenommen, dass der hochangeregte Be^{8*}-Kern gerade Parität mit Drehmoment 1 besitzt. (*P*-Welle.) Auf Grund dieser Annahme hat CHRISTY berechnet, dass die γ -Strahlung, welche auf den Zustand mit Gesamtdrehmoment $J = 0 +$ des Be⁸ führt, die Verteilungsfunktion $1 + \alpha \cos^2 \Theta$ ($\alpha = 0,7$) aufweist. Die angenäherte Isotropie der Resonanzstrahlung wäre bei dieser Annahme nur verständlich, wenn die 17,6 MeV-Strahlung eine geeignete Mischung von elektrischer Quadrupol und magnetischer Dipolstrahlung ist.

Die Plattenmessungen schliessen aber die letztere Möglichkeit aus.

§ 6. Die Winkelverteilung des Gesamtspektrums.

I. Messanordnung.

(Siehe Fig. 12.)

Mit einer 2×2 -fachen Koinzidenzanordnung wurde die Quantenzahl im Winkelbereich 0° bis 160° in bezug auf die Protoneneinfallsrichtung mit Hilfe der in einem Sekundärstrahler ausgelösten Compton- und Paarelektronen registriert.

Die beiden symmetrischen Messarme konnten wahlweise als Monitor oder als Messarm benützt werden; zusätzlich gestattete die Anordnung, die beiden Messarme zu vertauschen.

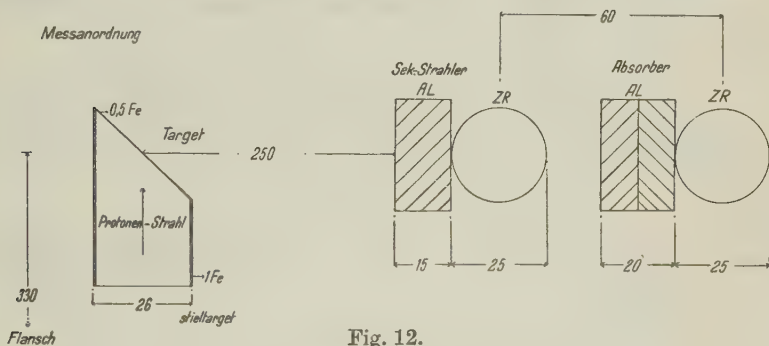


Fig. 12.
Messanordnung.

Die Winkelauflösung betrug für alle Messungen $\pm 7^\circ$. Als Sekundärstrahler wurde in allen Fällen 15 mm Al verwendet; während die Absorber aus Al Dicken von 8 mm oder 20 mm aufwiesen. Mit Hilfe der Variation der Absorberdicke ist es möglich, die Ansprechwahrscheinlichkeit der Messanordnung für die verschiedenen Komponenten des Lithium- γ -Spektrums innerhalb gewisser Grenzen zu ändern. Die folgende Tabelle 3 gibt die relative Schwächung der Nachweisempfindlichkeit für drei γ -Energien an, sie bezieht sich auf einen Absorberwechsel 8 mm — 20 mm Al.

Tabelle 3²⁰⁾.

γ -Energie	Schwächung für jede Linie	Schwächung in bezug auf die 17,6-MeV-Linie
12 MeV	32 \times	5,2 \times
14 MeV	12 \times	2 \times
17 MeV	6 \times	1 \times

Bei den Messungen wurde so verfahren, dass vorgängig jeder Versuchsreihe die Empfindlichkeit der Zählrohre mit Hilfe eines Standardpräparates geprüft wurde. Dann erst folgte z. B. eine Messerie 0° – 90° (das bedeutet: linker Arm in Stellung 0° , rechter Arm in Stellung 90°) von 5 Minuten Zeitdauer, gefolgt von einer gleich langen Serie 90° – 90° .

Nach folgendem Schema erhielt man aus n -Messungen $n - 1$ flux-unabhängige Verhältnisse: 0° – 90° ; 90° – 90° ; 0° – 90° ; 90° – 90° ; 0° – 90° . In dieser Weise konnten die zeitlichen Empfindlichkeitsschwankungen der Zählrohre nahezu ausgeschaltet werden.

Als Zählrohre wurden Al- und Cu-Rohre von $\frac{1}{10}$ bez. $\frac{1}{5}$ mm Wandstärke verwendet. (Zählrohrabmessungen: 50×25 mm²; 70×25 mm².) Die Füllung bestand aus 100 mm Argon und 15 mm Alkohol.

II. Registrieranordnung; Koinzidenzverstärker.

Die Übersicht über die elektronische Anlage erhält man durch nachfolgendes Blockscha (Fig. 13).

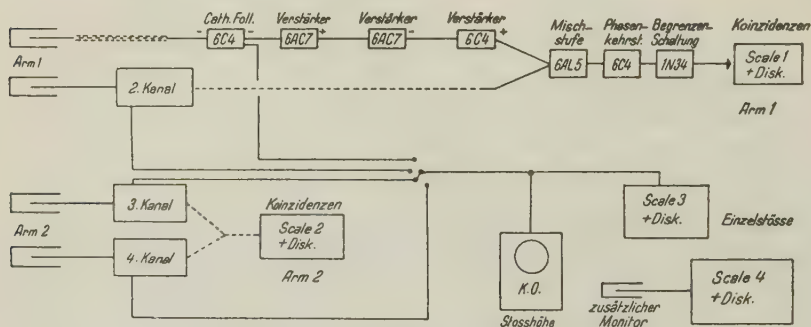


Fig. 13.

Blockscha der elektronischen Anlage.

Die 4 Zählrohre sind in zwei Gruppen zusammengefasst, entsprechend der Anordnung der Messarme.

Direkt jedem Zählrohr angebaut folgt ein „Cathode follower“, der es ermöglicht, den Zählrohrimpuls in gewöhnlichen, abgeschirmten Kabeln dem Koinzidenzverstärker in einer abgeschirmten Kiste zuzuführen.

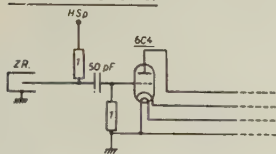
Zusätzlich können mit einem einfachen Umschalter die Impulse der einzelnen Zählrohre durch den „Cathode follower“ auf den Kathodenstrahloszillographen (K. O.) gegeben werden.

Als Mischstufe wird eine Diodenschaltung²⁶⁾ verwendet, die sehr betriebssicher arbeitet. (Auflösungsvermögen 10^{-6} sec.) Vor der

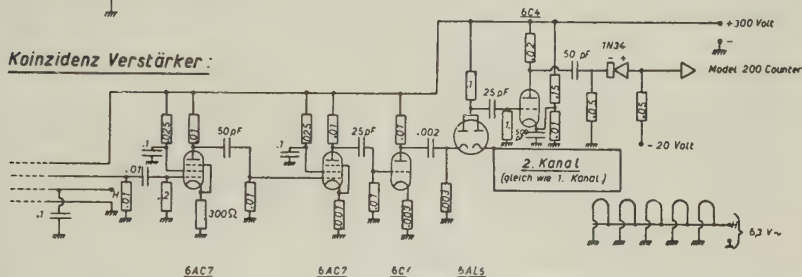
Registrierung in Scale 64 und 256 werden die Impulse aus der Mischstufe mit Hilfe des Schmitt-Triggers²⁷⁾ normiert.

Zusätzlich kann der Untersetzer II dazu benützt werden, die Stösse der einzelnen Zählrohre zu messen.

Cathode follower



Koinzidenz Verstärker :



modifizierter Model 200 Counter :

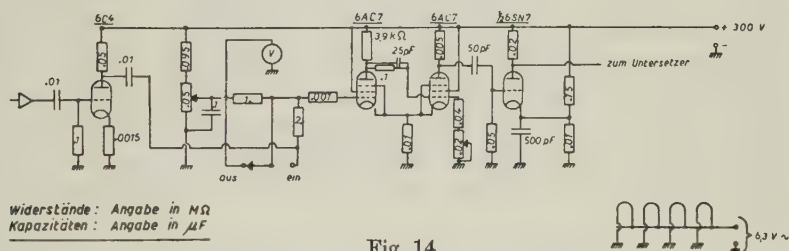


Fig. 14.

Schaltschema des Koinzidenzverstärkers.

Das Auflösungsvermögen ist in gewöhnlicher Weise mit Hilfe von Testpräparaten bestimmt worden. Der genaue Wert desselben ist für die Messung unwichtig, da die zufälligen Koinzidenzen kaum 1‰ der gemessenen Stosszahl ausmachen.

Um dagegen den Gesamtfehler auf 0,5% zu bringen, sind verschiedene Massnahmen nötig. Vor allem muss der Ausgangsimpuls nach der Mischung unabhängig von kleinen Schwankungen der Zählrohrimpulse sein, die stets auftreten können. (Veränderung des Plateaus im Betrieb.) Vor der Mischstufe wurde sehr stark gegengekoppelt, so dass die Verstärkung der Eingangsimpulse unabhängig von den Röhrendaten wird.

Die stabilisierte Vorspannung des „Schmitt-Triggers“ bestimmt bis auf 0,5 Volt genau nach der Mischung das Abschneideniveau. Als Untersetzter wurden „Model 200 Pulse counter“⁽²⁸⁾ verwendet.

Mit Hilfe des K. O. war es zusätzlich möglich, die Zählrohrspannung so zu regeln, dass für alle Zählrohre gleiche Stosshöhe erreicht werden konnte.

III. Messmethode.

Die Winkelverteilung der γ -Strahlung wurde mit 8 und 20 mm Al als Absorber mit Hilfe der im vorhergehenden Abschnitt II beschriebenen Methode ausgemessen. (Messpunkte: 0° , 45° , 90° , $112,5^\circ$, 135° , 156° .) Der statistische Fehler konnte bei jeder Messreihe unter 0,3% gehalten werden.

Drei verschiedene Targetformen sollten es ermöglichen, systematische Fehler (Streustrahlung — Absorption) erkennen zu lassen. Die Resultate der verschiedenen Anordnungen stimmen überein. Die meisten Serien sind mit einer „Stieltarget“ durchgeführt worden. Hierbei handelt es sich um ein unten 1 mm, oben 0,5 mm dickes, 350 mm langes Eisenrohr, das oben durch eine um 45° zur Achse geneigte Platte abgeschlossen ist.

Da die γ -Intensität für die Zählrohrmessungen mehr als ausreichend war, konnte an Stelle der reinen Li-Target (Li im Vakuum aufgedampft) Lithiumoxyd (Li_2O) verwendet werden. Die Hitzebeständigkeit von Li_2O gestattete es, die Wasserkühlung durch Luftkühlung (Ventilation) zu ersetzen. Durch den Wegfall des Wassermantels gestaltete sich die Absorptionskorrektur sehr einfach. Zusätzlich wurde jedes unnötige Material weggenommen; der Verbindungsflansch befand sich 330 mm von der Li_2O -Schicht entfernt. (Siehe Fig 12).

IV. Zusammenstellung der Messungen.

(Dicke Target bei $E_p = 550$ keV.)

1. Korrekturen und Fehlerabschätzung.

Die unkorrigierten Resultate stellen Werte dar, die man im Laborsystem erhält. Als einzige Korrektur wird die Absorption in Target und Kühlmantel eingeführt.

Bei der Fehlerabschätzung kann die blossе Angabe des statistischen Fehlers nicht verantwortet werden, da andere erklärliche Effekte und Störungen, wie zum Beispiel Empfindlichkeitsschwankungen der Zählrohre, bedeutend grössere Schwankungen bewirken, als es die Statistik allein erwarten lässt.

2. Koordinatentransformation (Laborsystem – Schwerpunktsystem) und Berücksichtigung der durch Dopplereffekt bedingten Empfindlichkeitsschwankung.

(Vgl. DEVONS und HINE⁷).)

Die experimentellen Resultate können nur mit der Theorie verglichen werden, wenn die Koordinatentransformation in das Schwerpunktsystem und die durch den Dopplereffekt bedingte Richtungsabhängigkeit der Empfindlichkeit der Messanordnung korrigiert ist.

a) Koordinatentransformation.

Θ = Winkel, gebildet durch die Richtung des Protonenstrahls und der γ -Strahlung im Laborsystem.

Θ' = Entsprechende Winkel im Schwerpunktsystem.

v = Geschwindigkeit des zurückprallenden Kerns (Be^8).

f = Winkelverteilung der γ -Strahlen im Laborsystem.

g = Winkelverteilung im Schwerpunktsystem.

Lorentztransformation:

$$g(\Theta') = f(\Theta) \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \Theta'\right)^2} \quad (7)$$

wobei

$$\cos \Theta = \frac{\left(\cos \Theta' + \frac{v}{c}\right)}{1 + \frac{v}{c} \cos \Theta'}$$

v/c ist durchwegs von der Grössenordnung 1%, so dass entwickelt, und Terme höherer Ordnung weggelassen werden können.

$$g(\Theta) = \left[f\left(\Theta - \frac{v}{c} \sin \Theta\right) \right] \cdot \left[1 - 2 \frac{v}{c} \cos \Theta \right] \quad v = \frac{v_p}{8} \quad (8)$$

v_p = Geschwindigkeit der Protonen.

Beachtet man die unkorrigierten Resultate in der graphischen Darstellung, so sieht man ohne weiteres ein, dass an Stelle von $f(\Theta - v/c \sin \Theta)$ ebenso gut $f(\Theta)$ genommen werden kann.

Die durch die Koordinationstransformation bedingte Korrektur reduziert sich auf einen Faktor. Die maximale Korrektur beträgt 1%.

b) Berücksichtigung des Dopplereffektes.

Ist E die Quantenenergie im Schwerpunktsystem des strahlenden Kerns, so ist $E' = E (1 + v/c \cos \Theta)$ die Quantenenergie im Laborsystem. Experimentell hat DEVONS⁷⁾ festgestellt, dass die registrierte „Quantenzahl“ in der beschriebenen Messanordnung ohne Absorber proportional der Quantenenergie ist.

Schiebt man nun Absorber ein, so stellt man fest, dass die Form der Kurve $N_{\text{reg.}} = f(\text{Absorberdicke}) = f(t)$ unabhängig von der Quantenenergie ist, solange man Änderungen des Massstabes zulässt. Daher erhält man folgenden Korrekturansatz, wobei der zweite Faktor gewissermassen eine Korrektur der Korrektur darstellt.

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{\delta E}{E} \left(1 - \frac{t}{N} \frac{dN}{dt} \cdot \frac{\delta E}{E} \right) \quad (9)$$

Unter der Benutzung der Kurven $N = f(t)$ für 17,6 MeV von FOWLER²⁰⁾ erhält man

$$8 \text{ mm Al} \quad \left(1 + 0,7 \frac{\delta E}{E} \right)$$

$$20 \text{ mm Al} \quad \left(1 + 0,45 \frac{\delta E}{E} \right)$$

Für die verwendeten Absorber ergeben sich Werte, die maximal 0,3% von 1 abweichen. Dieser Faktor kann weggelassen werden, da ja $\delta E/E$ Grössenordnung 0,4% aufweist.

Die gesamte Korrektur ist demnach für 8 und 20 mm Al-Absorber dieselbe und beträgt:

Tabelle 4.

Θ°	Korrektur
0°	0,988
45°	0,992
90°	1,000
115,5°	1,003 ₅
135°	1,008
156°	1,010 ₅

In der Tabelle 4 ist nicht berücksichtigt:

1. Absorption in Target und Kühlmantel.
2. Argumentänderung $\Theta^* = \Theta - v/c \sin \Theta$.
3. Ähnlichkeit (nicht gleiche Form) der Kurve $N = f(t)$.
4. Das für die Winkeldefinition massgebende Integrationsintervall δ ist genügend klein, so dass sich eine diesbezügliche Korrektur erübrigt.

c) Messresultate.
(Dicke Target, Protonenenergie 550 keV.)

Tabelle 5.
(Gemessene Intensitäten.)

Θ°	8 mm Al		20 mm Al	
	unkorr.	korr.	unkorr.	korr.
0°	108,4 \pm 0,5	107,1 \pm 0,5	108,0 \pm 0,9	106,7 \pm 0,9
45°	104,8 \pm 0,8	104,0 \pm 0,8	104,8 \pm 1	104,0 \pm 1
90°	100,0	100,0	100,0	100,0
112,5°	99,0 \pm 0,8	99,3 \pm 0,8		
135°	100,5 \pm 0,5	101,3 \pm 0,5	97,2 \pm 0,8	98,0 \pm 0,8
156°	102,5 \pm 0,5	103,5 \pm 0,5	96,9 \pm 0,8	97,9 \pm 0,8

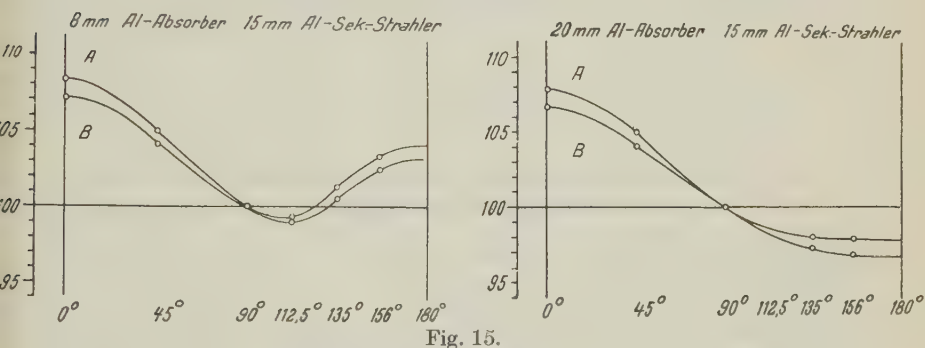


Fig. 15.

Resultate aus Zählrohrmessungen.

E_p : 550 KeV A = unkorrigierte Kurve B = korrigierte Kurve.

d) Bemerkungen zu den Messresultaten.

1. Im Bereich 0°–112° unterscheiden sich die Kurven für 8 und 20 mm Absorber nicht merklich.
2. Dagegen sind die Abweichungen im Intervall 112°–180° wesentlich.
3. Beide Kurven sind in bezug auf 90° asymmetrisch; die Korrektur wirkt in Richtung einer Vergrößerung der Asymmetrie.

e) Zerlegung der korrigierten Kurven in Komponenten.

Die experimentelle Form der Kurven legt es nahe, die korrigierte Kurve als Summe eines \cos und \cos^2 aufzufassen.

$$I = I_0 (1 + A \cos \Theta + B (\cos \Theta)^2)$$

Die Fourier-Analyse rechtfertigt diese Auffassung, da die Koeffizienten der höheren Terme klein sind und Sinus-Glieder nahezu

verschwinden. Die Tabellen 6 und 7 zeigen das Ergebnis dieser Analyse, in Spalte I sind die experimentellen Daten, in Spalte II die unter Zugrundelegung der betreffenden Koeffizienten A , B berechneten Intensitäten zusammengestellt.

Tabelle 6.

Absorber: 8 mm Al.

$$I_{(\Theta)} = I_{(90^\circ)} (1 + 0,015 \cos \Theta + 0,056 \cos^2 \Theta) \quad (10)$$

Θ°	I	II
	gemessene Intensität	$A = 0,015$ $B = 0,056$
0°	$107,1 \pm 0,5$	107,1
45°	$104,0 \pm 0,8$	103,9
90°	100,0	100,0
$112,5^\circ$	$99,3 \pm 0,8$	100,2
135°	$101,3 \pm 0,5$	101,7
156°	$103,5 \pm 0,5$	103,3
180° *)	104,2	104,1

*) Wert aus graphischer Extrapolation.

Die Resultate der Tabellen 6 und 7 zeigen:

- α) Der gewählte Ansatz ist vernünftig.
- β) Das Verhältnis A/B ist abhängig von der Absorberdicke.
- γ) Die Güte der Approximation ist sehr stark von A und B abhängig.

Tabelle 7.

Absorber: 20 mm Al.

$$I_{(\Theta)} = I_{(90^\circ)} (1 + 0,044 \cos \Theta + 0,023 \cos^2 \Theta) \quad (11)$$

Θ°	I	II
	gemessene Intensität	$A = 0,044$ $B = 0,023$
0°	$106,7 \pm 0,9$	106,7
45°	$104,0 \pm 1,0$	104,3
90°	100,0	100,0
$112,5^\circ$		98,6
135°	$98,0 \pm 0,8$	98,0
156°	$97,9 \pm 0,8$	97,9
180° *)	97,8	97,9

*) Wert aus graphischer Extrapolation.

- δ) Da das Verhältnis B/A mit steigender Absorberdicke abnimmt und durch den Absorber die weichen Komponenten viel stärker geschwächt werden, so liegt es nahe, der Winkelverteilung der härteren Komponenten im wesentlichen ein Verhalten gemäss dem Ansatz $I = I_0 (1 + a \cos \Theta)$ zugrunde zu legen. Die weichen Komponenten dagegen gehorchen eher einem Ansatz wie $I = I_0 (1 + b \cos \Theta)^2$.

(Die Koeffizienten a und b sind in keiner Weise mit den in den Tabellen angegebenen Werten A und B identisch.)

Die Berechnung von a und b führt auf grosse Schwierigkeiten, da die grundlegenden Messungen von FOWLER²⁰) über die Absorption der Sekundärelektronen im Al bei Standardanordnung auf der Annahme basierten, dass die Lithium- γ -Strahlung nur aus der 17,6 MeV-Komponente allein besteht.

V. Zusammenfassung der Resultate der Zählrohrmessungen.

Bei einer Protonenenergie von $E_p = 550$ keV macht sich die nichtresonante Strahlung bereits bemerkbar.

Der Wechsel des Verhältnisses A/B bei verschiedenen Absorbern zeigt, dass die Komponenten der nichtresonanten Strahlung nicht nur sehr stark anisotrop, sondern auch asymmetrisch sind (das heisst das Intensitätsverhältnis der beiden Komponenten ändert sich ebenfalls mit dem Winkel Θ). Die Resonanzstrahlung aber verhält sich bis auf die Interferenzterme isotrop, so dass als nahelegendste Annahme für das Zustandekommen der 440 keV γ -Strahlung S -Einfang postuliert werden kann.

Die Anisotropie der nichtresonanten Strahlung kann nur in der Weise verstanden werden, dass neben dem S -Einfang auch P -, möglicherweise auch D -Einfang stattfindet. (Wechsel im Verhältnis A/B .)

Für den S -Einfang bei Resonanz ist die notwendige Bedingung gemäss der Zählrohrmessung erfüllt. Die Annahme von CHRISTY²⁴), dass es sich um den Resonanz-Einfang einer P -Welle handelt und dem hochangeregten Be^{8*} die charakteristischen Werte $J = 1, +$ zuzuschreiben sind, scheidet sowohl auf Grund der Messungen mit den photographischen Platten (vgl. § 4) als auch der vorliegenden Zählrohrmessungen aus. Die nach dieser Auffassung auftretende Anisotropie der 14,8 MeV-Komponente wäre mit den Zählrohrmessungen unverträglich.

§ 7. Theoretische Betrachtungen zu den Messresultaten.

Die Isotropie der Resonanzstrahlung, abgesehen von den Interferenztermen, kann mit dem Einfang von *s*-Protonen verstanden werden; die Anisotropie der nichtresonanten Strahlung aber durch *P*- oder *D*-Einfang.

Die Auffassung von CHRISTY²⁴), dass der Resonanz-Einfang eine *P*-Welle darstellt ($\text{Be}^{8*} J = 1, +$) kann experimentell ausgeschlossen werden.

Die Asymmetrie in der Winkelverteilung der einzelnen Komponenten der nichtresonanten Strahlung lässt den Schluss zu, dass das 2,9-MeV-Niveau und der Grundzustand von Be^8 verschiedene Drehmomente aufweisen. Die lange Halbwertszeit des Be^8 -Grundzustandes ist mit der Zuweisung des Spins $J = 2$ (gerade) verträglich (vgl. MILLAR und CAMERON³⁶). Entsprechend den Argumenten von DEVONS und HINE⁷) nehmen wir für das Resonanzniveau $J = 1$, ungerade Parität, an. Das 2,9 MeV-Niveau wäre dann wahrscheinlich $J = 0, +$. WHEELER³¹) findet aus α - α -Streumessungen ($\text{He}^4 [\alpha, \alpha] \text{He}^4$) für das Drehmoment des Be^8 2,9-MeV-Niveau 0, +, ebenso COHEN²⁵) mit Proton-Proton-Streuversuchen an Li^7 .

Dagegen nehmen DEVONS⁷), TELEGDI³³) und BONNER³²) — letzterer aus der Energie-Verteilung der Alphateilchen, die aus dem β -Zerfall des Li^8 folgen — an, dass das 2,9 MeV-Niveau im Be^8 $J = 2, +$ habe. (Bemerkung: Das Be^8 -Niveau, angegeben von BONNER u. a. beträgt $3,4 \pm 0,4$ MeV; könnte also gerade so gut das von GREEN und GIBSON²²) gefundene 4,05 MeV-Niveau sein.) Es gibt daher die Komplikation, dass dasselbe Niveau zwei Spinzustände haben sollte. Abschliessend sei noch festgestellt, dass die Halbwertsbreite Γ von 1,8 MeV (gemessen aus Photospaltung C^{12}) des 2,9 MeV-Niveaus von Be^8 , in Übereinstimmung mit WALKER und McDANIEL⁴), im Widerspruch zu Messungen von DEE²⁹) und GILBERT am $\text{B}^{11}(\text{p}, \alpha) \text{Be}^8$ -Prozess; und GREEN und GIBSON²²) am $\text{Li}^7(\text{d}, \text{n}) \text{Be}^8$ -Prozess und der theoretischen Berechnung von BERTHE³⁰) steht, die alle $\Gamma = 0,8$ erhalten. Das Niveau von 2,9 MeV im Be^8 scheint also zwei verschiedene Halbwertsbreiten zu besitzen (entarteter Zustand).

§ 8. Zusammenfassung der noch zu untersuchenden Probleme.

Die Photospaltung des Kohlenstoffes eignet sich sehr gut als Spektrometer für energiereiche γ -Strahlen. Der Verlauf des Wirkungsquerschnittes bei kleinen und grossen Quantenenergien beschränkt diese Methode auf ein Energiegebiet, das etwa zwischen 12 und 30 MeV liegt. Das erste Maximum von σC^{12} liegt bei

$E_\gamma = 18,5$ MeV; das zweite Maximum bei $E_\gamma \sim 27$ MeV, dessen Höhe allerdings nur 75% des ersten beträgt^{17) 41)}.

Für die Ausmessung der weicheren Komponenten der Lithium- γ -Strahlung sollten Prozesse verwendet werden, die einen wesentlich höheren Wirkungsquerschnitt in der Nähe von 12 MeV aufweisen, so dass eine elektronische Ausmessung des Spektrums ermöglicht würde.

Die Sicherstellung und die endgültige Zuordnung der angedeuteten γ -Linie bei 12 MeV könnte auch durch (γ, γ) -Koinzidenzen geschehen (siehe Fig. 16), da der Übergang vom 4,9 MeV Niveau in den Grundzustand des Be^8 bereits von BENNETT u. a.³⁵⁾ gefunden worden ist.

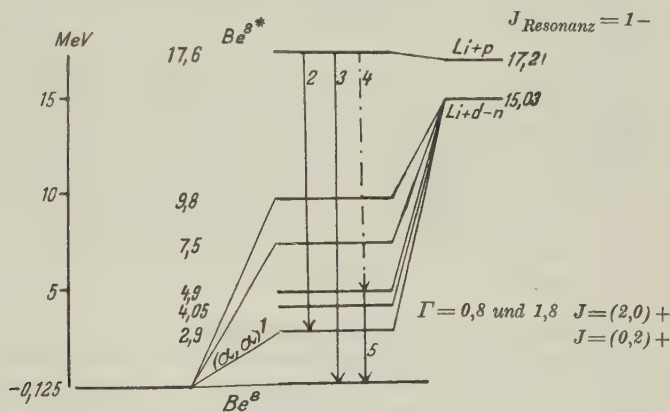


Fig. 16.

Ausschnitt des Zerfallsschemas von Be^{8*} .

1: GREEN, GIBSON, Proc. Phys. Soc. **62**, 407. 2: WALKER und McDANIEL, Phys. Rev. **74**, 315. 3: WALKER und McDANIEL, Phys. Rev. **74**, 315. 4: Linie, angedeutet aus Photospaltung C^{12} . 5: BENNETT, BONNER, RICHARDS und WATT, Phys. Rev. **59**, 904.

Zusätzlich hat TITTERTON⁴²⁾ ein weiteres breites Niveau im Be^8 bei $\sim 5,6$ MeV gefunden, so dass mehrere Möglichkeiten der Zuordnung offen stehen,

Als Nebenaufgabe bleibt noch eine genauere Bestimmung des Wirkungsquerschnittes der Photospaltung des Kohlenstoffes. Andere (γ, α) -Prozesse an leichten Kernen, die ebenfalls mit der Kernphotoplatte gemessen werden können, lassen sich dann ohne weiteres mit dem Wirkungsquerschnitt der C^{12} -Spaltung vergleichen. Voraussetzung für alle diese Messungen bildet die genaue Absolutmessung der γ -Quantenzahl.

Abschliessend möchten wir Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für sein stets förderndes Interesse an der vorliegenden Arbeit danken.

Literaturverzeichnis.

- 1) H. R. CRANE, L. A. DELSASSO und C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **48**, 125 (1935).
- 2) E. R. GAERTNER und H. R. CRANE, Phys. Rev. **52**, 582 (1937).
- 3) L. A. DELSASSO, W. A. FOWLER und C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **51**, 391 (1937).
- 4) R. L. WALKER und B. D. MCDANIEL, Phys. Rev. **74**, 315 (1948).
- 5) W. A. FOWLER und C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **76**, 314 (1949).
- 6) M. AGENO, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI und G. C. TRABACCHI, Ricerca Sci. **12**, 139 (1941).
- 7) S. DEVONS und M. G. N. HINE, Proc. Roy. Soc. A **199**, 56, 73 (1949).
- 8) S. DEVONS und G. R. LINDSEY, Proc. Phys. Soc. A **63**, 1202 (1950).
- 9) H. HÄNNI, V. L. TELEGDI und W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **21**, 203 (1948).
- 10) V. L. TELEGDI und M. VERDE, Helv. Phys. Acta **22**, 380 (1949).
- 11) F. K. GOWARD, V. L. TELEGDI und J. J. WILKINS, Proc. Phys. Soc. A **63**, 402 (1950).
- 12) H. WÄFFLER und S. YOUNIS, Helv. Phys. Acta **22**, 416 (1949).
- 13) H. WÄFFLER und S. YOUNIS, Helv. Phys. Acta **22**, 617 (1949).
- 14) H. YAGODA, Radioactive Measurements with nuclear emulsions (1949).
- 15) J. BONANOMI, Diplomarbeit 1949, unveröffentlicht.
- 16) CH. HAENNY, P. LERCH und O. ROCHAT, Helv. Phys. Acta **22**, 609 (1949).
- 17) J. J. WILKINS, F. K. GOWARD, Proc. Phys. Soc. A **64**, 201 (1951).
- 18) C. M. G. LATTES, P. H. FOWLER und P. CÜER, Proc. Phys. Soc. **59**, 883 (1947).
- 19) O. HIRZEL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **20**, 373 (1947).
- 20) W. A. FOWLER, C. C. LAURITSEN und T. LAURITSEN, Rev. Mod. Phys. **20**, 243 (1948).
- 21) H. T. RICHARDS, Phys. Rev. **59**, 796 (1941).
- 22) L. L. GREEN und W. M. GIBSON, Proc. Phys. Soc. **62**, 407 (1949).
- 23) R. L. WALKER, mündliche Mitteilung.
- 24) R. F. CHRISTY, Phys. Rev. **75**, 1464 (1949).
- 25) R. COHEN, Phys. Rev. **75**, 1463 (1949).
- 26) P. STOLL, M. WALTER und W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **21**, 177 (1948).
- 27) O. H. SCHMITT, J. Sci. Inst. **15**, 24 (1938).
- 28) W. A. HIGINBOTHAM, J. GALLACHER und M. SANDS, Rev. Sci. Inst. **18**, 706 (1947).
- 29) P. I. DEE, C. W. GILBERT, Proc. Roy. Soc. A **154**, 279 (1936).
- 30) H. A. BETHE, Rev. Mod. Phys. **9**, 217 (1937).
- 31) J. A. WHEELER, Phys. Rev. **59**, 16 (1941).
- 32) T. W. BONNER, J. E. EVANS, C. W. MALICH und J. R. RISSER, Phys. Rev. **73**, 885 (1948).
- 33) V. L. TELEGDI und W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **23**, 745 (1950).
- 34) H. NABHOLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **23**, 858 (1950).
- 35) W. E. BENNETT, T. W. BONNER, H. T. RICHARDS und B. E. WATT, Phys. Rev. **59**, 904 (1941).
- 36) C. H. MILLAR und A. G. W. CAMERON, Phys. Rev. **79**, 182 (1950).
- 37) W. L. STEVENS, Annals of Applied Biology **24**, 847 (1937).
- 38) A. LINDER, Statistische Methoden, 1945.
- 39) W. F. HORNYAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON und W. A. FOWLER, Rev. Mod. Phys. **22**, 291 (1950).
- 40) A. C. COHEN, Am. Statistical Association **44**, 518 (1949).
- 41) J. J. WILKINS, F. K. GOWARD, Proc. Phys. Soc. A **64**, 1056 (1951).
- 42) M. G. BRINKWORTH, E. W. TITTERTON, Phil. Mag. **42**, 955 (1951).

Nuclear Spectroscopy with Harmonic Oscillator Wave-Functions

by Igal Talmi*), Swiss Federal Institute of Technology (Zurich).

(20. IX. 1951.)

Zusammenfassung: Die Beschränkung auf harmonische Zentralpotentiale ermöglicht die Entwicklung einer neuen (vom üblichen Slaterschen Verfahren verschiedenen) Methode zur Berechnung der Matrixelemente der Wechselwirkung zwischen den äusseren Nukleonen im Schalenmodell, welche insbesondere auch den Fall nichtzentraler Kräfte in einfacher Weise zu behandeln gestattet. Als Anwendung wird gerechnet: Die Ordnung der Niveaus in der j^n -Konfiguration, für einige physikalisch interessante Fälle; die von der Spin-Bahn-Kopplung zwischen den Nukleonen herrührende Dublettaufspaltung, und die Lage der untersten Terme von Li^7 bei Berücksichtigung von Spin-Bahn-Kopplung und Tensorkräften.

Introduction.

The discovery of the "magic numbers" and the general success of the shell model in explaining many experimental facts about nuclei have led theoretical physicists to work with the methods of atomic spectroscopy in the calculation of nuclear levels. In this attempt three main difficulties are encountered:

- (a) The form of the interaction potential and its exchange character are not sufficiently known. In addition, the form of the wave-functions can be only guessed. These facts make necessary the examination of various forms of the potential.
- (b) There exists a lack of sufficient experimental information about nuclear spectra. There are only a few excited states for which the spin and parity assignments have been carried out. Whereas in atomic spectroscopy it was possible from the vast amount of experimental material to determine easily the several parameters used to describe the atomic levels, here these parameters must be mathematically evaluated.
- (c) Non-central interactions, such as tensor forces, must here be taken into account, whereas in atomic spectra such interactions give a negligible small contribution.

*) Hebrew University, Jerusalem, Israel.

Thus, the Slater method, used in atomic spectroscopy, is not practical in nuclear spectroscopy, because:

- (a) one must work with different potentials, each of which must be expanded in a series of Legendre polynomials, for which the coefficients are usually complicated functions;
- (b) this fact makes impractical the calculation of the matrix elements, which now must be completely carried out; and
- (c) for non-central interactions the method loses even its formal simplicity and becomes very much involved.

In the first part of this paper an alternative method is suggested and developed. Although this method is confined to the use of harmonic oscillator wave-functions, this limitation does not seem to be too serious in view of the fact that the form of the wave-functions cannot be determined if the interaction is not known. We use these wave-functions only as a model in order to learn the results for various types of interactions. That our choice of wave-functions is reasonable is seen from the rough agreement of the level order in the oscillator potential with that found experimentally. In any case, one would not expect the exact form of the wave-functions to have a decisive effect on the results. Due to the separability of the potential of two nucleons moving in the central field of a (3-dimensional) harmonic oscillator in the relative and center-of-gravity coordinates, it is possible to write the wave-functions of two interacting nucleons as a finite sum of products of functions which depend on these coordinates. This transformation makes it possible, when calculating matrix elements to integrate immediately over the center-of-gravity coordinate, of which the interaction energy is usually independent. What remains is only to calculate matrix elements of the interaction energy (which may be a complicated function of the relative coordinate and of the relative momentum), in a scheme of wave-functions written in terms of this coordinate.

After a survey of the shell model and the Slater method (§ 1, 2), the proposed method is described and discussed (§ 3). In § 4 the transformation of the wave-functions from the coordinates of the two nucleons to the relative and center-of-gravity coordinates is considered. The Slater method can be regarded as an approximation procedure in the neighbourhood of the long range limit, whereas our method can serve as a good approximation method in the short range limit, which might be looked upon as the proper approximation in the case of nuclear spectroscopy (this point is discussed in § 6).

In the second part of this paper the determination of the ground state of the j^n configuration is treated. An empirical rule, stated by MAYER¹⁾, is that the total angular momentum J of the ground state is equal to zero if n is even, and equal to j if n is odd. This rule was then derived theoretically by MAYER²⁾ and RACAH³⁾ for Majorana forces in the case of δ -type interaction, or, better said, in the short range approximation. A few cases, however, were found experimentally where this rule does not hold. KURATH⁴⁾ and others have suggested that these deviations could be explained by considering the effect of the finite range of the forces. It has already been pointed out by the author⁵⁾ that potentials more singular than that used by KURATH give different results. With the method described in this paper this problem can be treated quite generally. After the examination of several interaction potentials it can be concluded that for physically admissible values of the parameters (range of the forces and extension of the wave-functions), the order of levels is that given by the short range approximation. The break down of the above rule may be due to perturbations from other configurations or to the action of tensor forces.

In § 5 we present the problem and show how our method may be applied to obtain directly the values of the energy levels which are already calculated in the Slater method. The dependence of the results on the form and range of the potential is treated in § 6 for the $(d_{5/2})^3$ configuration. In § 7 the configuration $(f_{7/2})^3$ is treated and discussed. The configuration $(g_{9/2})^3$ is treated in § 8. In several nuclei in which these configurations appear (according to the shell model), the spin of the ground state is not that predicted by the jj -coupling scheme in the short range limit. These cases are especially interesting as they may give direct information about the nuclear interactions (in contrast to the other odd-even nuclei whose level schemes have been classified, in which only the states of the single nucleon are observed, thus giving information about the central field only and providing no direct information about the nuclear forces).

The third part of this paper deals with mutual spin-orbit interactions. An interesting problem is whether the spin-orbit interaction, introduced by CASE and PAIRS⁶⁾ in order to explain the results of scattering experiments, can give for heavier nuclei sufficient splitting between the states $j = l + 1/2$ and $j = l - 1/2$ (of a single nucleon) to satisfy the requirements of the shell model. We state the problem and calculate matrix elements of the mutual spin-orbit interaction in § 9. A few cases of a single nucleon outside closed shells are treated

in § 10, and the resulting doublet splitting is calculated. With reasonable values of the parameters an order of magnitude of a few MeV is obtained. The results are, however, very sensitive to the nuclear radius in the interesting region.

In the fourth part of the paper the Li^7 nucleus is discussed. In this nucleus only one excited state has been found in the energy region between the ground state and several MeV. As early experiments showed that this excited level has a compound nature, it was suggested by INGLIS⁷⁾ that it may be composed of the four excited levels of the jj -coupling configuration $(p_{3/2})^3_N p_{3/2}P$ which may perhaps coincide (but he was not able, using only central forces, to obtain such a coincidence). Our method was used to take account also of tensor forces and to check whether their contribution may bring coincidence of those excited levels. The $(p_{3/2})_N p_{3/2}P$ configuration is treated in § 12 for the case of central interactions with the various exchange operators. The term values were calculated by the sum method combined with the use of the quantum number of the total isotopic spin. In § 13 the matrix elements of the tensor forces interaction for this configuration are calculated. The results (§ 14) show that, for reasonable values of the interaction parameters it is possible to obtain such a coincidence.

As recent experiments have shown that a spin 1/2 for the excited level is compatible with the known facts⁸⁾, the natural explanation arose that the two lowest states are the components of a ^{22}P state (in LS -coupling). LS -coupling for Li^7 is not in contradiction with the shell model, as Li^7 is a light nucleus; it is believed that only for heavier nuclei does jj -coupling take place. It is known that neither the Thomas interaction nor the magnetic spin-orbit interaction can give sufficient splitting between the components of the ^{22}P ground state. The splitting which results from the Case and Pais interaction is calculated for the ^{22}P state of the configuration $p^2_N p_P$ (§ 15). The result is of the right order of magnitude but the splitting obtained is again very sensitive to the nuclear dimensions.

I. The Method of the Harmonic Oscillator Wave-Functions.

§ 1. The shell model.

The term "nuclear spectroscopy" is well defined in experimental physics; it means the measurement of nuclear spectra, their classification, and level assignment. On the other hand in theoretical physics this term does not usually mean "the theory of nuclear spectra", but is more limited. It is mostly used in the sense of "the use of the methods of atomic spectroscopy in explaining nuclear spectra".

In the past many attempts have been made to apply the methods of atomic spectroscopy to the calculation of nuclear energy levels. Meanwhile more experimental material has been gathered, especially in the region of high excitation energies, and the theories which successfully explained these facts were statistical in their nature. Only in the last few years has it become clear that there are regularities in the nuclei which are not of a statistical nature (magic numbers). Various "shell models" (which are in fact the former Hartree approximations) have been proposed, the most successful of which is the one based on the strong spin-orbit interaction¹⁾⁹⁾. This model does not only explain the magic numbers and the spins of the ground states of nuclei, but can also be applied to the classification of level schemes in the low energy region¹⁰⁾. It appears that experiment now forces the theoretician to accept a theory which he earlier abandoned and for the validity of which there are not yet sufficient theoretical grounds.

The basic assumption of any shell model is that the average field which acts on a single nucleon can be approximated by a central field in which the nucleon has a definite state (characterized by quantum numbers n and l). The nucleons occupy the lowest states and may form closed shells. A magic nucleus is a nucleus which contains closed shells only. The characteristics of the ground state are determined by the interaction of the nucleons outside the closed shells. This interaction energy is usually taken as a perturbation on the zero order energy, which is the sum of the energies of the single nucleon in the central field. The zero order energy is the same for all the states of a given configuration (i.e., the nucleons outside closed shells occupy definite states of the central field). In addition to the central field acting on the nucleons there can also be an interaction of the spin of a nucleon with its orbital angular momentum (the usual spin-orbit interaction). If this is large compared to the mutual interaction of the nucleons, the spins (i.e. total angular momenta) of the nucleons j are good quantum numbers. Thus every nucleon has a definite n , l , and j . This is the jj -coupling scheme which is postulated in the shell model of M. G. MAYER.

To the zeroth order the wave-functions of the nucleons are products of the wave functions of the single nucleon in the central field. The wave-functions of the nucleons in the states $n_1 l_1$, $n_2 l_2$, ..., $n_m l_m$, with other quantum numbers a_1 , a_2 , ..., a_m (where a , for example, could be the magnetic quantum number m) is:

$$\psi_A(x_1, x_2, \dots, x_m) = \psi_{a_1 n_1 l_1}(x_1) \psi_{a_2 n_2 l_2}(x_2) \dots \psi_{a_m n_m l_m}(x_m). \quad (1)$$

The zero order energy is degenerate, since it is the same for all the states of the configuration. If the mutual interaction of the nucleons is taken into account this degeneracy is partly removed, as known from perturbation theory. The first order energies are then the eigenvalues of that part of the interaction energy which belongs to the configuration.

The appropriate zero-order wave-functions are definite linear combinations of the wave functions ψ_A determined by the quantum numbers of the interaction energy (these are, for example L and S in the case of Russel Saunders coupling, J in the case of jj -coupling, etc.). Therefore the matrix elements of the interaction energy is a sum of matrix elements $(A | V | B)$. The interaction energy has the form $\sum_{i < j} V_{ij}$ where $V_{ij} = V_{ij}(x_i, x_j)$ describes the interaction of the i -th and j -th nucleons. In evaluating the matrix elements of one of these terms we can integrate over the coordinates $x_l, l \neq i, l \neq j$, and obtain:

$$\left. \begin{aligned} & \int \int \cdots \int \psi_{a_1}^*(x_1) \psi_{a_2}^*(x_2) \cdots \psi_{a_m}^*(x_m) V_{ij}(x_i, x_j) \psi_{b_1}(x_1) \psi_{b_2}(x_2) \cdots \\ & \quad \cdots \psi_{b_m}(x_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_m = \delta_{a_1 b_1} \delta_{a_2 b_2} \cdots \\ & \quad \cdots \delta_{a_{i-1} b_{i-1}} \delta_{a_{i+1} b_{i+1}} \cdots \delta_{a_{j-1} b_{j-1}} \delta_{a_{j+1} b_{j+1}} \cdots \delta_{a_m b_m} \times \\ & \quad \times \int \int \psi_{a_i}^*(x_i) \psi_{a_j}^*(x_j) V_{ij}(x_i, x_j) \psi_{b_i}(x_i) \psi_{b_j}(x_j) dx_i dx_j. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Therefore the matrix elements of V in the zero-order scheme are the sums of matrix elements of the type (2). The coefficients depend only on the operators commuting with the interaction energy (quantum numbers) and may be calculated without the explicit knowledge of the interaction, as they are independent of the exact form of the wave functions. There are well developed methods for obtaining them, as given by CONDON and SHORTLEY¹¹), G. RACAH¹²) and others. The explicit dependence on the form of the interaction is contained in the matrix elements which we shall consider in some detail.

§ 2. Survey of the Slater Method.

The important feature of the matrix element

$$\int \int \psi_{a_1}^*(\vec{r}_1) \psi_{a_2}^*(\vec{r}_2) V_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi_{b_1}(\vec{r}_1) \psi_{b_2}(\vec{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \quad (3)$$

is that the ψ are functions of \vec{r}_1 and \vec{r}_2 , and V_{12} is a function of $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. The usual way of treating such expressions in atomic spectroscopy was developed by J. SLATER¹³), who expressed $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ as

a function of \vec{r}_1 and \vec{r}_2 . The procedure is to expand $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ in a series of Legendre polynomials, the argument of which is the angle ω_{12} between \vec{r}_1 and \vec{r}_2 with coefficients which are functions of $|\vec{r}_1|$ and $|\vec{r}_2|$:

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r_1, r_2) P_k(\cos \omega_{12}). \quad (4)$$

$P_k(\cos \omega_{12})$ can be expanded in a finite sum of products of spherical harmonics which are functions of ϑ_1, φ_1 and ϑ_2, φ_2 respectively (these are the polar angles of \vec{r}_1 and \vec{r}_2). At this stage the angular integrations can be performed, and a sum of radial integrals

$$R^k(a_1, a_2, b_1, b_2) = \int \int R_{a_1}(r_1) R_{a_2}(r_2) f_k(r_1, r_2) R_{b_1}(r_1) R_{b_2}(r_2) dr_1 dr_2 \quad (5)$$

remains, the coefficients of which are products of two integrals of the type $\int \Theta_k \Theta_l \Theta_{l'} d \cos \vartheta$ (only finite number of these coefficients do not vanish for definite a_1, a_2, b_1, b_2). We shall mention in this work the F^k only, but all the considerations are true mutatis mutandis for the G^k too

$$[F^k(a_1, a_2) = R^k(a_1, a_2, a_1, a_2) \quad G^k(a_1, a_2) = R^k(a_1, a_2, a_2, a_1)].$$

This procedure is very useful in atomic spectroscopy because there the interaction is given by $V_{12} = e^2/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ and there exists the simple expansion:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} P_k(\cos \omega_{12}) \quad r_{<} = \text{Min}(r_1, r_2) \quad r_{>} = \text{Max}(r_1, r_2).$$

The wave functions are not easy to compute, and their radial part is the only indeterminate factor of the F^k . In fact, the atomic spectroscopists did not bother themselves with the calculations of the F^k , as in any case many energy levels were measured, so that it was easy to evaluate the F^k from some of them, and check whether these values of the Slater parameters really gave the other levels as well. In nuclear spectroscopy, on the other hand, this is impossible as there are usually only very few levels measured and classified. Therefore if one is to use the Slater-method, the F^k must be mathematically evaluated. Even for the central forces, however, we do not know the exact form of the potential. We should therefore calculate the energy levels for different forms of the potential. However even in simple cases such as the Yukawa potential, the calculation of the F_k is so complicated that Slater-method is of little practical value.

For complicated interactions, such as tensor forces and mutual spin-orbit interaction, the expansion is very complicated and of practically no value (an example of such an expansion is given in a paper of MARVIN¹⁴).

§ 3. *The alternative method for the oscillator wave functions.*

To overcome these difficulties we make use of the fact that the interaction energy depends only on the relative coordinate $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, and our procedure is to express also the wave functions as functions of $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ and the other coordinate $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ (the coordinate of the center of gravity of the 1st and 2nd nucleons). This transformation enables us, when calculating matrix elements, to integrate immediately with respect to R , and we are left with a single integration of $\int \psi_1^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) d^3r$ which can usually be carried out without difficulties.

This coordinate transformation is always possible, but the functions of \vec{r} and \vec{R} generally turn out to be very complicated. The success of this procedure depends on the proper choice of the wave-functions. The best choice would be that one which allows us to expand the wave-function $\psi_{a_1}(\vec{r}_1) \psi_{a_2}(\vec{r}_2)$ in a finite sum of products of functions which depend on \vec{r} and \vec{R} respectively. This would certainly be the case if the potential of the central field, which is the sum $V_c(r_1^2) + V_c(r_2^2)$, is also separable in the coordinates r and R .

The condition for such a decomposition is:

$$V_c(r_1^2) + V_c(r_2^2) = U(R^2) + W(r^2). \quad (6)$$

Putting $r = 0$ we obtain:

$$2 V_c(R^2) = U(R^2) + \text{const.}$$

and putting $R = 0$ we obtain:

$$2 V_c(r^2) = W(4 r^2) + \text{const.}$$

If we now put in (6) $r_1^2 = r_2^2$ so that $R^2 = r_1^2 \cos^2 \alpha$, $r^2 = 4 r_1 \sin^2 \alpha$ where 2α is the angle between \vec{r}_1 and \vec{r}_2 we obtain:

$$2 V_c(r_1^2) = 2 V_c(r_1^2 \cos^2 \alpha) + 2 V_c\left(\frac{4 r_1^2 \sin^2 \alpha}{4}\right) + \text{const.}$$

Differentiation with respect to α yields:

$$0 = -2 r_1^2 \cos \alpha \sin \alpha V_c'(r_1^2 \cos^2 \alpha) + 2 r_1^2 \sin \alpha \cos \alpha V_c'(r_1^2 \sin^2 \alpha)$$

or:

$$V_c'(r_1^2 \cos^2 \alpha) = V_c'(r_1^2 \sin^2 \alpha)$$

which means $V_c(r^2) = \text{const.} = A$, i.e. $V_c(r^2) = A r^2 + \text{const.}$ Therefore the only potential (possessing a derivative) which satisfies this condition is the harmonic oscillator potential:

$$\omega r_1^2 + \omega r_2^2 = \frac{1}{2} (4 \omega^2 R^2 + \omega^2 r^2) .$$

Taking the wave functions of the harmonic oscillator we can decompose every wave-function $\psi_{a_1}(\vec{r}_1) \psi_{a_2}(\vec{r}_2)$ into a finite sum of terms of the form $\psi_1(\vec{R}) \psi_2(\vec{r})$ (where ψ_1, ψ_2 are essentially functions of the same kind as ψ_{a_1}, ψ_{a_2}).

In order to utilize this method we must, therefore, use a very special form of the wave functions. This is not such a serious limitation, however, as the exact form of the potential and hence of the wave-functions, is not accurately known. We shall therefore be satisfied with the harmonic oscillator wave-functions, using them as model wave-functions, in order to learn the behaviour of, say, the energy levels in terms of the nuclear radius, range, magnitude and form of the potential.

Compared with other model wave-functions, it seems that, physically, those of the harmonic oscillator are quite good, as the order of levels in the shell model is roughly that of an oscillator potential well.

The potential of a single nucleon bound harmonically, besides being in a central potential, is separable also in Cartesian coordinates. Therefore every function of the three dimensional oscillator can be given as a product of three wave-functions of the one dimensional oscillator depending on the Cartesian coordinates x, y , and z . This representation of the wave-functions has been extensively used¹⁵⁾¹⁶⁾. The coordinates used in this work are, however, the polar coordinates, and the wave functions are therefore a product of a function of r and a spherical harmonic.

The radial parts of the wave functions

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi)$$

are easily calculated, and can be shown to be of the form:

$$R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-\frac{\nu}{2} r^2} r^{l+1} v_{nl}(r)$$

where N_{nl} is a normalization factor, and v_{nl} is an associated Laguerre polynomial¹⁷⁾ (properly normalized):

$$v_{nl}(r) = L_{n+l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(\nu r^2)$$

ν is given by $\nu = \omega m/h$, and m and ω appear in the Hamiltonian of the harmonic oscillator:

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 r^2).$$

The explicit expression for these $L_{n+l+1/2}^{l+1/2}$ is

$$L_{n+l+1/2}^{l+1/2}(\varrho) = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^k \binom{n}{k} \frac{(2l+1)!!}{(2l+2k+1)!!} \varrho^k.$$

With this definition the normalization factor becomes:

$$N_{nl}^2 = \frac{2^{l-n+2} (2l+2n+1)!! \nu^{l+3/2}}{\sqrt{\pi} n! [(2l+1)!!]^2}.$$

The first few functions are:

for $n = 0$

$$R_l(r) = N_l e^{-\frac{\nu}{2} r^2} r^{l+1} \quad \text{and} \quad N_l^2 = \frac{\sqrt{\nu} \nu^{l+1} 2^{l+2}}{\sqrt{\pi} 1 \cdot 3 \cdots (1+2l)},$$

for $n = 1$

$$v_{1l} = 1 - \frac{2\nu}{2l+3} r^2 \quad \text{and} \quad N_{1l}^2 = \frac{\sqrt{\nu} \nu^{l+1} 2^{l+1} (2l+3)}{\sqrt{\pi} 1 \cdot 3 \cdots (1+2l)},$$

for $n = 2$

$$v_{2l} = 1 - \frac{4\nu}{2l+3} r^2 + \frac{4\nu^2}{(2l+3)(2l+5)} r^4$$

$$\text{and } N_{2l}^2 = \frac{\sqrt{\nu} \nu^{l+1} 2^{l-1} (2l+3)(2l+5)}{\sqrt{\pi} 1 \cdot 3 \cdots (1+2l)}.$$

These are the only wave-functions which will be used in the following. All of them satisfy:

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r) dr = 1;$$

the $Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi)$ should therefore also be normalized to unity.

We shall have to calculate integrals of the form

$$I_{nl} = \int_0^\infty R_{nl}^2(r) V(r) dr$$

The integrals I_{nl} with $n \neq 0$ can be expressed as sums of integrals I_{0l} which we shall write simply as I_l . The respective formulae are:

$$I_{1l} = \frac{2l+3}{2} I_l - (2l+3) I_{l+1} + \frac{2l+5}{2} I_{l+2}$$

$$I_{2l} = \frac{(2l+3)(2l+5)}{8} I_l - \frac{(2l+3)(2l+5)}{2} I_{l+1} + \frac{(2l+5)(6l+13)}{4} \times$$

$$\times I_{l+2} - \frac{(2l+5)(2l+7)}{2} I_{l+3} + \frac{(2l+7)(2l+9)}{8} I_{l+4}.$$

We shall not need here formulae for higher n , but they can be easily calculated. These I_ν , as we shall see later, replace the F_k of the Slater method, but unlike the latter can be calculated by a simple integration.

§ 4. *The transformation to the relative and center of gravity coordinates.*

The zero-order Hamiltonian of two nucleons moving in the field of the oscillator potential is:

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + m^2 \omega^2 r_1^2) + \frac{1}{2m} (p_2^2 + m^2 \omega^2 r_2^2).$$

We make now the canonical coordinate transformation:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & \vec{p} &= \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{2} \\ \vec{R} &= \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2} & \vec{P} &= \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \end{aligned}$$

which introduces the relative coordinate and the center of gravity coordinate of the two nucleons, with the respective momenta. The Hamiltonian expressed in terms of the new variables is:

$$H = \frac{1}{2M} (P^2 + M^2 \omega^2 R^2) + \frac{1}{2\mu} (p^2 + \mu^2 \omega^2 r^2)$$

where:

$$M = 2m, \quad \mu = \frac{1}{2}m.$$

This is the Hamiltonian of two harmonic oscillators with masses M and μ . The solution of the corresponding wave-equation can be written as a product of wave-functions of the two oscillator potentials depending on R and r respectively. The angular momenta and the number of nodes which characterize these wave functions will be called L, A and N, n respectively.

If we want to express the wave-function $\psi_{n_1 l_1}^{m_1}(\vec{r}_1) \psi_{n_2 l_2}^{m_2}(\vec{r}_2)$ of two nucleons with definite quantum numbers $n_1 l_1 m_1$ and $n_2 l_2 m_2$, as a sum of products $\psi_{NL}^M(\vec{R}) \psi_{nA}^m(\vec{r})$ we must find out what values of N, L, M and n, A, m should be taken into account. It is obvious that the integrals (quantum numbers) of the system must have the same values on both sides. We thus have the following restrictions:

(1) The z -component of the orbital angular momentum.

$$m_1 + m_2 = M + m.$$

(2) The energy.

$$\hbar \omega (2 n_1 + l_1 + 2 n_2 + l_2 + 3) = \hbar \omega (2 N + L + 2 n + A + 3)$$

which implies

$$2 n_1 + 2 n_2 + l_1 + l_2 = 2 N + 2 n + L + A.$$

(3) The symmetry. Instead of the wave-function $\psi_{n_1 l_1}^{m_1}(\vec{r}_1) \psi_{n_2 l_2}^{m_2}(\vec{r}_2)$ (in the case that n_1, l_1, m_1 , differ from n_2, l_2, m_2) it is useful to take the symmetric and anti-symmetric combinations:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{n_1 l_1}^{m_1}(\vec{r}_1) \psi_{n_2 l_2}^{m_2}(\vec{r}_2) + \psi_{n_1 l_1}^{m_1}(\vec{r}_2) \psi_{n_2 l_2}^{m_2}(\vec{r}_1)) \quad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{n_1 l_1}^{m_1}(\vec{r}_1) \psi_{n_2 l_2}^{m_2}(\vec{r}_2) - \psi_{n_1 l_1}^{m_1}(\vec{r}_2) \psi_{n_2 l_2}^{m_2}(\vec{r}_1)) \quad (8)$$

which are multiplied by $+1$ and (-1) respectively under the transformation $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1$ (which induces the transformation $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, $\vec{R} \rightarrow \vec{r}$), and therefore $\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r})$ is multiplied by $(-1)^A$ (the parity of $\psi_A(r)$). Therefore:

Symmetrical (antisymmetrical) wave-functions contain only even (odd) values of A in their expansion.

(4) Parity. The transformation $\vec{r}_1 \rightarrow -\vec{r}_1$ corresponds to $\vec{r} \rightarrow 2\vec{R}$, $\vec{R} \rightarrow \vec{r}/2$. The radial part of the function $\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r})$, which is the only part that changes, is $f(\sqrt{2} \nu R) g(\sqrt{\nu} r/\sqrt{2})$ (the factors 2 and $1/2$ multiplying the ν of the oscillator potential come from $M = 2m$, $\mu = m/2$). Therefore it is changed under the transformation according to:

$$f(\sqrt{2} \nu R) g\left(\sqrt{\frac{\nu}{2}} r\right) \rightarrow f\left(\sqrt{2} \nu \frac{r}{2}\right) g\left(\sqrt{\frac{\nu}{2}} 2 R\right) = f\left(\sqrt{\frac{\nu}{2}} r\right) g(\sqrt{2} \nu R)$$

and consequently:

$$\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r}) \rightarrow \psi_L(\vec{r}) \psi_A(\vec{R}).$$

In the same way it is seen that the transformation $\vec{r}_2 \rightarrow -\vec{r}_2$ or $\vec{r} \rightarrow -2\vec{R}$, $\vec{R} \rightarrow -\vec{r}/2$ results in:

$$\psi_L(\vec{r}_1) \psi_A(\vec{r}) \rightarrow (-1)^{L+A} \psi_L(\vec{r}) \psi_A(\vec{R}).$$

As a result, the expansion of $\psi_{l_1}(\vec{r}_1) \psi_{l_2}(\vec{r}_2)$ should contain $\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r})$ and $\psi_L(\vec{r}) \psi_A(\vec{R})$ only in the combination:

$$\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r}) + (-1)^L \psi_L(\vec{r}) \psi_A(\vec{R}). \quad (9)$$

It is multiplied in the transformation $\vec{r}_1 \rightarrow -\vec{r}_1$ by $(-1)^{l_1}$, and in the transformation $\vec{r}_2 \rightarrow -\vec{r}_2$ by

$$(-1)^{L+A} (-1)^{l_1} = (-1)^{l_1+l_2} (-1)^{l_1} = (-1)^{l_2}$$

(as $2N + 2n + L + A = 2n_1 + 2n_2 + l_1 + l_2$).

When we build the symmetric and antisymmetric functions, we see that if l_1 and l_2 are both even or both odd (and hence L and A have the same property) both $\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r})$ and $\psi_L(\vec{r}) \psi_A(\vec{R})$ may enter into those functions, and therefore only in the combination (9). If one of l_1, l_2 is even and the other is odd, the symmetric function contains only $\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r})$ (with A even and L odd) and the antisymmetric function contain only $\psi_A(\vec{R}) \psi_L(\vec{r})$. Therefore the coefficient of $\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r})$ in the symmetric function should be $(-1)^{l_1}$ times the coefficient of $\psi_A(\vec{R}) \psi_L(\vec{r})$ in the antisymmetric function.

Subject to the above conditions, the transformation is most conveniently calculated in the following manner. The wave-functions (7) and (8) are written down in the case $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = \Phi$. It is then easy to express them as functions of \vec{R} and \vec{r} and compare these expressions with a linear combination of the admissible wave-functions $\psi_{NL}^M(\vec{R}) \psi_{nA}^m(\vec{r})$ (according to the above conditions). By equating respective coefficients, the factors of this expansion may be easily found. When doing so no account should be taken of the exponential factor, as

$$e^{-\frac{\nu}{2} r_1^2} e^{-\frac{\nu}{2} r_2^2} = e^{-\frac{\nu}{2} (r_1^2 + r_2^2)} = e^{-\frac{\nu}{2} \left(\frac{4R^2 + r^2}{2} \right)} = e^{-\frac{2\nu}{2} R^2} e^{-\frac{\nu/2}{2} r^2}.$$

II. On the Order of Levels in j^n Configurations.

§ 5. The evaluation of Slater parameters for the harmonic oscillator wave-functions.

The method described in I will now be used to obtain some results on level spacings and especially on the order of levels in a few interesting cases together with a discussion of their dependence on the range and form of the potential. An important problem in the shell model based on strong spin-orbit coupling, which leads to the jj -coupling scheme, is the determination of the spin (total angular momentum) of the ground state of the j^n configuration. It was pointed out by FEENBERG¹⁸) that for $n = 2$ the spin of the ground state is zero (for Majorana forces). His argument was generalized by RACAH¹⁹) who showed that for any n the ground state has the

minimum spin allowed by the Pauli principle, namely (for an odd n) $3/2$ in the case of three particles (or holes) in a shell, and $1/2$ in other cases. This result is apparently in contradiction with the empirical rule that the spin of the ground state is equal to the spin of the odd nucleon. However, RACAH's argument was based (as that of FEENBERG) on the long range approximation, in which one assumes that the interaction potential can be approximated by a square well in the region where the amplitudes of the wave-functions are important. On the other hand, results of MAYER²⁾ showed that with a δ -potential the spin of the ground state is $J = j$ if n is odd and $J = 0$ if n is even. (This is in fact a short-range approximation, where one assumes that the potential is different from zero only in a region so small that the change of the wave-functions in that region is small compared to the wave-functions themselves.) This result was subsequently proved by RACAH³⁾ in a general way.

If we pass continuously (i.e. by a continuous change of some parameters) from the short range limit to that of the long range, we see that the order of levels changes continuously, and for different values of the parameters one obtains different spins of the ground state. The dependence of the spin of the ground state on the range of the potential has been treated in some special cases by KURATH⁴⁾ and the author⁵⁾. In the following, our method is used to obtain general results which are applicable to every potential, and additional interesting forms of the potential are treated.

The method of the harmonic oscillator wave functions can be combined with the vast amount of results calculated in atomic spectroscopy: in these results all the energy levels are expressed in terms of the F_k ; on the other hand it is possible to express them in terms of the integrals I_l . It is therefore always possible to write down the F_k as functions of the I_l . This allows us to calculate the values of the F_k , when using any potential, by first computing the values of the I_l by direct integration. The use of this procedure makes all the formulae derived in the F_k formalism useful for calculations of the energy levels.

If one is interested in central interactions only, it is not necessary to calculate the wave-functions of the configuration in terms of \vec{R} and \vec{r} , as only the Slater parameters F_k are required and with the above transformation they can be directly calculated in terms of the I_l .

The F^k (which differ only by a constant factor from the F_k) are defined by:

$$F^k(a_1, a_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty R_{a_1}^2(r_1) R_{a_2}^2(r_2) f_k(r_1, r_2) dr_1 dr_2$$

where the $f_k(r_1, r_2)$ are the coefficients of the expansion (4). The f_k are therefore given by

$$f_k(r_1, r_2) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) P_k(\cos \omega_{12}) d \cos \omega_{12}$$

(the factor $2/2k+1$ is the square of the normalization factor of the Legendre polynomials), and thus:

$$F^k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \int_0^\infty V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{R_{a_1}^2(r_1)}{r_1^2} \frac{R_{a_2}^2(r_2)}{r_2^2} \times \\ \times P_k(\cos \omega_{12}) r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 d \cos \omega_{12}.$$

This expression can be integrated also over other angles $d\Omega$ of which the integrand is independent, thus completing $r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 d \cos \omega_{12}$ to the differential of the volume element in the space of the vectors \vec{r}_1 and \vec{r}_2 . We obtain, after multiplication by a proper normalization factor N_Ω ,

$$F^k(a_1, a_2) = N_\Omega \frac{2k+1}{2} \int \int V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{R_{a_1}^2(r_1)}{r_1^2} \frac{R_{a_2}^2(r_2)}{r_2^2} \times \\ \times P_k(\cos \omega_{12}) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (10)$$

This integral can now be transformed to an integral over \vec{R} and \vec{r} . As $V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$ is a function of $|\vec{r}|$ only, it remains to express

$$\frac{R_{a_1}^2(r_1)}{r_1^2} \frac{R_{a_2}^2(r_2)}{r_2^2} P_k(\cos \omega_{12})$$

in terms of \vec{R} and \vec{r} . This is always possible with the help of the relation

$$r_1 r_2 \cos \omega_{12} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{4} (4R^2 - r^2).$$

The result is a function of R, r and the angle α between the vectors \vec{R} and $\vec{r} - \varphi_k(R, r, \alpha)$. So the above expression becomes:

$$F^k = \frac{2k+1}{2} N_\Omega \int \int V(r) \varphi_k(R, r, \alpha) d^3 R d^3 r = \frac{2k+1}{2} N_\Omega \times \\ \times \int_{\Omega'} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \int_0^\infty V(r) \varphi_k(R, r, \alpha) R^2 dR r^2 dr d \cos \alpha d \Omega' = \frac{2k+1}{2} \times \\ \times \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \int_0^\infty V(r) \varphi_k(R, r, \alpha) R^2 dR r^2 dr d \cos \alpha. \quad (11)$$

Where $d\Omega'$ stands for the differentials which form with $R^2 dR r^2 dr \times d\cos \alpha$ the volume element $d^3R d^3r$; the integrand is independent of them and the integration results merely in the dropping of the normalization constant N_Ω . The integration over α can be easily done and it is then possible to carry out the R -integration, which leaves F^k expressed in terms of the r -integrals $-I_l$. In this way the Slater parameters are calculated in terms of simple integrals without bothering about the expansion of the potential in a series of Legendre polynomials and without the complicated integrations in which such an expansion results.

In order to see how this procedure works, we give explicitly the expression of $r_1^k r_2^k P_k(\cos \omega_{12})$ in terms of R, r and α . This expression results from the calculation of a configuration in which $l_1 = l_2$ (and therefore k is even). Putting

$$P_k(\cos \omega_{12}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cos^{2n} \omega_{12}$$

$k = 2m$, we obtain:

$$\begin{aligned} r_1^k r_2^k P_k(\cos \omega_{12}) &= \sum_{n=0}^m c_{2n} r_1^{k-2n} r_2^{k-2n} r_1^{2n} r_2^{2n} \cos^{2n} \omega_{12} = \\ &= \sum_{n=0}^m c_{2n} (r_1^2 r_2^2)^{m-n} \left(\frac{4R^2 - r^2}{4} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^m c_{2n} \left(\frac{4R^2 - r^2}{4} \right)^{2n} \times \\ &\times \left[\left(\frac{4R^2 - r^2}{4} \right)^2 + R^2 r^2 - (\vec{R}, \vec{r})^2 \right]^{m-n}. \end{aligned}$$

Use was made here of the relation

$$r_1^2 r_2^2 = \left(\frac{4R^2 - r^2}{4} \right)^2 + R^2 r^2 - (\vec{R}, \vec{r})^2 = \left(\frac{4R^2 - r^2}{4} \right)^2 + R^2 r^2 \sin^2 \alpha.$$

As an example we evaluate in detail F^2 of the configuration p^2 :

$$\begin{aligned} F^2 &= N_1^4 \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \int_0^\infty V(r) e^{-\nu(r_1^2 + r_2^2)} r_1^2 r_2^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega_{12} - \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 d\cos \omega_{12} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{\nu} \nu^2 8}{\sqrt{\pi} \cdot 3} \right)^2 \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \int_0^\infty V(r) e^{-\nu \frac{4R^2 + r^2}{2}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{4R^2 - r^2}{4} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4R^2 - r^2}{4} \right)^2 + R^2 r^2 \sin^2 \alpha \right) \right] R^2 dR r^2 dr d\cos \alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\sqrt{\nu} \nu^2 8}{\sqrt{\pi} \cdot 3} \right)^2 5 \int_0^\infty V(r) e^{-\frac{\nu}{2} r^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{4 \sqrt{\pi} 15}{\sqrt{2} \nu (2 \nu)^3 16} + \frac{\sqrt{\pi}}{4 \sqrt{2} \nu \cdot 2 \nu \cdot 4} r^4 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5 \sqrt{\pi} \cdot 3}{6 \sqrt{2} \nu (2 \nu)^2 8} r^2 \right] r^2 dr = \left(\frac{\sqrt{\nu} \nu^2 8}{\sqrt{\pi} \cdot 3} \right)^2 \times \\
 &\quad \times 5 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{4 \sqrt{\pi} \cdot 15}{\sqrt{2} \nu (2 \nu)^3 16} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu/2} \cdot \nu/2 \cdot 4} I_0 + \frac{\sqrt{\pi}}{4 \sqrt{2} \nu \cdot 2 \nu \cdot 4} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot 15}{\sqrt{\nu/2} (\nu/2)^3 16} I_2 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{5 \sqrt{\pi} 3}{6 \sqrt{2} \nu (2 \nu)^2 8} \cdot \frac{\sqrt{\pi} 3}{\sqrt{\nu/2} (\nu/2)^2 8} I_1 \right] = \frac{25}{12} [(I_0 + I_2) - 2 I_1].
 \end{aligned}$$

In this way the F^k for the configurations d^n , f^n , and g^n were obtained; these are later used in the discussion of the jj -coupling configurations $(d_{5/2})^3$, $(f_{7/2})^3$, and $(g_{5/2})^3$.

§ 6. The $(d_{5/2})^3$ configuration with various potentials.

The simplest configuration where the short and long range approximations give different results is $(d_{5/2})^3$. In the δ -limit the state with $J = 5/2$ is the ground state, and in the long range limit the state with $J = 3/2$ is the lowest. If one passes from one limit to the other a cross-over of these two levels occurs. This case is also of an experimental interest as a $J = 3/2$ state of the configuration is postulated¹⁾ for the ground state of Na²¹. This case was treated by KURATH⁴⁾ who used oscillator wave-functions and a Gaussian potential. It was also calculated by the author⁵⁾ using the Slater method with Coulomb field wave-functions and a Yukawa potential. The results were different, since the Gaussian potential can be well approximated by a square well when its range is increased, whereas the Yukawa potential has a singularity at the origin and does not yield the long range limit when its range tends to infinity. We shall discuss in this paragraph the cross-over and its dependence on the range and form of the potential.

The energy states of the configuration $(d_{5/2})^n$ were calculated by INGLIS²⁰⁾ in the case of ordinary (WIGNER) forces between the particles. The calculation of the levels in the case of Majorana interaction can be carried out in the same manner (an example of such a calculation is given later in the case of Li⁷).

The results are:

$$\begin{aligned} E_{9/2} &= \frac{36}{25} F^0 - \frac{72}{5 \cdot 49} F^2 - \frac{1329}{25 \cdot 441} F^4 \\ E_{5/2} &= \frac{4}{5} F^0 - \frac{56}{5 \cdot 49} F^2 - \frac{651}{5 \cdot 441} F^4 \\ E_{3/2} &= \frac{3}{5} F^0 + \frac{12}{5 \cdot 49} F^2 - \frac{627}{5 \cdot 441} F^4. \end{aligned}$$

The sign convention is that the F_k are positive and the Majorana potential is attractive (negative) in symmetrical states.

From the definition of the F_k it follows that in the short range limit $F^k = (2k+1) F_0$, while in the long range approximation $F^k \ll F_0$. From these relations the order of the levels $J = 5/2$ and $J = 3/2$ in the two limits can be immediately seen. We calculated the F^k in terms of the I_i using the procedure of § 5 with the following results:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 F^0 &= \frac{63}{16} (I_0 + I_4) + \frac{7}{4} (I_1 + I_3) + \frac{29}{8} I_2 \\ 7 \cdot 3 \frac{1}{49} F^2 &= \frac{9}{16} (I_0 + I_4) - \frac{1}{2} (I_1 + I_3) - \frac{1}{8} I_2 \\ 7 \cdot 5 \frac{1}{49} F^4 &= \frac{3}{16} (I_0 + I_4) - \frac{3}{4} (I_1 + I_3) + \frac{9}{8} I_2. \end{aligned}$$

Remark: In the above results only the combination $(I_0 + I_4)$, $(I_1 + I_3)$ appear, thus forming with I_2 three independent parameters which replace F_0 , F_2 , and F_4 of the Slater method. The reason for this fact can be seen as follows: In the wave-function $\psi_{l_1}(r_1) \psi_{l_2}(r_2)$ the product $r_{l_1}^{l_1} \cdot r_{l_2}^{l_2}$ appears as a factor, and therefore when we express it as a function of \vec{r} and \vec{R} the sum of the powers of R and r in every term is equal to $l_1 + l_2$. The transformation $\vec{r}_1 \rightarrow -\vec{r}_1$ which induces $\vec{r} \rightarrow 2\vec{R}$, $\vec{R} \rightarrow \vec{r}/2$ transforms, as we have already seen, $f(\sqrt{2}r) g(\sqrt{2}R)$ into $f(\sqrt{2}r) g(\sqrt{2}R)$. As a result, to every term in which $R^m r^{l_1+l_2-m}$ appears there corresponds another term which has the same angular part and contains $r^m R^{l_1+l_2-m}$ as a factor. When the angular and R -integrations are performed these two terms give in the r -integration the integrals $I_{l_1+l_2-m}$ and I_m with the same factors. Therefore only the combination $(I_m + I_{l_1+l_2-m})$ appears in the result. It should be remembered that there exists only one set of the I_i the combinations of which form the F_k and G_k of the various configurations.

Putting these values in the above formulae we obtain the energy levels expressed by the I_i :

$$\begin{aligned} E_{9/2} &= \frac{1}{25} \left(-\frac{117}{16} (I_0 + I_4) + \frac{165}{4} (I_1 + I_3) - \frac{255}{8} I_2 \right) \\ E_{5/2} &= \frac{1}{5} \left(-\frac{63}{16} (I_0 + I_4) + \frac{63}{4} (I_1 + I_3) - \frac{157}{8} I_2 \right) \\ E_{3/2} &= \frac{1}{5} \left(-\frac{36}{16} (I_0 + I_4) + \frac{54}{4} (I_1 + I_3) - \frac{156}{8} I_2 \right). \end{aligned}$$

From the definition of the I_l it is seen that in the short range approximation $I_l \ll I_0$ ($l > 0$) (because for $l > 0$, R_l vanishes at the origin), and in the long range limit all the I_l are equal.

This property of the I_l makes our method useful for approximations in the short range limit. In the first approximation only the coefficient of I_0 should be calculated (use is made of this fact in § 15). On the other hand the Slater method can serve as an approximation in the long range limit. Near this limit $F^k \ll F^0$ ($k > 0$), so that the first approximation is given by F^0 . From this point of view these two methods are complementary, and hence it is natural to work with the I_l in nuclear spectroscopy where there are good reasons to believe that the short range approximation is justified.

We have mentioned before that the cross-over should depend not only on the range of the potential but also strongly on its form. A flat potential like a square well or the Gaussian potential give the long range limit as its range tends to infinity, but a potential which is singular at the origin does not yield the long range limit even if its range tends to infinity (the important parts of the potential are in the neighbourhood of the origin). The I_l ($l > 0$), though they are no longer zero, do not approach the value of I_0 (alternatively the F^k , $k > 0$, are smaller than F^0 but do not tend to zero). As far as the order of the levels is considered, such potentials represent an intermediate case between the two limits.

We shall compare potentials in which the range parameter appears in the same manner but their forms are different, namely:

- (a) the Gaussian potential $V e^{-r^2/r_0^2}$ which for $r_0 \rightarrow \infty$ gives the long range limit (this potential was used by KURATH⁴);
- (b) the potential $V e^{-r^2/r_0^2} / r/r_0$ which gives in the limit $r_0 \rightarrow \infty$ the Coulomb potential, and,
- (c) the potential $V e^{-r^2/r_0^2} / r^2/r_0^2$ which is still more singular at the origin.

Although the difference in behaviour was already noted⁵), we discuss it again as we shall use here the same wave-functions for all of them. The I_l corresponding to these potentials are calculated to be:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad I_l &= N_l^2 \int_0^\infty e^{-\nu r^2} V(r) r^{2l+2} dr = N_l^2 V \int_0^\infty e^{-\left(\nu + \frac{1}{r_0^2}\right) r^2} r^{2l+2} dr = \\
 &= V \left(\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^{l+3/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad I_l &= N_l^2 \int_0^\infty e^{-\nu r^2} V(r) r^{2l+2} dr = N_l^2 V r_0 \int_0^\infty e^{-\left(\nu + \frac{1}{r_0^2}\right) r^2} r^{2l+1} dr = \\
 &= V \lambda \frac{n_l^2 l!}{2 \sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^{l+1} \quad n_l^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu} \nu^{l+1}} N_l^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad I_l &= N_l^2 \int_0^\infty e^{-\nu r^2} V(r) r^{2l+2} dr = N_l^2 V r_0^2 \int_0^\infty e^{-\left(\nu + \frac{1}{r_0^2}\right) r^2} r^{2l} dr = \\
 &= V \lambda^2 \frac{2}{2l+1} \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^{l+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

λ is defined by $\lambda = r_0 \sqrt{\nu}$; it is the ratio of the potential range to $1/\sqrt{\nu}$ which determines the extension of the wave-function. If λ tends to infinity it may be seen that I_l of the Gaussian potential are all equal, while in the limit $\lambda \rightarrow \infty$ for the case (b) (which gives the Coulomb potential), I_l is proportional to $n_l^2 l!$; and in case (c) I_l is proportional to $2/2l+1$.

The cross over of the levels $J = 5/2$ and $J = 3/2$ occurs where the I fulfil the equation:

$$27(I_0 + I_4) - 36(I_1 + I_3) + 2I_2 = 0. \quad (13)$$

Relative to the value of I , the values of the I in the three cases are:

$$\text{(a)} \quad I_l \sim \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^l$$

$$\text{(b)} \quad I_l \sim \frac{n_l^2 l!}{4} \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^l$$

and

$$\text{(c)} \quad I_l \sim \frac{1}{2l+1} \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^l.$$

Using these relations we find that the cross over occurs in case (a) at the value $\lambda = 1.326$, whereas in case (b) it occurs only at $\lambda = 4.34$. The effect of the form of the potential appears more pronounced in case (c); in this case no cross-over occurs as λ varies from zero to infinity. [For the left hand side of (13) for $\lambda = 0$ is positive, and it remains so even when the I_l attain their maximum value $\sim 1/(2l+1)$.]

This strong dependence on the form shows that for such problems it is not enough to consider the range only. Potentials of different forms which may be adjusted to fit some condition will not usually give here the same results.

In the preceding section we discussed the effect of the form of the potential on the order of the levels and the place of the cross-

over, using the same wave-functions; we shall now give the results for the Yukawa potential using harmonic oscillator wave-functions and compare them to those obtained with the Coulomb field wave-functions⁵).

For the Yukawa potential, $V(r) = V e^{-r/r_0} / r/r_0$, the I_l are calculated as follows:

$$I_l = N_l^2 \int_0^\infty V(r) e^{-\nu r^2} r^{2l+2} dr = N_l^2 V r_0 \int_0^\infty e^{-\nu r^2 - r/r_0} r^{2l+1} dr = \\ = \frac{N_l^2}{\sqrt{\nu} \nu^{l+1}} V \lambda \int_0^\infty e^{-\xi^2 - \xi/\lambda} \xi^{2l+1} d\xi$$

where $\xi = \sqrt{\nu} r$ and $\lambda = \sqrt{\nu} r_0$. We introduce the constant $\mu = 1/2 \lambda$ and $x = \xi + \mu$, and obtain:

$$I_l = \frac{N_l^2}{\sqrt{\nu} \nu^{l+1}} V \lambda e^{\mu^2} \int_\mu^\infty e^{-x^2} (x - \mu)^{2l+1} dx.$$

This gives for the integrals which we need:

$$I_0 = V \lambda \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 2 \mu (1 - \Phi(\mu)) e^{\mu^2} \right] \\ I_1 = \frac{2}{3} V \lambda \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 + \mu^2) - 2 \mu \left(\frac{3}{2} + \mu^2 \right) (1 - \Phi(\mu)) e^{\mu^2} \right] \\ I_2 = \frac{8}{15} V \lambda \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{9}{4} \mu^2 + \frac{1}{2} \mu^4 \right) - 2 \mu \left(\frac{15}{8} + \frac{5}{2} \mu^2 + \frac{1}{2} \mu^4 \right) \times \right. \\ \left. \times (1 - \Phi(\mu)) e^{\mu^2} \right] \\ I_3 = \frac{16}{35} V \lambda \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{29}{8} \mu^2 + \frac{5}{3} \mu^4 + \frac{1}{6} \mu^6 \right) - \right. \\ \left. - 2 \mu \left(\frac{35}{16} + \frac{35}{8} \mu^2 + \frac{7}{4} \mu^4 + \frac{1}{6} \mu^6 \right) (1 - \Phi(\mu)) e^{\mu^2} \right] \\ I_4 = \frac{128}{315} V \lambda \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{325}{64} \mu^2 + \frac{115}{32} \mu^4 + \frac{35}{48} \mu^6 + \frac{1}{24} \mu^8 \right) - \right. \\ \left. - 2 \mu \left(\frac{315}{128} + \frac{105}{16} \mu^2 + \frac{63}{16} \mu^4 + \frac{3}{4} \mu^6 + \frac{1}{24} \mu^8 \right) (1 - \Phi(\mu)) e^{\mu^2} \right]$$

Φ is the error function

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

These values of I_l for various values of μ were substituted into formulae (12), (13) to give the level spacings corresponding to each μ .

The cross-over of the levels $J = 5/2$ and $J = 3/2$ occurs at a value $\lambda = 9$, i.e. for $r_0/r_i = 9/\sqrt{2} \sim 13$ where $r_i = \sqrt{2} \bar{r}$ is the parameter appearing in the wave function of a single d -nucleon. This should be compared to the value $r_0/r_i \sim 10$, obtained with the use of the Coulomb field wave-functions, where r appears in these functions in the exponent: $R_i(r) = N_i r^{l+1} e^{-r/r_i}$.

It is interesting to see that the results are essentially the same, thus supporting the opinion that the exact form of the wave-function is not very important.

The results of this paragraph show that the appearance of the spin $3/2$ in the ground state of Na^{21} is unlikely to be due only to the effect of Majorana forces, as the value of λ which should then be assumed is too big, especially if we assume that the potential is a "deep hole" potential, such as that of YUKAWA, rather than a flat one.

§ 7. The configuration $(f_{7/2})^3$.

This configuration [and equivalently $(f_{7/2})^5$] has six states with spins $J = 15/2, 11/2, 9/2, 7/2, 5/2, 3/2$. For Majorana forces in the short range approximation the state with $J = 7/2$ is the ground state, and in the long range limit the state with $J = 3/2$ is the lowest; above it lies $J = 5/2$ and the state with $J = 7/2$ is next to it. The cross-over of these three states was found by KURATH⁴) who used a Gaussian potential. We shall in the following discuss this configuration using also other forms of the potential.

The matrix elements of the Majorana interaction in the $(j_1, j_2, m_{j_1}, m_{j_2})$ scheme were found in the way described in § 12. The integrals $J(m_1, m_2; m_3, m_4)$ were calculated in terms of the Slater parameters F_k by the usual method. As there are no two states with equal J in this case the sum method was used to obtain the energies of the various states with the following results:

$$\left. \begin{aligned} E_{15/2} &= -90 F_0 + 2700 F_2 + 7020 F_4 + 7974 F_6 \\ E_{11/2} &= -62 F_0 + 1580 F_2 + 2736 F_4 + 42302 F_6 \\ E_{9/2} &= -51 F_0 + 425 F_2 + 6201 F_4 + 32765 F_6 \\ E_{7/2} &= -42 F_0 + 1610 F_2 + 6930 F_4 + 82082 F_6 \\ E_{5/2} &= -35 F_0 + 665 F_2 - 2583 F_4 + 80717 F_6 \\ E_{3/2} &= -30 F_0 - 660 F_2 + 4752 F_4 + 50622 F_6 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

The F_k in the above expressions are defined by:

$$F_0 = \frac{F^0}{7^2}, \quad F_2 = \frac{F^2}{3^2 5^2 7^2}, \quad F_4 = \frac{F^4}{3^2 7^2 11^2}, \quad F_6 = \frac{5^2 F^6}{3^2 7^2 11^2 13^2}.$$

Using the method described above, these F^k are expressed in the terms of I_l as is given in the following formulae:

$$F^6 = \frac{5577}{2240} [I_0 + I_6] - 6 (I_1 + I_5) + 15 (I_2 + I_4) - 20 I_3]$$

$$F^4 = \frac{297}{2240} [13 (I_0 + I_6) - 34 (I_1 + I_5) + 19 (I_2 + I_4) + 4 I_3]$$

$$F^2 = \frac{3}{448} [143 (I_0 + I_6) - 66 (I_1 + I_5) - 15 (I_2 + I_4) - 124 I_3]$$

$$F^0 = \frac{1}{2240} [429 (I_0 + I_6) + 198 (I_1 + I_5) + 387 (I_2 + I_4) + 212 I_3].$$

Taking the Gaussian potential we obtain the following results which are in agreement with those of KURATH: for $\lambda < 1.27$ the lowest state is $J = 7/2$; at $\lambda = 1.27$ the level with $J = 5/2$ becomes the ground level and is the lowest one in the region $1.27 < \lambda < 1.35$; for $\lambda > 1.35$ the $J = 3/2$ state is the ground state. Thus there is a region where the ground state has the spin $5/2$. The configuration $(f_{7/2})^n$ is predicted by the shell model for all nuclei having N or Z (neutron or proton number) between 20 and 28. The only odd-even nuclei in this region, of which the spins have been measured are the following odd-proton nuclei: ${}_{21}\text{Sc}^{45}$ and ${}_{27}\text{Co}^{59}$ have the spin $7/2$ as required by the shell model, ${}_{23}\text{V}^{51}$ has also the spin $7/2$ whereas ${}_{25}\text{Mn}^{55}$ has the spin $5/2$. It was suggested¹⁾ that the ground state of the last nucleus is a $J = 5/2$ state of the $(f_{7/2})^5$ configuration. KURATH⁴⁾ tries to explain the occurrence of the $5/2$ ground state by suggesting that r_0 of the nuclear forces and r_l of the nucleon orbit satisfy $1.27 < \lambda < 1.35$. Even for the Gaussian potential such a value of r_0 is too big if one determines r_l roughly from the nuclear radius, but a more serious objection is raised if we consider potentials which are singular at the origin. Taking the potential $V(r) = Ve^{-r^2/r_0^2}/r/r_0$ we find that for $\lambda < 3.3$ the ground state is $J = 7/2$, at $\lambda = 3.3$ a cross-over of this with the $J = 3/2$ level occurs and for $\lambda > 3.3$ the ground state is $J = 3/2$. The level $J = 5/2$ crosses the level $J = 7/2$ only at $\lambda = 9.5$ where $J = 3/2$ is already lower. We see that here the use of a $\sim 1/r$ potential not only shifted the points of cross-over but changes completely the situation: there is no more any region of λ where $J = 5/2$ is the ground state. As far as scattering experiments are concerned, there is no indication that the Gaussian potential is better than the Yukawa potential. If one considers it

just as a model the above calculations show that the results depend strongly on the model used and it is a little bit early to draw from them any physical conclusions. We must conclude that it is not likely that the effect of Majorana forces can alone explain the appearance of the $5/2$ ground state of Mn^{55} .

§ 8. The configuration $(g_{9/2})^3$.

This is the simplest configuration j^n in which two states with the same J appear. The states of the $(g_{9/2})^3$ configuration are: two states with $J = 9/2$ and eight more states with $J = 21/2, 17/2, 15/2, 13/2, 11/2, 7/2, 5/2$, and $3/2$. The sum method cannot give the term values of the two $J = 9/2$ states but only their sum. The separation of these energies can be done by diagonalization of the energy matrix, but with the elaborate methods of RACAH¹²⁾ this becomes much easier. One can define two states with $J = 9/2$, one with the Seniority $v = 1$ and the other with $v = 3$. As the interaction energy does not commute with the Seniority operator, there is a non-vanishing matrix element connecting these states and the energies of the ground $J = 9/2$ and of the excited $J = 9/2$ states can be found by diagonalization of the two-rowed matrix.

The energy levels with $J \neq 9/2$ and $J = 9/2, v = 1, J = 9/2, v = 3$ as well as the matrix element V connecting the last two states were calculated by RACAH²¹ in terms of the Slater's F_k . We write here down only the results for $J \leq 9/2$ as the other levels lie above these and are of less physical interest.

State	Type of force									
	Wigner forces					Majorana forces				
	factors of					factors of				
	F_0	F_2	F_4	F_6	F_8	F_0	F_2	F_4	F_6	F_8
$J=9/2 \ v=1$	3	33	1287	429	2431	- 8/9	407/14	24453/14	1144	24739/18
$J=9/2 \ v=3$	3	-43	- 93	-163	-3417	- 8/9	75/14	3153/14	1014	7879/18
$V/\sqrt{429}$	0	- 1	105	- 31	51	0	1/2	- 105/2	31/2	- 51/2
$J=7/2$	3	56	-1488	-595	-2295	- 7/9	100/7	3336/7	542	12379/9
$J=5/2$	3	-14	962	-728	-2652	-56/81	613/63	-4693/7	5629/9	69992/81
$J=3/2$	3	-24	-1488	417	-4947	-17/27	-284/21	4272/7	2518/3	15089/27

The F_k are defined by:

$$F_0 = F^0, \\ F_2 = \frac{4 F^2}{3^2 11^2}, \quad F_4 = \frac{F^4}{11^2 13^2}, \quad F_6 = \frac{16 F^6}{3^2 11^2 13^2}, \quad F_8 = \frac{7^2 F^8}{11^2 13^2 17^2}.$$

The two states with $J = 9/2$ are given by the solutions of the secular equation as follows:

$$E_{9/2}^g = \frac{1}{2}(E_{9/2}^1 + E_{9/2}^3) - \frac{1}{2}[(E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3)^2 + 4V^2]^{1/2}$$

$$E_{9/2}^e = \frac{1}{2}(E_{9/2}^1 + E_{9/2}^3) + \frac{1}{2}[(E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3)^2 + 4V^2]^{1/2}.$$

If one examines the values given above it appears that $|V|$ is small in comparison to $|E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3|$ (it vanishes both in the short range and the long range limits where $v = 1$ and $v = 3$ are exactly the ground and excited states with $J = 9/2$). Therefore it is sufficient to take only the first term of the expansion in powers of $V/|E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3|$ (which is the second approximation of perturbation theory). This gives:

$$E_{9/2}^g = E_{9/2}^1 - \frac{V^2}{|E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3|} = E_{9/2}^1 + \frac{V^2}{E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3};$$

$$E_{9/2}^e = E_{9/2}^3 + \frac{V^2}{|E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3|} = E_{9/2}^3 - \frac{V^2}{E_{9/2}^1 - E_{9/2}^3}.$$

The $(g_{9/2})^{3,5,7}$ configurations are of a special interest, since it was observed by GOLDHABER and SUNYAR²²) that in nuclei which have such a configuration according to the shell model there is a state with spin $7/2$ and even parity. This state, $7/2+$, lies in a few cases under the level $J = 9/2$ which is usually observed in these nuclei (and described as $g_{9/2}$ according to the shell model) and above it in the other cases. An assignment $g_{7/2}$ for this level is in contrast with the shell model as this state (of the single nucleon) should lie 1–2 MeV above the $g_{9/2}$ state (because of the strong spin-orbit interaction). GOLDHABER and SUNYAR²²) assume therefore that this state is the $J = 7/2$ state of the $(g_{9/2})^n$ configuration.

The general method described in § 5 was used to obtain the F^k expressed in terms of the I_l ; the results are:

$$F^8 = \frac{2431}{16128}[(I_0 + I_8) - 8(I_1 + I_7) + 28(I_2 + I_6) -$$

$$- 56(I_3 + I_5) + 70 I_4]$$

$$F^6 = \frac{1759}{16128}[17(I_0 + I_8) - 76(I_1 + I_7) + 116(I_2 + I_6) -$$

$$- 52(I_3 + I_5) - 10 I_4]$$

$$F^4 = \frac{143}{26880}[255(I_0 + I_8) - 480(I_1 + I_7) + 68(I_2 + I_6) -$$

$$- 32(I_3 + I_5) + 378 I_4]$$

$$F^2 = \frac{11}{16128} [1105 (I_0 + I_8) - 260 (I_1 + I_7) + 52 (I_2 + I_6) - \\ - 764 (I_3 + I_5) - 266 I_4] \\ F^0 = \frac{1}{80640} [12155 (I_0 + I_8) + 5720 (I_1 + I_7) + 10868 (I_2 + I_6) + \\ + 6248 (I_3 + I_5) + 10658 I_4].$$

With the help of these formulae we calculated the order of the levels, for Wigner and Majorana forces with the potential $V(r) = V e^{-r^2/r_0^2} / r/r_0$. As is seen in the table above, the coefficient of F_2 in the case of Wigner forces, is larger for the state $J = 7/2$ than for the other states. Therefore in the long range approximation this is the lowest state up to the long range limit where all the levels coincide. As the potential used does not yield this limit, the resulting order of the levels is: $9/2^g$, $7/2$, $5/2$, $3/2$, $9/2^e$. The spacing of the levels $9/2^g$ and $7/2$ is, for $\lambda \leq 1.5$, smaller by a factor ~ 4 than the distance between the $9/2^g$ and the $5/2$ levels. For Majorana forces with the same potential the lowest state is $9/2^g$ up to $\lambda = 3.2$ where a cross-over of this level occurs with the $J = 3/2$ level, which is the ground level for $\lambda > 3.2$. The $7/2$ level does not cross the $9/2^g$ for any λ . When a potential of the form $(1 + P_x) V(r)/2$ is used (equal Wigner and Majorana forces), the situation is like that in the case of Wigner forces, except that the levels $9/2^g$ and $7/2$ are not so close. Also for the Gaussian potential $V(r) = V e^{-r^2/r_0^2}$ there is in the case of Majorana forces no region of λ in which the ground state has $J = 7/2$.

The question of the relative spacings of the other levels $J = 5/2$ and $J = 3/2$ is critical in this case because they should be found experimentally if they are not much higher. In order to clarify this point, we shall refer to an interesting case discussed by GOLDHABER and SUNYAR²²). $^{36}\text{Kr}^{83}$ has an even number of protons and 47 neutrons which are equivalent to three holes in the $g_{9/2}$ sub-shell. The spin of the ground state is measured to be $9/2$. The isomeric transition is from a $p_{1/2}$ state not to the ground state but to a low lying $7/2+$ state, 9 keV above the ground $9/2$ state. The distance between the levels $p_{1/2}$ and $7/2+$ is 32.2 keV. If a state with $J = 5/2$ or $J = 3/2$ were lying in this spacing, not too close to the upper state, a transition to it would have been preferred upon the observed transition.

It is interesting that the $7/2$ state is close to the ground state also for small λ , so that perturbations from other configurations or tensor forces and other non-central interactions may bring it still lower. This question, however, should be considered in more detail.

III. Mutual Spin-Orbit Interactions.

§ 9. Matrix elements of the mutual spin-orbit interaction.

It is well known that neither the Thomas interaction nor the magnetic spin-orbit interaction are big enough to account for the wide separation between the states $j = l + 1/2$ and $j = l - 1/2$ of an odd nucleon as required by Mayer's shell model. CASE and PAIS⁶⁾ introduced in a phenomenological way a strong spin-orbit interaction, in order to preserve charge symmetry of the nuclear forces in analyzing high energy nucleon-nucleon scattering. They also made a very rough estimation and found that this interaction could give a doublet splitting of the right order of magnitude necessary for the shell model.

Although there is not yet a conclusive evidence for the existence of such a strong spin-orbit interaction, it is interesting to calculate the effects of such an interaction in cases of a single nucleon outside closed shells.

The spin-orbit interaction of CASE and PAIS was assumed to be of the form:

$$V_{12} = V(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) (\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}, \vec{L}_{12}) \quad (17)$$

where $\vec{s}^{(1)}$ and $\vec{s}^{(2)}$ are the spins of the two interacting nucleons, and \vec{L}_{12} is their relative angular momentum

$$\hbar \vec{L}_{12} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

It is immediately seen why it is extremely difficult to use here the Slater method. Such interactions were generally treated⁸⁾ with the simplification of summation over all nucleons but one, so that $\sum_{i \neq 1} V(|r_i - r_1|) (\vec{s}^{(i)} + \vec{s}^{(1)}, \vec{L}_{i,1})$ became $\vec{V}(r_1) (\vec{s}^{(1)}, \vec{L}_1)$ (in the case of an odd number of nucleons).

Using the method described above the solution of the problem becomes very simple, as \vec{L}_{12} is exactly the \vec{L} introduced before. To obtain the matrix elements, the operator $(\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}, \vec{L}_{12})$ is applied to a wave-function $\psi_{L_1}(\vec{R}) \psi_{A_1}(\vec{r})$; this yields a sum of functions of the same type. When we multiply this sum by another wave-function $\psi_{L_2}(\vec{R}) \psi_{A_2}(\vec{r})$ and integrate (the integration on the R -coordinate can be immediately done) we obtain the result as a sum of the integrals I_l [of course, I_0 will not appear as $\vec{L} \psi_{n0}^0(\vec{r})$ vanishes].

In order to calculate the matrix elements of (17) it is more convenient not to work with the A_x and A_y components of a vector,

but instead with the combinations $A_{\pm} = A_x \pm i A_y$. With this notation (17) can be written in the form:

$$V(r) \left[\frac{1}{2} (s_+^{(1)} + s_+^{(2)}) A_- + \frac{1}{2} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) A_+ + (s_z^{(1)} + s_z^{(2)}) A_z \right]. \quad (18)$$

The wave-functions with definite n_1, l_1 and n_2, l_2 in the (m_l, m_s) -scheme are:

$$(m_1^{\pm}, m_2^{\pm}) = (m_1, m_2) \delta \left(\pm \frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) \delta \left(\pm \frac{1}{2} \middle| \sigma_2 \right) = \\ = \psi^{m_1}(r_1) \psi^{m_2}(r_2) \delta \left(\pm \frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) \delta \left(\pm \frac{1}{2} \middle| \sigma_2 \right)$$

where σ_1 and σ_2 are the spin coordinates of the nucleons 1 and 2. The operators s_+ , s_- , and s_z , when applied on these functions, give, as is well known:

$$s_+ \delta(m_s | \sigma) = \left(\frac{1}{2} - m_s \right) \delta(-m_s | \sigma) \\ s_- \delta(m_s | \sigma) = \left(\frac{1}{2} + m_s \right) \delta(-m_s | \sigma) \quad s_z \delta(m_s | \sigma) = m_s \delta(m_s | \sigma).$$

The corresponding equations for a general L are:

$$L_{\pm} \psi_l^m = (l \mp m)^{\frac{1}{2}} (l \pm m + 1)^{\frac{1}{2}} \psi_l^{m \pm 1} \quad L_z \psi_l^m = m \psi_l^m.$$

As (17) is linear in $\vec{s}^{(1)}$ and $\vec{s}^{(2)}$, the only non-vanishing matrix elements are those which connect states differing at most in one of the spin eigenvalues. As an example we calculate

$$\left. \begin{aligned} J(m_1^+, m_2^-) &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int \int (m_1, m_2)^* \delta \left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) \delta \left(-\frac{1}{2} \middle| \sigma_2 \right) V_{12}(m_1, m_2) \times \\ &\times \delta \left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) \delta \left(-\frac{1}{2} \middle| \sigma_2 \right) d^3 r_1 d^3 r_2 = \\ &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int \int (m_1, m_2)^* \delta \left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) \delta \left(-\frac{1}{2} \middle| \sigma_2 \right) V(r) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &\times A_z(m_1, m_2) \delta \left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) \delta \left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_2 \right) d^3 r_1 d^3 r_2 = 0 \\ J(m_1^+, m_2^+) &= \int \int V(r) (m_1, m_2)^* A_z(m_1, m_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ K(m_1^+, m_2^+) &= \int \int V(r) (m_1, m_2)^* A_z(m_2, m_1) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ J(m_1^-, m_2^-) &= - \int \int V(r) (m_1, m_2)^* A_z(m_1, m_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ K(m_1^-, m_2^-) &= - \int \int V(r) (m_1, m_2)^* A_z(m_2, m_1) d^3 r_1 d^3 r_2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

These matrix elements will be used later on. If there is a difference in one of the spin values, A_+ and A_- may appear; for example:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int \int (m_1^{\pm}, m_2^{\mp})^* V_{12}(m_1^{\pm}, m_2^{\mp}) d^3 r_1 d^3 r_2 = \\ = \int \int V(r) (m_1, m_2)^* \frac{1}{2} A_{\pm}(m_1, m_2) d^3 r_1 d^3 r_2. \end{aligned}$$

§ 10. Doublet splitting for a nucleon outside closed shells.

We shall have to calculate matrix elements of 18) in the (m_l, m_s) -scheme and make applications for the doublet splitting for a nucleon outside closed shells (the effect of this interaction on the energy levels of Li^7 will be treated later). If the doublet splitting in such a case is large compared to the interaction energy between two nucleons in this unfilled shell, the jj -coupling scheme would result.

We start from the (m_l, m_s) -scheme and use the sum method to obtain the energies of the doublet components. We use the fact that M_J (as well as J) is an integral, and also the Landé interval rule which holds for these interactions. This rule states that the energy of the state $^{2S+1}L_J$ is equal to

$$\zeta(S, L) \frac{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)}{2}.$$

The expansion of the wave-functions (7), (8) in terms of the wave-functions $\psi_L(\vec{R}) \psi_A(\vec{r})$ is easily calculated by the method described above. The results we need are given in the Appendix. We treat the following cases:

A. A single p -nucleon outside the closed s -shell.

The wave-functions are $(m^{\pm}; 0^+0^-; 0^+0^-)$ where the last two quantum numbers refer to two s -protons, the other two to two s -neutrons and the m^{\pm} refers to the odd p -nucleon. When computing the diagonal matrix elements which belong to these functions we see that the only non-vanishing contributions come from the ps -terms. These are exchange terms if the two nucleons have the same charge, and ordinary terms otherwise. The matrix elements were calculated with the help of formulae (19). For example:

$$\begin{aligned} J(\pm 1^+, 0^+) - K(\pm 1^+, 0^+) &= \int \int V(r) (1, 0)^* A_z(1, 0) d^3 r_1 d^3 r_2 = \\ &= \int \int V(r) \psi_1^{\pm 1}(r)^* \psi_0^0(R)^* A_z \psi_1^{\pm 1}(r) \psi_0^0(R) d^3 r d^3 R = \\ &= \int V(r) \psi_1^{\pm 1}(r)^* A_z \psi_1^{\pm 1}(r) d^3 r = \\ &= \pm \int V(r) \psi_1^{\pm 1}(r)^* \psi_1^{\pm 1}(r) d^3 r = \pm I_1 \end{aligned}$$

and similar calculations for other matrix elements. The results for the ps -diagonal elements are:

$$J(\pm 1^+, 0^+) - K(\pm 1^+, 0^+) = \pm I_1 \quad J(\pm 1^+, 0^+) = \pm \frac{1}{2} I_1$$

$$J(0^+, 0^+) = K(0^+, 0^+) = 0$$

$$J(\pm 1^-, 0^-) - K(\pm 1^-, 0^-) = \mp I_1 \quad J(\pm 1^-, 0^-) = \mp \frac{1}{2} I_1$$

$$J(0^-, 0^-) = K(0^-, 0^-) = 0.$$

With these results we build the following table:

M_J	Wave-functions	ps diagonal matrix elements		Sum of the energies
		ordinary	exchange	
$\frac{3}{2}$	$(1^+; 0^+ 0^-; 0^+ 0^-)$	$(1^+, 0^+)$	$(1^+, 0^+)$	$\frac{3}{2} I_1$
$\frac{1}{2}$	$(0^+; 0^+ 0^-; 0^+ 0^-)$ $(1^-; 0^+ 0^-; 0^+ 0^-)$	$(0^+, 0^+)$ $(1^-, 0^-)$	$(0^+, 0^+)$ $(1^-, 0^-)$	$-\frac{3}{2} I_1$

As M_J is an integral the following equations can be written:

$$E(^2P_{3/2}) = \frac{3}{2} I_1$$

$$E(^2P_{3/2}) + E(^2P_{1/2}) = -\frac{3}{2} I_1$$

from which it follows:

$$E(^2P_{3/2}) = \frac{3}{2} I_1$$

$$E(^2P_{1/2}) = -3 I_1$$

in accordance with the interval rule. The splitting is accordingly:

$$\Delta E = \frac{9}{2} I_1.$$

B. A hole in the p -shell and a closed s -shell,

The relevant pp -matrix elements are calculated to be:

$$J(\pm 1^+, 0^+) - K(\pm 1^+, 0^+) = \pm \frac{1}{2} I_1$$

$$J(0^+, 0^+) - K(0^+, 0^+) = 0 = J(\pm 1^+, \mp 1^+) - K(\pm 1^+, \mp 1^+).$$

For the configuration s^4p^5 the corresponding table is:

M_J	Wave-functions	Diagonal matrix elements			Sum of the energies		Total
		ps ordinary	ps exchange	pp exchange	ps	pp	
$\frac{3}{2}$	$(1^+, 1^-, -1^+, 0^+, 0^-; 0^+0^-; 0^+0^-)$	$(1^+, 0^+)$	$(1^+, 0^+)$	$(1^+, 0^+)$			
		$(1^-, 0^-)$	$(1^-, 0^-)$	$(1^-, 0^-)$	$-\frac{3}{2} I_1$	$-\frac{1}{2} I_1$	$-2 I_1$
		$(-1^+, 0^+)$	$(-1^+, 0^+)$	$(-1^+, 0^+)$			

From this table we obtain $E(^2P_{3/2}) = -2 I_1$, and with the help of the interval rule $E(^2P_{1/2}) = 4 I_1$. The doublet is inverted and the splitting is:

$$\Delta E = 6 I_1.$$

C. A single p -proton outside a closed s -shell and a closed neutron p -shell.

The additional matrix elements for this case are (ordinary):

$$J(1^+, 1^+) = I_2 \quad J(1^+, 0^+) = \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{4} I_2 \quad J(0^+, 0^+) = J(1^+, -1^+) = 0$$

from which we obtain:

M_J	Wave-functions	pp (ordinary) diagonal elements	sum of energies		Total
			pp	ps	
$\frac{3}{2}$	$(1^+; 1^+, 1^-, 0^+, 0^-, -1^+, -1^-; 0^+, 0^-; 0^+0^-)$	$(1^+1^+) (1^+0^+)$	$\frac{1}{4} I_1 + \frac{5}{4} I_2$	$\frac{3}{2} I_1$	$\frac{7}{4} I_1 + \frac{5}{4} I_2$

This table gives

$$E(^2P_{3/2}) = \frac{7}{4} I_1 + \frac{5}{4} I_2,$$

and

$$E(^2P_{1/2}) = -\frac{7}{2} I_1 - \frac{5}{2} I_2.$$

Hence the splitting is:

$$\Delta E = \frac{21}{4} I_1 + \frac{15}{4} I_2.$$

D. A single d -nucleon outside the closed s - and p -shells.

The relevant matrix elements are:

ds

$$J(2^+, 0^+) - K(2^+, 0^+) = I_1 \quad J(2^+, 0^+) = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2$$

dp

$$J(2^+, 1^+) - K(2^+, 1^+) = \frac{1}{4} I_1 + \frac{9}{4} I_3 \quad J(2^+, 1^+) = \frac{1}{8} I_1 + \frac{1}{4} I_2 + \frac{9}{8} I_3$$

$$J(2^+, 0^+) - K(2^+, 0^+) = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_3 \quad J(2^+, 0^+) = \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{4} I_3$$

$$J(2^+, -1^+) - K(2^+, -1^+) = \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{5} I_{11} + \frac{1}{20} I_3 = \frac{3}{4} I_1 - I_2 + \frac{3}{4} I_3$$

$$J(2^+, -1^+) = \frac{3}{8} I_1 - \frac{1}{4} I_2 + \frac{3}{8} I_3$$

with the help of which we obtain:

M_J	Wave-functions	diagonal matrix elements				sum of energies		Total sum
		ds		dp		ds	dp	
		ord.	exch.	ord.	exch.			
$\frac{5}{2}$	$(2^+; 1^+, 1^-, 0^+, 0^-,$ $-1^+, -1^-; 1^+, 1^-,$ $0^+, 0^-, -1^+, -1^-;$ $0^+, 0^-; 0^+0^-)$	$(2^+, 0^+)$	$(2^+, 0^+)$	$(2^+, 1^+)$	$(2^+, 1^+)$			
				$(2^+, 0^+)$	$(2^+, 0^+)$	$\frac{3}{2} I_1$	$\frac{9}{4} I_1 - \frac{1}{2} I_2$	$\frac{15}{4} I_1$
				$(2^+, -1^+)$	$(2^+, -1^+)$	$+\frac{1}{2} I_2$	$+\frac{21}{4} I_3$	$+\frac{21}{4} I_3$

Therefore

$$E(^2D_{5/2}) = \frac{15}{4} I_1 + \frac{21}{4} I_3, \quad E(^2D_{3/2}) = -\frac{45}{8} I_1 - \frac{63}{8} I_3,$$

and the splitting is:

$$\Delta E = \frac{75}{8} I_1 + \frac{105}{8} I_3.$$

We thus see that:

for p -nucleon interacting with the 4 s -nucleons, the splitting is

$$\frac{9}{2} I_1;$$

for p -proton interacting with the 4 s -nucleons and the 6 p -neutrons, the splitting is

$$\frac{21}{4} I_1 + \frac{15}{4} I_2;$$

for d -nucleon interacting with the 4 s -nucleons and the 12 p -nucleons, the splitting is

$$\frac{75}{8} I_1 + \frac{105}{8} I_3.$$

CASE and PAIS gave in their paper⁶⁾ an estimated form of the potential $V(r)$ to suit the experimental data of the scattering:

$$V(r) = V_0 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{e^{-x}}{x}$$

where $x = r/r_0$.

The values of r_0 and V_0 were given roughly as $r_0 \sim 1,1 \times 10^{-13}$ cm, $V_0 \sim 24$ MeV. Using this potential the I_1 can be easily calculated. The result is:

$$I_1 = \frac{V_0}{3} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2\mu^2 - 1}{4\mu^3} - (1 - \Phi(\mu)) e^{\mu^2} \right]$$

where

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{\nu} r_0}.$$

For this value of r_0 and reasonable value of $\sqrt{\nu}$ the I_l , $l \geq 2$, are much smaller than I_1 . The integral is very sensitive to the value of μ (and for a fixed value of r_0 —to the value of $\sqrt{\nu}$). Some interesting values are:

$$\begin{array}{cccccc} \mu & = & 1,0 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 2,0 \\ I_1 & = & 1,16 & 0,57 & 0,40 & 0,31 & 0,07 \text{ MeV} \end{array}$$

We can fix the value of ν by determining the nuclear radius in terms of it:

$$R^2 = \bar{r}^2 = N_l^2 \int_0^\infty e^{-2\nu r^2} r^{2l+4} dr = \frac{2}{4\nu} \frac{l+3}{\nu}.$$

Using the relation $R \sim 1,5 \times A^{1/3} \times 10^{-13}$ cm we obtain for the cases considered:

$$\textbf{A. } \Delta E \sim 4 \text{ MeV} \qquad \textbf{C. } \Delta E \sim 2 \text{ MeV} \qquad \textbf{D. } \Delta E \sim 3,5 \text{ MeV.}$$

The first case cannot give any information on He^5 or Li^5 as there are no bound states for these nuclei. It is interesting to see that with the parameters roughly determined from the scattering experiments the order of magnitude of a few MeV may be obtained as required by the shell model (although this calculation should not be considered more than an estimate).

IV. The Low States of Li^7 .

§ 11. The Li^7 nucleus.

The most striking fact about the Li^7 nucleus is the existence of only one low lying level, 0.48 MeV above the ground state, and the absence of any other level up to a few MeV. The most natural explanation of such a situation is that of the LS -coupling scheme, where the ground state and the first excited level are assumed to be the components of a 2P . However, various reactions were believed to point out that the excited level has a more complicated character and in certain reactions it behaves like a level with a spin $5/2$. It was therefore suggested by INGLIS⁷⁾ that the jj -coupling scheme might give the right explanation. In this scheme the ground level of the configuration $(p_{3/2})^2_N p_{3/2}P$ has $J = 3/2$ and there are four higher levels with the spins $1/2, 5/2, 7/2$ and another $3/2$ (which lies somewhat higher than the other three). If there are only Wigner forces between the nucleons the levels $J = 1/2, 5/2, 7/2$ coincide, and it was assumed by INGLIS that the excited level might be such a compound one. However, even a rough coincidence did not result from his calculations and the situation became still worse when Majorana forces were included too²³⁾. There exists, however, another possibility, that such a coincidence of the first excited levels would result from the effect of non-central forces, such as tensor forces, and hence in the next sections the calculation of the configuration $(p_{3/2})^2_N p_{3/2}P$ is carried out in the extreme jj -coupling, taking into account tensor forces and mutual spin-orbit interactions in addition to the central forces.

Recent experimental results show that the assignment $J = 1/2$ to the excited level of Li^7 is very probable⁸⁾, and therefore the explanation could be once again based on the LS -coupling scheme²⁴⁾. The splitting of the two levels should then arise from the spin-orbit interactions. As the Thomas term gives too small a contribution, we calculate the splitting due to the Case and Pais interaction. It should be mentioned that the lack of other levels below 5 MeV is not very well understood in either coupling scheme. Such calculations should therefore, not be interpreted as successful explanation but only as a preliminary survey of the various possibilities.

§ 12. The configuration $(p_{3/2})^2_N p_{3/2}P$ with central forces.

The energy values of the various states of the jj -coupling scheme can be calculated by the sum method from the diagonal matrix elements of the $(j_1, j_2, m_{j_1}, m_{j_2})$ -scheme, in the same way as in

atomic spectroscopy. The wave-function of a single nucleon with given $n, l, j = l + 1/2$ and m_j is given by:

$$u(n l j m_j | 1) = (2l + 1)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(l + m_j + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} u \left(n l m_j - \frac{1}{2} \middle| 1 \right) \delta \left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) + \left(l - m_j + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} u \left(n l m_j + \frac{1}{2} \middle| 1 \right) \delta \left(-\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) \right] \quad (20)$$

(the phases are fixed according to CONDON and SHORTLEY²⁵), or briefly:

$$u(n l j m_j | 1) = f u \left(n l m_j - \frac{1}{2} \middle| 1 \right) \delta \left(\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right) + g u \left(n l m_j + \frac{1}{2} \middle| 1 \right) \delta \left(-\frac{1}{2} \middle| \sigma_1 \right).$$

For $l = 1$ and $j = 3/2$ the f and g are:

m_j	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
f	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0
g	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1

We define the integral J and the exchange integral K of the interaction by:

$$\left. \begin{aligned} J(n l j m_j, n' l' j' m_j') &= \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int \int u^*(n l j m_j | 1) u^*(n' l' j' m_j' | 2) \times \\ &\quad \times V_{12} u(n l j m_j | 1) u(n' l' j' m_j' | 2) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ K(n l j m_j, n' l' j' m_j') &= \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \int \int u^*(n l j m_j | 1) u^*(n' l' j' m_j' | 2) \times \\ &\quad \times V_{12} u(n l j m_j | 2) u(n' l' j' m_j' | 1) d^3 r_1 d^3 r_2. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Exchange operators can be defined for the various central interactions in terms of the spin-exchange operator P_σ and the space-exchange operator P_x .

Type of force			
WIGNER (ordinary)	MAJORANA	HEISENBERG (char. exch.)	BARTLET
1	P_x	$-P_x P_\sigma$	P_σ

When the summation over the spin coordinates is carried out there remains a sum of integrals on space coordinates only, the coefficients

of which are products of f , g (of m_j), and of f' , g' (of $m_{j'}$). For ordinary (Wigner) interaction we obtain (the common n , l , and j were dropped out):

$$\left. \begin{aligned} J(m_j, m_{j'}) &= f^2 f'^2 J\left(m_j - \frac{1}{2}, m_{j'} - \frac{1}{2}; m_j - \frac{1}{2}, m_{j'} - \frac{1}{2}\right) + \\ &+ f^2 g'^2 J\left(m_j - \frac{1}{2}, m_{j'} + \frac{1}{2}; m_j - \frac{1}{2}, m_{j'} + \frac{1}{2}\right) + \\ &+ f'^2 g^2 J\left(m_j + \frac{1}{2}, m_{j'} - \frac{1}{2}; m_j + \frac{1}{2}, m_{j'} - \frac{1}{2}\right) + \\ &+ g^2 g'^2 J\left(m_j + \frac{1}{2}, m_{j'} + \frac{1}{2}; m_j + \frac{1}{2}, m_{j'} + \frac{1}{2}\right) \\ K(m_j, m_{j'}) &= f^2 f'^2 J\left(m_j - \frac{1}{2}, m_{j'} - \frac{1}{2}; m_{j'} - \frac{1}{2}, m_j - \frac{1}{2}\right) + \\ &+ 2 f f' g g' J\left(m_j - \frac{1}{2}, m_{j'} + \frac{1}{2}; m_{j'} - \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}\right) + \\ &+ g^2 g'^2 J\left(m_j + \frac{1}{2}, m_{j'} + \frac{1}{2}; m_{j'} + \frac{1}{2}, m_j + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

where J are the integrals on space coordinates defined by:

$$J(m_1, m_2; m_3, m_4) = \int \int V(r) u^*(m_1|1) u^*(m_2|2) u(m_3|1) u(m_4|2) d^3 r_1 d^3 r_2 \quad (23)$$

some of them are the integrals encountered with among the matrix elements in the $(m_l, m_{l'})$ -scheme, e.g.

$$\begin{aligned} J(m_1, m_2; m_1, m_2) &= J(m_1, m_2) \\ J(m_1, m_2; m_2, m_1) &= K(m_1, m_2). \end{aligned}$$

It is easy to see that in order to obtain the matrix elements of the Majorana interaction, which is spin-independent in the above representation, we must take the same coefficients as in (22) and only multiply $V(r)$ in (23) by the operator P_x . This results in a change in the order of the last two quantum numbers in $J(m_1, m_2, m_3, m_4)$ which thus becomes $J(m_1, m_2, m_4, m_3)$. [This therefore transforms $J(m_1, m_2)$ into $K(m_1, m_2)$ and vice versa.]

In order to obtain the matrix elements of the Bartlett interaction, we must exchange the spin coordinates in (21). This can be achieved by first doing an exchange of both the space and the spin coordinates and then another space exchange. As a result J^B has the same coefficients as K^W but the last two quantum numbers are exchanged. This means:

$$J^B = K^M \quad \text{and} \quad K^B = J^M.$$

The matrix elements of the Heisenberg interaction should be related to those of the Wigner interaction in the same way, but for a change in sign:

$$J^H = -K^W \quad \text{and} \quad K^H = -J^W.$$

It is therefore enough to calculate the case of ordinary forces. This gives the matrix elements in the $(j_1, j_2, m_{j_1}, m_{j_2})$ -scheme:

$$\begin{aligned} J\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) &= J(1, 1) & K\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) &= K(1, 1) \\ J\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} J(1, 0) + \frac{1}{3} J(1, 1) & K\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} K(1, 0) \\ J\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3} J(1, -1) + \frac{2}{3} J(1, 0) & K\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3} K(1, -1) \\ J\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= J(1, -1) & K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= 0 \\ J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{4}{9} J(0, 0) + \frac{4}{9} J(1, 0) + \frac{1}{9} J(1, 1) \\ &K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9} K(0, 0) + \frac{4}{9} J(1, 0) + \frac{1}{9} K(1, 1) \\ J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{4}{9} J(0, 0) + \frac{2}{9} J(1, 0) + \frac{2}{9} J(0, -1) + \frac{1}{9} J(1, -1) \\ &K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9} K(1, 0) + \frac{2}{9} K(0, -1) + \frac{4}{9} J(0, 0; -1, 1). \end{aligned}$$

The matrix elements in the scheme (m_l, m_l') , i.e. $J(m_1, m_2, m_3, m_4)$ are easily calculated in terms of the I_l from the wave-functions of the pp -configuration A 3; they are (for ordinary forces):

$$\begin{aligned} J(1, 1) &= \frac{1}{2} (I_0 + I_2) & J(1, 0) &= \frac{1}{4} (I_0 + I_2) + \frac{1}{2} I_1 \\ J(0, 0) &= \frac{3}{4} (I_0 + I_2) - \frac{1}{2} I_1 & J(1, -1) &= \frac{1}{2} (I_0 + I_2) \\ K(1, 1) &= \frac{1}{2} (I_0 + I_2) & K(1, 0) &= \frac{1}{4} (I_0 + I_2) - \frac{1}{2} I_1 \\ K(0, 0) &= \frac{3}{4} (I_0 + I_2) - \frac{1}{2} I_1 & K(1, -1) &= \frac{1}{2} (I_0 + I_2) - I_1 \\ J(0, 0; -1, 1) &= -\frac{1}{4} (I_0 + I_2) + \frac{1}{2} I_1. \end{aligned}$$

To pass from a direct to an exchange integral in this scheme the integrals I which arise from functions symmetric in the (space) coordinates of the two nucleons (those of even A , like I_0, I_2, I_{10} , etc.) should be kept unchanged, while those arising from antisymmetric functions (odd A , like I_1) should be multiplied by -1 . In

terms of these matrix elements the diagonal elements of the $(j_1, j_2, m_{j_1}, m_{j_2})$ -scheme can be written down.

In order to calculate the energy levels we write down the matrix elements corresponding to the various M_J [when writing $(m_{j_1}, m_{j_2}; m_{j_3}) - m_{j_1}$ and m_{j_2} are the two neutrons' quantum numbers and m_{j_3} is the proton quantum number]. We obtain the following table:

M_J	States in the $(m_{j_1}, m_{j_2}; m_{j_3})$ -scheme	Diagonal matrix elements	
		exchange	ordinary
$\frac{7}{2}$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
$\frac{5}{2}$	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}; \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$\frac{1}{2}$	$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}; \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}; \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$ $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

Thus we see that there are 5 independent states, namely those with $J = 7/2$ and $J = 5/2$, the two with $J = 3/2$ and the one with $J = 1/2$. The sum method can only give the sum of the two states with $J = 3/2$ but here we can separate the two levels with the help of another quantum number—the isotopic spin τ . 2 neutrons and 1 proton have the projection $\tau_z = -1/2$ of the isotopic spin $\vec{\tau}$, and therefore the states may have either $\tau = 1/2$ or $\tau = 3/2$. The states which have $\tau = 3/2$ are also the states of the configuration $(p_{3/2})^3_P$ ($\tau_z = 3/2$). Now $(p_{3/2})^3_P$ has only one state— $J = 3/2$ ($\tau = 3/2$) the energy of which can be immediately obtained from an analogous table:

M_J	States in the $(m_{j_1}, m_{j_2}, m_{j_3})$ -scheme	Diagonal matrix elements	
		exchange	ordinary
$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	—

The sum of these energies is the energy of the state $J = 3/2$, $\tau = 3/2$. When this energy is subtracted from the energies of the two states with $J = 3/2$, which is obtained from the other table, the value of the level $J = 3/2$, $\tau = 1/2$ is left.

Using the values given above for the matrix elements we obtain the following values of the energy levels:

State \ Type of force	WIGNER	MAJORANA	HEISENBERG	BARTLET
$J = \frac{3}{2} \quad \tau = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}(I_0 + I_2) + \frac{4}{3}I_1$	$\frac{5}{6}(I_0 + I_2) - \frac{7}{3}I_1$	$\frac{5}{6}(I_0 + I_2) + \frac{4}{3}I_1$	$-\frac{5}{6}(I_0 + I_2) + \frac{7}{3}I_1$
$J = \frac{7}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$I_0 + I_2 + I_1$	$I_0 + I_2 - I_1$	$-\frac{1}{2}(I_0 + I_2) + I_1$	$\frac{1}{2}(I_0 + I_2) + I_1$
$J = \frac{5}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$I_0 + I_2 + I_1$	$I_0 + I_2 - \frac{16}{9}I_1$	$-\frac{1}{2}(I_0 + I_2) + I_1$	$\frac{1}{2}(I_0 + I_2) - \frac{2}{9}I_1$
$J = \frac{1}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$I_0 + I_2 + I_1$	$I_0 + I_2 - \frac{8}{3}I_1$	$-\frac{1}{2}(I_0 + I_2) + I_1$	$\frac{1}{2}(I_0 + I_2) - \frac{2}{3}I_1$
$J = \frac{3}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}(I_0 + I_2) - \frac{2}{3}I_1$	$\frac{11}{6}(I_0 + I_2) - \frac{7}{3}I_1$	$\frac{1}{3}(I_0 + I_2) - \frac{2}{3}I_1$	$-\frac{1}{3}(I_0 + I_2) + \frac{4}{3}I_1$

The same results expressed in terms of the Slater integrals are:

State \ Type of force	WIGNER	MAJORANA	HEISENBERG	BARTLET
$J = \frac{3}{2} \quad \tau = \frac{3}{2}$	$3F_0 - 5F_2$	$-\frac{2}{3}F_0 + \frac{40}{3}F_2$	$3F_0 - 5F_2$	$\frac{2}{3}F_0 - \frac{40}{3}F_2$
$J = \frac{7}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$3F_0 - 3F_2$	$F_0 + 7F_2$	$-6F_2$	$2F_0 - 4F_2$
$J = \frac{5}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$3F_0 - 3F_2$	$\frac{2}{9}F_0 + \frac{98}{9}F_2$	$-6F_2$	$\frac{11}{9}F_0 - \frac{1}{9}F_2$
$J = \frac{3}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$3F_0 - 3F_2$	$-\frac{2}{3}F_0 + \frac{16}{3}F_2$	$-6F_2$	$\frac{1}{3}F_0 + \frac{13}{3}F_2$
$J = \frac{1}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	$3F_0 + 7F_2$	$\frac{4}{3}F_0 + \frac{16}{3}F_2$	$+4F_2$	$\frac{2}{3}F_0 - \frac{22}{3}F_2$

The connection between the I_l and the F_k is given by:

$$\begin{aligned}
 I_0 + I_2 = 2F_0 + 2F_2 & \quad \text{or} \quad F_0 = \frac{5}{12}(I_0 + I_2) + \frac{1}{6}I_1 & F_0 = F^0 \\
 I_1 = F_0 - 5F_2 & \quad F_2 = \frac{1}{12}(I_0 + I_2) - \frac{1}{6}I_1 & F_2 = F^2/25.
 \end{aligned}$$

(Only the combinations $I_0 + I_2$ appears, and thus there are only two parameters $I_0 + I_2$ and I_1 replacing F_0 and F_2 .)

In the short range limit $-I_l = 0$, $l > 0$ (or $F^2 = 5F_0$), the results for Wigner forces and Majorana forces coincide, because then only space-symmetric functions contribute to the energy (the same applies for HEISENBERG and BARTLET, except for a change in sign).

It is interesting to note that in the long range limit, when all the I_l are equal ($F^k = 0$, $k > 0$), the term values of the Heisenberg interaction vanish for $\tau = 1/2$. This fact can be explained in a general way. With the help of the isotopic spin $\vec{\tau}$ the Heisenberg interaction can be written as:

$$\sum_{i < k} V_{ik} = \sum_{i < k} \frac{1 + 4(\vec{\tau}^{(i)} \cdot \vec{\tau}^{(k)})}{2} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|).$$

If $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)$ has a constant value in the region where the wavefunctions differ from zero, we can put it out of the integral sign when calculating the energy, and what remains is the diagonal value of the operator $\sum_{i < k} [1 + 4(\vec{\tau}^{(i)}, \vec{\tau}^{(k)})]/2$ belonging to the state considered. This value can be immediately found as follows (it is an eigenvalue if the total isotopic spin τ is a quantum number of the given state):

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i < k} \frac{1}{2} (1 + 4(\vec{\tau}^{(i)}, \vec{\tau}^{(k)})) = \sum_{i < k} \frac{1}{2} + \sum_{i < k} 2(\vec{\tau}^{(i)}, \vec{\tau}^{(k)}) = \frac{n(n-1)}{4} + \\ &+ \tau(\tau+1) - n\tau^{(i)}(\tau^{(i)}+1) = \tau(\tau+1) + \frac{n^2}{4} - n \\ &\tau^{(i)}(\tau^{(i)}+1) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

This is the factor of F_0 or I_0 when $I_i = I_0$, in any state with given n and τ . In the above case $n = 3$ and we obtain:

$$\tau = \frac{3}{2} \quad T = 3; \quad \tau = \frac{1}{2} \quad T = 0.$$

The coefficients of F_0 for Bartlet forces (and jj -coupling) can be evaluated in the same way was used by RACAH¹⁹). He evaluated the diagonal value of $\sum_{i < k} (1 - P_{\sigma}^{ik})/2$, and therefore, in order to obtain the diagonal value of $\sum_{i < k} P_{\sigma}^{ik}$, the value he obtained should be multiplied by -2 and to it $n(n-1)/4$ should be added. The result is:

$$\frac{n(n-1)}{4} - \frac{n j(j+1) - J(J+1)}{(2l+1)^2}.$$

§ 13. Matrix elements of the Tensor Forces Interaction.

The interaction energy in the case of tensor forces is:

$$V_{12} = S_{12} V(r) = \left[\frac{(\vec{s}^{(1)}, \vec{r})(\vec{s}^{(2)}, \vec{r})}{r^2} - \frac{1}{3} (\vec{s}^{(1)}, \vec{s}^{(2)}) \right] V(r) \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (24)$$

It appears also in atomic spectroscopy as the magnetic spin-spin interaction. Also here the development in a series of spherical harmonics is complicated and would not be practical to work with. The tensor forces play an important role in nuclear physics. They have been used to explain the quadrupole moment of the Deuteron and, very extensively, in the analysis of scattering experiments. They may also give, in second approximation, a contribution to the doublet splitting.

By our method it is quite a simple matter to obtain matrix elements of the interaction (24). It consists, in fact, only of the

computation of matrix elements of spherical harmonics with $l = 2$, which can be done generally by the use of the Gaunt formula²⁶), or else by direct integration. The operator S_{12} of (24) can be written as:

$$\left(\begin{aligned} & \left(\vec{s}^{(1)}, \frac{\vec{r}}{r} \right) \left(\vec{s}^{(2)}, \frac{\vec{r}}{r} \right) - \frac{1}{3} (\vec{s}^{(1)}, \vec{s}^{(2)}) = (s_+^{(1)} s_-^{(2)} + s_-^{(1)} s_+^{(2)}) \left(\frac{1}{4} \sin^2 \vartheta - \frac{1}{6} \right) + \\ & + s_z^{(1)} s_z^{(2)} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} (s_z^{(1)} s_-^{(2)} + s_-^{(1)} s_z^{(2)}) \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} + \\ & + \frac{1}{2} (s_z^{(1)} s_+^{(2)} + s_+^{(1)} s_z^{(2)}) \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi} + \frac{1}{4} s_-^{(1)} s_-^{(2)} \times \\ & \times \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} + \frac{1}{4} s_+^{(1)} s_+^{(2)} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi} = \\ & = \sqrt{\frac{8}{45}} \left[s_z^{(1)} s_z^{(2)} - \frac{1}{4} (s_+^{(1)} s_-^{(2)} + s_-^{(1)} s_+^{(2)}) \right] Y_2^{(0)}(\vartheta, \varphi) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{15}} (s_z^{(1)} s_-^{(2)} + s_-^{(1)} s_z^{(2)}) Y_2^{(1)}(\vartheta, \varphi) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{15}} (s_z^{(1)} s_+^{(2)} + s_+^{(1)} s_z^{(2)}) Y_2^{(-1)}(\vartheta, \varphi) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{15}} s_-^{(1)} s_-^{(2)} Y_2^{(2)}(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{15}} s_+^{(1)} s_+^{(2)} Y_2^{(-2)}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \right) \quad (25)$$

In order to obtain the matrix elements in the $(j_1, j_2, m_{j_1}, m_{j_2})$ -scheme we use the wave-functions A 3. S_{12} operates on the spin coordinates of the two nucleons, with respect to which the summation can then be carried out, and what remains is a sum of integrals on the r -coordinate with products of f, g, f', g' as coefficients. The angular integration can be easily done and the radial integrals can be expressed in terms of the I_l . In addition to the integrals met with before, there appears also:

$$I_{2,10} = N_2 N_{10} \int_0^\infty V(r) R_2(r) R_{10}(r) dr = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{3}{2} I_1 - \frac{5}{2} I_2 \right).$$

I_0 does not appear in these sums because S_{12} contains only spherical harmonics of order 2 [as a result of subtracting $(\vec{s}^{(1)}, \vec{s}^{(2)})/3$].

We shall give here the results for the configuration $(p_{3/2})_N^2 p_{3,2P}$. The exchange integrals K are easily derived from the direct integrals J by an exchange of only the space coordinates of the two nucleons (multiplication with P_x). This means that integrals arising from symmetric functions (even A , like $I_2, I_{2,10}$, etc.) remain unchanged, while those which arise from antisymmetric functions (odd A , like I_1) are multiplied by -1 . This is a result of the fact that the operator S_{12} is diagonal with respect to the total spin (of the two nucleons) S , and that its eigenvalue for the singlet state ($S = 0$) is zero. There-

fore only that part of the wave-function which is in the triplet state contributes to the matrix elements, and that part is symmetrical with respect to the two spin coordinates. Thus instead of spin and space exchange, space exchange alone is sufficient to obtain the K from the J integral. This is clearly seen in the results:

$$J\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{42} I_2$$

$$J\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{180} I_1 - \frac{1}{84} I_2$$

$$J\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{180} I_1 - \frac{5}{756} I_2 - \frac{1}{135} \sqrt{\frac{5}{2}} I_{2,10} = -\frac{1}{180} I_1 + \frac{1}{84} I_2$$

$$J\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{60} I_1 - \frac{1}{252} I_2 - \frac{1}{90} \sqrt{\frac{5}{2}} I_{2,10} = \frac{1}{42} I_2$$

$$J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{1134} I_2 - \frac{4}{405} \sqrt{\frac{5}{2}} I_{2,10} = -\frac{2}{135} I_1 + \frac{1}{126} I_2$$

$$J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{60} I_1 - \frac{25}{2268} I_2 - \frac{1}{810} \sqrt{\frac{5}{2}} I_{2,10} = \frac{2}{135} I_1 - \frac{1}{126} I_2$$

$$K\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{42} I_2$$

$$K\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{180} I_1 - \frac{1}{84} I_2$$

$$K\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{180} I_1 - \frac{5}{756} I_2 - \frac{1}{135} \sqrt{\frac{5}{2}} I_{2,10} = -\frac{1}{60} I_1 + \frac{1}{84} I_2$$

$$K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{60} I_1 - \frac{1}{252} I_2 - \frac{1}{90} \sqrt{\frac{5}{2}} I_{2,10} = -\frac{1}{30} I_1 + \frac{1}{42} I_2$$

$$K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{135} I_1 + \frac{1}{126} I_2$$

$$K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{60} I_1 - \frac{25}{2268} I_2 - \frac{1}{810} \sqrt{\frac{5}{2}} I_{2,10} = -\frac{1}{54} I_1 - \frac{1}{126} I_2.$$

When treating the tensor forces as a perturbation on the strong spin-orbit interaction which gives rise to the $j\bar{j}$ -coupling scheme, the sum method can be used to determine the first order contributions to the energy levels. This is done in the same manner as in the case of central forces. We give here the results for an ordinary potential and a potential which is multiplied by the operator P_x (this simply replaces J by K and vice versa). The I_i in the following table are 12 times those defined above, as it is customary to define S_{12} as

$3/r^2 (\vec{\sigma}^{(1)}, \vec{r}) (\vec{\sigma}^{(2)}, \vec{r}) - (\vec{\sigma}^{(1)}, \vec{\sigma}^{(2)})$ which is $3 \cdot 4 = 12$ times the operator S_{12} in (24).

State		Ordinary potential	Potential with space exchange
$J = \frac{3}{2}$	$\tau = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} I_1$	$-\frac{2}{3} I_1$
$J = \frac{5}{2}$	$\tau = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} I_1 - \frac{3}{7} I_2$	$-\frac{1}{5} I_1 - \frac{3}{7} I_2$
$J = \frac{5}{2}$	$\tau = \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{9} I_1 + \frac{5}{27} I_2$	$-\frac{2}{45} I_1 + \frac{5}{27} I_2$
$J = \frac{1}{2}$	$\tau = \frac{1}{2}$	$-\frac{7}{15} I_1 + I_2$	$-\frac{1}{15} I_1 + I_2$
$J = \frac{3}{2}$	$\tau = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} I_1$	$-\frac{1}{15} I_1$

The matrix elements of the mutual spin-orbit interaction (17) can be calculated with the help of those in the (m_l', m_l) -scheme. The wave-functions (20) are used and the matrix elements are the sums of matrix elements in the (m_l, m_l') -scheme, with coefficients which are products of f, g, f' , and g' . Here it is seen, much better than in the (m_l, m_l') -scheme that the K integrals differ from the J only by the sign of the I_l arising from space antisymmetric functions. The reason for it is the same as in the case of the tensor forces. The operator $(\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}, \vec{A})$ is diagonal with respect to the magnitude of the total spin S ($\vec{S} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}$) and its eigenvalue in the singlet state is zero. [In the (m_l, m_l') -scheme this fact manifests itself in the vanishing of the matrix elements when $m_{s_1} = \pm 1/2, m_{s_2} = \mp 1/2$]. The results are:

$$\begin{aligned}
 J\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) &= I_2 & J\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6} I_1 + \frac{1}{2} I_2 & J\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{6} I_1 + \frac{1}{6} I_2 \\
 J\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= 0 & J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{9} I_2 & J\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{4}{9} I_2 \\
 K\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) &= I_2 & K\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{6} I_1 + \frac{1}{2} I_2 & K\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{6} I_1 + \frac{1}{6} I_2 \\
 K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= 0 & K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{9} I_2 & K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{4}{9} I_2.
 \end{aligned}$$

From these matrix elements the first order contributions to the energy levels of the configuration $(p_{3,2})_N^2 p_{3,2} P$ can be calculated with the help of the sum method. These contributions are:

J	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
τ				
$\frac{3}{2}$			$\frac{2}{3} I_1$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} I_1 + \frac{3}{2} I_2$	$\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{18} I_2$	$-\frac{1}{3} I_1 + I_2$	$\frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{6} I_2$

§ 14. Numerical results.

In order to obtain numerical results we have to evaluate the I_i . We assume that the potential of the interaction between the nucleons has the radial dependence of the Yukawa potential. The general formulas for the I_i in this case were given in § 6.

The value of \sqrt{v} , which measures the extension of the wavefunctions, can be roughly determined from the $\text{Li}^7\text{-Be}^7$ Coulomb energy difference. This gives: $1/\sqrt{v} \sim 2.4 \times 10^{-13}$ cm.

The value of r_0 of the Yukawa potential can be taken from the analysis of scattering experiments; it is between 1.1 and 1.4×10^{-13} cm. This determines roughly $\lambda \sim 0.5$, $\mu \sim 1$. For $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$ the following values are obtained:

$$I_0 = 0.137 V \quad I_1 = 0.040 V \quad I_2 = 0.014 V.$$

For the tensor forces we take the same radial dependence as for the central interactions, with the same results for the I_i .

We shall now show that there are certain values of the interaction parameters for which the four excited states (or three of them) nearly coincide. Such a possibility can only mean that the interpretation in terms of the jj -coupling scheme could have been consistent with the existence of a low-lying compound level, if this were experimentally verified.

State	Exchange operator (1 + P_x)/2			Exchange operator (1 + P_x) ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} P_\sigma$)/2		
	$\gamma = 0$	$\gamma = 3$	$\gamma = 4$	$\gamma = 0$	$\gamma = 6$	$\gamma = 8$
$J = \frac{3}{2} \quad \tau = \frac{3}{2}$	0.68	1.28 (1.98)	1.48 (2.18)	0.68	1.88 (2.55)	2.28 (2.98)
$J = \frac{7}{2}$	1.00	1.30 (1.80)	1.40 (1.90)	1.50	2.10 (2.60)	2.30 (2.80)
$J = \frac{5}{2}$	0.88	1.26 (1.76)	1.38 (1.88)	1.30	2.05 (2.55)	2.30 (2.80)
$J = \frac{1}{2}$	0.75	1.23 (1.73)	1.39 (1.89)	1.10	2.06 (2.56)	2.38 (2.88)
$J = \frac{3}{2} \quad \tau = \frac{1}{2}$	1.38	2.34 (2.04)	2.66 (2.36)	1.86	3.80 (3.50)	4.40 (4.10)

For the case in which an exchange operator $(1 + P_x)/2$ multiplies the potential, the coincidence of the higher levels can be achieved by adding a tensor force with an exchange operator $-P_x$. If we take the exchange operator of the central forces to be

$$\frac{1}{2}(1 - P_x) \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} P_\sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} W + \frac{4}{3} M - \frac{1}{3} H + \frac{1}{3} B \right)$$

where W , M , H , and B are the exchange operators of the Wigner, Majorana, Heisenberg, and Bartlet interactions respectively, a co-

incidence can also be attained with the same form of the tensor forces. The results are given in the preceding table where the energy values are expressed in units of $V/7$ and V is the constant of the Yukawa potential in the case of central forces. The corresponding constant for tensor forces is γV .

If V is equal to 7 MeV the above energies are in units of MeV. The spacing between the ground state and the excited (compound) level is then of the right order of magnitude but bigger than the observed 0.48 MeV. If the contribution of the mutual spin-orbit interaction is added, this difference decreases. The term values so corrected are given in the above table in parentheses.

Obviously there are enough parameters to explain the coincidence and the level spacing. The above calculation points out that with reasonable values of them agreement can be achieved, but as long as more exact values of the interaction parameters (magnitude and range of the potential, exchange character, etc.) cannot be fixed with the help of other experiments, no decisive conclusion can be drawn.

§ 15. *Splitting of the $(p_N^2 p_P)^{22}P$ ground state due to spin-orbit interaction.*

As already noted the new experiments favour the assignment $J = 1/2$ for the first excited level of Li^7 . It became also clear that the level is quite sharp and there are no other levels in its close neighbourhood⁸⁾. The explanation in terms of the LS -coupling scheme seems therefore plausible. There is also some evidence that the ground state of Li^6 is 3S_1 which means that in that nucleus LS -coupling exists. The configuration $p_N^2 p_P$ in the LS -coupling scheme was treated by WIGNER & FEENBERG²⁷⁾²⁸⁾, and by HUND²⁹⁾. For Wigner and Majorana forces the lowest state is a 2P with $\tau = 1/2$. According to this the two lowest levels of Li^7 should be interpreted as the two components of this doublet with $J = 3/2$ and $J = 1/2$. With this interpretation the problem still exists where are the other levels of this configuration, specially the next 2F ($\tau = 1/2$) which should not be as high as 5 MeV (for reasonable values of the parameters). We shall calculate the splitting of the ground 2P , arising from the mutual spin-orbit interaction of the type introduced by CASE and PAIS, as it is well known that the Thomas interaction and the magnetic spin-orbit interaction give too small a contribution (a splitting can arise also from tensor forces, but only in the second approximation).

The energy of the ground 2P is for Wigner and Majorana forces:

$$3F_0 + 18F_2 = \frac{11}{4}(I_0 + I_2) - \frac{5}{2}I_1$$

(in the notation of HUND it is $3A + 2B$ where $A = F_0 + 4F_2$ and $B = 3F_2$). This energy is not degenerate (some of the energy values of higher states are twice and thrice degenerate), and thus it is possible to find the wave-function of the ground state by direct diagonalization of the energy matrix in the scheme $(m_{l_1}, m_{l_2}; m_{l_3})$. The energy is not degenerate also in the short range limit, so that we may calculate the energy matrix in this limit, which makes the calculation simpler.

The wave-function of the ground 2P (or the ground ${}^{22}P$ in the notation $({}^{2\epsilon+1}({}^{2S+1})L_J)$ in the state $M_J = 3/2$ is a linear combination of those wave-functions $(m_{l_1}^{\pm}, m_{l_2}^{\pm}; m_{l_3}^{\pm})$ for which

$$M_S = m_{s_1} + m_{s_2} + m_{s_3} = +\frac{1}{2} \quad \text{and} \quad M_L = m_{l_1} + m_{l_2} + m_{l_3} = +1.$$

There are 8 such functions [in the notation $(m_{l_1}^{m_{s_1}}, m_{l_2}^{m_{s_2}}; m_{l_3}^{m_{s_3}})$ 1 and 2 are the neutrons numbers and 3 is the proton number] and they are listed below:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (1^+, -1^+; 1^-) & \psi_4 &= (1^-, -1^+; 1^+) & \psi_7 &= (1^-, 0^+; 0^+) \\ \psi_2 &= (1^+, 0^+; 0^-) & \psi_5 &= (1^+, 1^-; -1^+) & \psi_8 &= (0^+, 0^-; 1^+) \\ \psi_3 &= (1^+, -1^-; 1^+) & \psi_6 &= (1^+, 0^-; 0^-) \end{aligned}$$

With these functions the energy matrix in the short range limit, where only I_0 is different from zero, can be built and the diagonalization carried out.

The energy matrix in units of $1/4 I_0$.

4	-1						
-1	4						
		6	-2	2	-1	0	-1
		-2	6	-2	0	-1	1
		2	-2	6	-1	1	0
		-1	0	-1	5	-1	1
		0	-1	1	-1	5	-1
		-1	1	0	1	-1	5

The matrix is already reduced and the value of $11/4 I_0$ of the energy of the ground 2P is an eigenvalue of the 6-row matrix. The corresponding wave-function is a linear combination of the 6 functions $\psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8$ the coefficients of which are the components of the eigenvector of the 6-row matrix which belongs to the eigenvalue 11. The linear equations are easily solved with the following results for the coefficients (after normalization to unity):

$$\begin{aligned} \psi({}^{22}P_{3/2}; M_J = \frac{3}{2}) = & \frac{2}{\sqrt{15}} (1^+, -1^-; 1^+) - \frac{2}{\sqrt{15}} (1^-, -1^+; 1^+) + \\ & + \frac{2}{\sqrt{15}} (1^+, 1^-, -1^+) - \frac{1}{\sqrt{15}} (1^+, 0^-; 0^+) + \frac{1}{\sqrt{15}} (1^-, 0^+; 0^+) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{15}} (0^+, 0^-; 1^+) . \end{aligned}$$

The diagonal matrix elements of the mutual spin-orbit interaction which belongs to this wave-function can be now calculated with the help of the matrix elements in the (m_l, m_s) -scheme. In order to obtain the total splitting this function should be multiplied by the wave-functions of the 4 s -nucleons and so the contribution of the interaction of the p - with the s -nucleons will be added to the interaction of the 3 p -nucleons themselves. The calculation is performed in the same way as in cases B and C above. The results are:

Energy of the sp -interaction	Energy of the pp -interaction	Total
$\frac{1}{15} \cdot \frac{15}{2} I_1 = \frac{1}{2} I_1$	$\frac{1}{15} \cdot 5 I_2 = \frac{1}{3} I_2$	$\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{3} I_2$

This is the energy of the state ${}^{22}P_{3/2}$:

$$E({}^{22}P_{3/2}) = \frac{1}{2} I + \frac{1}{3} I$$

the Landé interval rule yields

$$E({}^{22}P_{1/2}) = -I - \frac{2}{3} I$$

so that the splitting is:

$$\Delta E = \frac{3}{2} I_1 + I_2 .$$

The integral I_1 was already calculated with the potential given by CASE and PAIS. The value of \sqrt{v} can be roughly fixed by the determination of the Coulomb energy difference between Li^7 and

Be⁷ in terms of it. This gives for the splitting the order of magnitude of ~ 1 MeV. The smaller level spacing in Be⁷ can be explained by considering the Coulomb expansion. It is not possible to make more exact statements as the value of I_1 is very sensitive to the values of the parameters. Although this should not be considered as an exact determination of the energies, it is interesting to see that the right order of magnitude is obtained.

The author would like to express his deep gratitude to Prof. W. PAULI, under whose guidance this work has been carried out, and also to Prof. M. VERDE and Dr. M. R. SCHAFFROTH for helpful discussions.

APPENDIX.

Expansion of the wave-functions of two nucleons.

ss.

$$(0, 0) = \psi_0^0(R) \psi_0^0(r) \quad \text{A 1}$$

ps.

$$\left. \begin{aligned} (\pm 1, 0)_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\pm 1, 0) + (0, \pm 1)\} = \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) \\ (0, 0)_s &= \psi_1^0(R) \psi_0^0(r) \\ (\pm 1, 0)_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\pm 1, 0) - (0, \pm 1)\} = -\psi_1^{\pm 1}(r) \psi_0^0(R) \\ (0, 0)_a &= -\psi_1^0(r) \psi_0^0(R) \end{aligned} \right\} \quad \text{A 2}$$

pp.

$$\left. \begin{aligned} (\pm 1, \pm 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2^{\pm 2}(R) \psi_0^0(r) - \psi_2^{\pm 2}(r) \psi_0^0(R)) \\ (\pm 1, 0)_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_2^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) - \psi_2^{\pm 1}(r) \psi_0^0(R)) \\ (\pm 1, 0)_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{\pm 1}(R) \psi_1^0(r) - \psi_1^{\pm 1}(r) \psi_1^0(R)) \\ (0, 0) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_2^0(R) \psi_0^0(r) - \psi_2^0(r) \psi_0^0(R)) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_{10}^0(R) \psi_0^0(r) - \psi_{10}^0(r) \psi_0^0(R)) \\ (\pm 1, \mp 1)_s &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_2^0(R) \psi_0^0(r) - \psi_2^0(r) \psi_0^0(R)) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_{10}^0(R) \psi_0^0(r) - \psi_{10}^0(r) \psi_0^0(R)) \\ (\pm 1, \mp 1)_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^{\pm 1}(R) \psi_1^{\mp 1}(r) - \psi_1^{\pm 1}(r) \psi_1^{\mp 1}(R)) \end{aligned} \right\} \quad \text{A 3}$$

ds.

$$\left. \begin{aligned}
 (m, 0)_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_2^m(R) \psi_0^0(r) + \psi_2^m(r) \psi_0^0(R) \right) \\
 m &= -2, -1, 0, 1, 2. \\
 (\pm 2, 0)_a &= \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_1^{\pm 1}(r) \\
 (\pm 1, 0)_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1^{\pm 1}(R) \psi_1^0(r) + \psi_1^{\pm 1}(r) \psi_1^0(R) \right) \\
 (0, 0)_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1^1(R) \psi_1^{-1}(r) + \psi_1^1(r) \psi_1^{-1}(R) \right)
 \end{aligned} \right\} \quad \text{A 4}$$

dp.

Only the symmetric functions are listed, the antisymmetric functions are obtained from them by interchanging R and r .

$$\left. \begin{aligned}
 (\pm 2, \pm 1)_s &= \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_3^{\pm 3}(R) \psi_0^0(r) - \frac{1}{2} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_2^{\pm 2}(r) \\
 (\pm 2, 0)_s &= \frac{1}{2} \psi_3^{\pm 2}(R) \psi_0^0(r) + \frac{1}{2} \psi_1^0(R) \psi_2^{\pm 2}(r) - \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_2^{\pm 1}(r) \\
 (\pm 1, \pm 1)_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3^{\pm 2}(R) \psi_0^0(r) - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1^0(R) \psi_2^{\pm 2}(r) \\
 (\pm 2, \mp 1)_s &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \psi_3^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) - \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_{10}^0(r) + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \psi_{11}^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) - \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_2^0(r) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \psi_1^{\mp 1}(R) \psi_2^{\pm 2}(r) \\
 (\pm 1, 0)_s &= \sqrt{\frac{2}{5}} \psi_3^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) + \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_{10}^0(r) - \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{10}} \psi_{11}^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) - \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_2^0(r) \\
 (0, \pm 1)_s &= \sqrt{\frac{3}{10}} \psi_3^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) - \frac{\sqrt{2}}{6} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_{10}^0(r) + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{30}} \psi_{11}^{\pm 1}(R) \psi_0^0(r) + \frac{1}{3} \psi_1^{\pm 1}(R) \psi_2^0(r) - \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_1^{\mp 1}(R) \psi_2^{\pm 2}(r) - \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_1^0(R) \psi_2^{\mp 1}(r)
 \end{aligned} \right\} \quad \text{A 5}$$

$$\begin{aligned}
 (\pm 1, \mp 1)_s &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{5}} \psi_3^0(R) \psi_0^0(r) - \frac{1}{\sqrt{6}} \psi_1^0(R) \psi_{10}^0(r) + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{10}} \psi_{11}^0(R) \psi_0^0(r) + \frac{1}{2} \psi_1^{-1}(R) \psi_2^1(r) - \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{3}} \psi_1^0(R) \psi_2^0(r) - \frac{1}{2} \psi_1^1(R) \psi_2^{-1}(r) \\
 (0, 0)_s &= -\frac{3}{2\sqrt{5}} \psi_3^0(R) \psi_0^0(r) + \frac{\sqrt{2}}{3} \psi_1^0(R) \psi_{10}^0(r) - \\
 &- \sqrt{\frac{2}{15}} \psi_{11}^0(R) \psi_0^0(r) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \psi_1^{-1}(R) \psi_2^1(r) - \\
 &- \frac{1}{6} \psi_1^0(R) \psi_2^0(r) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \psi_1^1(R) \psi_2^{-1}(r).
 \end{aligned}$$

References.

- ¹⁾ M. G. MAYER, Phys. Rev. **78**, 16 (1950).
- ²⁾ M. G. MAYER, Phys. Rev. **78**, 22 (1950).
- ³⁾ G. RACAH, to be published.
- ⁴⁾ D. KURATH, Phys. Rev. **80**, 98 (1950).
- ⁵⁾ I. TALMI, Phys. Rev. **82**, 101 (1951).
- ⁶⁾ K. M. CASE and A. PAIS, Phys. Rev. **80**, 138 (1950).
- ⁷⁾ D. R. INGLIS, Phys. Rev. **77**, 724 (1949).
- ⁸⁾ D. R. INGLIS, Phys. Rev. **82**, 181 (1951), where references are given.
- ⁹⁾ HAXEL, JENSEN, and SUESS, Z. Phys. **128**, 301 (1950).
- ¹⁰⁾ A. DE-SHALIT et al., Helv. Phys. Acta, in press.
- ¹¹⁾ E. U. CONDON and G. H. SHORTLEY, Theory of Atomic Spectra (Cambridge University Press, Cambridge 1935).
- ¹²⁾ G. RACAH, Theory of Complex Spectra, Phys. Rev. **61**, 186 (1942); **62**, 438 (1942); **63**, 367 (1943); **76**, 1352 (1949).
- ¹³⁾ J. C. SLATER, Phys. Rev. **34**, 1293 (1929), see also reference ¹¹⁾, p. 174.
- ¹⁴⁾ H. H. MARVIN, Phys. Rev. **71**, 102 (1947).
- ¹⁵⁾ W. HEISENBERG, Z. Phys. **96**, 473 (1935).
- ¹⁶⁾ D. R. INGLIS, Phys. Rev. **51**, 531 (1937).
- ¹⁷⁾ W. H. SHAFFER, Rev. mod. Phys. **16**, 245 (1944).
- ¹⁸⁾ E. FEENBERG, Phys. Rev. **76**, 1275 (1949).
- ¹⁹⁾ G. RACAH, Phys. Rev. **78**, 662 (1950).
- ²⁰⁾ D. R. INGLIS, Phys. Rev. **38**, 862 (1931).
- ²¹⁾ G. RACAH, private communication.
- ²²⁾ M. GOLDBABER and A. W. SUNYAR, Phys. Rev. **83**, 906 (1951).
- ²³⁾ H. H. HUMMEL and D. R. INGLIS, Phys. Rev. **81**, 910 (1951); **83**, 1078 (1951).
- ²⁴⁾ D. R. INGLIS, Phys. Rev. **50**, 783 (1936).
- ²⁵⁾ Reference ¹¹⁾, p. 123.
- ²⁶⁾ GAUNT, Trans. Roy. Soc. London [A] **228**, 151 (1929).
- ²⁷⁾ E. FEENBERG and E. P. WIGNER, Phys. Rev. **51**, 95 (1937).
- ²⁸⁾ E. FEENBERG and M. PHILLIPS, Phys. Rev. **51**, 597 (1937).
- ²⁹⁾ F. HUND, Z. Phys. **105** 202 (1937).

Beiträge zur Theorie der Richtungskorrelation.

Kurt Alder, ETH., Zürich.

13. XII. 51.

1. Einleitung.

Die verschiedenen Zustände eines Atomkerns können durch folgende Grössen charakterisiert werden: Energie, Lebensdauer, Spin, Parität, magnetisches Moment und elektrisches Quadrupolmoment. Im Grundzustand sind die mechanischen, magnetischen oder elektrischen Momente durch die bekannten Methoden (Ausmessung der Hyperfeinstruktur) bestimmbar. Die Gesamtenergie des Kerns ist aus der massenspektroskopisch oder anderweitig bekannten Bindungsenergie berechenbar.

Für angeregte, kurzlebige Kernzustände versagen die für den Grundzustand üblichen Methoden, und es müssen andere Wege benutzt werden. Die Messung der Energiedifferenz zum Grundzustand und teilweise auch die Messung der Lebensdauer ist direkten Methoden zugänglich. Besonders die Betaspektroskopie ist schon seit langer Zeit mit gutem Erfolg verwendet worden. Die Messung der Lebensdauer mit Hilfe verzögerter Koinzidenzen wurde dagegen erst in den letzten Jahren entwickelt. Die Bestimmung der Spinwerte bzw. der Paritätsänderungen kann bis heute dagegen nur auf indirektem Wege erfolgen. Zur Ermittlung der Spinwerte und der Paritätsänderungen bedient man sich mit gutem Erfolg der Theorie der γ -Strahlen. Multipolordnung und Charakter der Strahlung können aus den Konversionskoeffizienten, die jetzt genau berechnet vorliegen (ROSE, SPINRAD, GOERTZEL¹), erhalten werden. Die Schlüsse, die aus der Anwendung der Betatheorie gezogen werden, sind dagegen meist nicht eindeutig. Sie gestatten aber oft gewisse Fälle auszuschliessen. In manchen günstigen Fällen, besonders bei leichten Kernen, können auch Kernreaktionen Angaben über Spin und Parität liefern.

Eine eindeutige Zuordnung von Spin- und Paritätswerten zu den gefundenen Kernzuständen ist jedoch in den wenigsten Fällen möglich. Jede zusätzliche Aussage ist deshalb wertvoll. Die Messung der Richtungskorrelation, die in den letzten Jahren zunehmende Be-

deutung erlangt hat, vermag oft solche Angaben zu liefern und zwischen verschiedenen Möglichkeiten eindeutig zu entscheiden. Wenn von einem angeregten Kern zwei Teilchen sukzessive ausgesandt werden, so hängt die Wahrscheinlichkeit für Emissionen von der Lage der beiden Richtungen der emittierten Teilchen und der Spin- und Multipolzuordnung ab.

Die erste Theorie der Richtungskorrelation stammt von HAMILTON²⁾. Weitere Rechnungen sind von verschiedenen Autoren durchgeführt, so von YANG³⁾ über allgemeine gruppentheoretische Eigenschaften, von FALKOFF und LING⁴⁾ über Interferenzterme bei Mischungen von verschiedenen Multipolordnungen, von FALKOFF und UHLENBECK⁵⁾ über Korrelation beliebiger Teilchen. Wenn von einem oder beiden γ -Quanten noch die Polarisationsrichtung gemessen werden kann, so spricht man von Polarisationskorrelation. HAMILTON, ZINNES u.a.⁶⁾ haben auch diesen Fall behandelt.

Die Resultate der verschiedenen Autoren ergeben, dass die relative Wahrscheinlichkeit als Polynom in $\cos^2 \Theta$

$$W(\Theta) = 1 + A_2 \cos^2 \Theta + A_4 \cos^4 \Theta + \dots + A_{2k} \cos^{2k} \Theta$$

dargestellt werden kann. Θ ist dabei der Winkel zwischen den beiden Emissionsrichtungen. Für den höchsten Exponenten $2k$ gilt die Auswahlregel

$$k \leq l_1, l_2, I_B,$$

wenn l_1 und l_2 die Multipolordnungen der beiden Strahlungen und I_B den Spin des mittleren Niveaus bedeuten. Bei reinen Strahlungen hängen die Konstanten nicht von Kernmatrixelementen ab, sondern sind gruppentheoretisch durch Spin und Multipolzuordnung bestimmt. Der Vergleich der gemessenen und berechneten Korrelationsfunktion $W(\Theta)$ ergibt somit, wie bereits angedeutet, wertvolle Hinweise auf Spinwerte und Strahlungscharakter.

Obwohl die Idee der Messung sehr einfach ist und die Theorie der γ - γ -Korrelation schon seit 1940 durch HAMILTON²⁾ bereitgestellt war, sind die ersten erfolgreichen und zuverlässigen Messungen doch erst nach der Entwicklung des Szintillationszählers in den Jahren 1947 und 1948 durchgeführt worden. Nach diesen ersten Messungen von BRADY und DEUTSCH⁷⁾ wurde die Methode rasch bekannt, und heute bildet die γ - γ -Korrelation ein wertvolles Hilfsmittel für die Kernspektroskopie⁸⁾. Dagegen sind Korrelationen, bei denen eines oder beide Teilchen Elektronen sind, experimentell viel schwieriger zu messen. Dieses Gebiet der Richtungskorrelation besitzt deshalb heute noch eine geringe Bedeutung, vermag aber im Prinzip z. B.

über den Wechselwirkungsansatz in der Fermischen Betatheorie zu entscheiden.

Die Annahme aller bisher zitierten theoretischen Arbeiten ist, dass die Lebensdauer des mittleren Niveaus so kurz ist, dass eine Störung des Zustandes nach Emission des ersten Quants nicht möglich ist. GOERTZEL⁹⁾ hat diese Annahme fallengelassen und in sehr allgemeiner Weise den Einfluss der Elektronenhülle berücksichtigt. Andererseits sind in einer Reihe von Messungen merkliche Anisotropien der Korrelation festgestellt worden, obwohl die Lebensdauer des mittleren Niveaus so gross ist, dass äussere Einflüsse sich bemerkbar machen könnten. In diesen Fällen wird die beobachtete Korrelation im allgemeinen nicht mit der berechneten übereinstimmen, so dass ein Schluss auf die Spinwerte erschwert oder gar verunmöglicht wird. Dagegen ist bei anderweitig bekannten Spinwerten die Abweichung der experimentellen von der theoretischen Korrelation ein Mass für die Wechselwirkung des Kernes mit der Umgebung (Hyperfeinstruktur). Dieser Effekt, der einerseits für die Bestimmung der „wahren“ Korrelation störend wirkt, kann umgekehrt zur Bestimmung weiterer Kerneigenschaften verwendet werden. Die Hyperfeinstruktur gestattet ja bekanntlich, die verschiedenen Momente zu bestimmen. Wichtig und der Rechnung bequem zugänglich ist vor allem die Schwächung der Korrelation durch ein äusseres magnetisches Feld. Daraus wird sich später die Möglichkeit ergeben, das magnetische Moment im kurzlebigen mittleren Zustand zu bestimmen.

Kehren wir zurück zur ungestörten Korrelation, die in der oben angedeuteten Form geschrieben werden kann. Die Berechnung der Koeffizienten A_{2k} führt dann auf ausgedehnte numerische Rechnungen. GARDNER, RACAH und LLOYD¹⁰⁾ zeigten jedoch, dass diese Rechnungen sich stark vereinfachen, wenn die Korrelationsfunktion $W(\Theta)$ nach gruppentheoretisch einfachen und der Geometrie des Problems angepassten Funktionen entwickelt wird. Für ungestörte und unpolarisierte Korrelationen hat man z. B. $W(\Theta)$ nach Kugelfunktionen (Legendresche Polynome) zu entwickeln:

$$W(\Theta) = \sum_n a_n P_n(\cos \Theta).$$

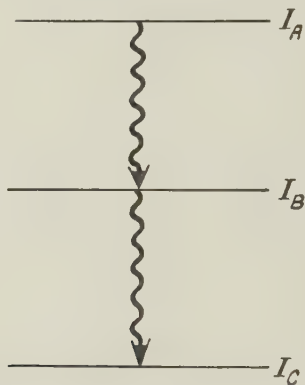
Die a_n lassen sich dann durch geschlossene Formeln ausdrücken. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, allgemeine Formeln für die Korrelation beliebiger Teilchen aufzustellen (inklusive Polarisationskorrelation und beliebige Mischung), wobei der Zwischenzustand durch äussere Einflüsse gestört werden kann.

2. Theorie der Richtungskorrelation.

Nach FALKOFF und UHLENBECK⁵⁾ schreiben wir für die relative Wahrscheinlichkeit der Emission der beiden Teilchen

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = S_1 S_2 \sum_{l,p} \left| \sum_m (A_l | H_1(\vec{k}_1) | B_m) (B_m | H_2(k_2) | C_p) \right|^2, \quad (1)$$

wo A_l , B_m , C_p die Wellenfunktionen für die entarteten Energieniveaus des Anfangs-, Zwischen- und Endzustandes bedeuten. $H_1(\vec{k}_1)$ stellt den Energieoperator für die Emission des ersten Teilchens in die Richtung \vec{k}_1 dar. S_1 , S_2 sind Mittelungen über nicht gemessene Spins, Polarisationen, Neutrinorichtungen.



Wird die Entartung der Energieniveaus im Zwischenzustand durch eine äussere Wechselwirkung aufgehoben, so verändert dies die Korrelation. GOERTZEL⁹⁾ hat diesen Fall behandelt und erhält für die relative Wahrscheinlichkeit

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = S_1 S_2 \sum_{l,m,m',p} \frac{(A_l | H_1(\vec{k}) | B_m) (B_m | H_2(\vec{k}) | C_p) (A_l | H_1(\vec{k}_1) | B_{m'})^* (B_{m'} | H_2(\vec{k}) | C_p)^*}{1 - i \omega_{mm'} \tau}. \quad (2)$$

τ ist die Lebensdauer des mittleren Niveaus, $\omega_{mm'}$ die Energieaufspaltung zwischen den Zuständen B_m und $B_{m'}$ (dividiert durch \hbar).

Für die weiteren Überlegungen nehmen wir an, dass die Kernspins der drei Energiezustände I_A , I_B , I_C sind. Die dazugehörigen magnetischen Quantenzahlen seien M_A , M_B , M_C .

Wir betrachten Funktionen $Y_{LM}(A_i \cdots)^*$, die von Grössen A_i (Polarisationsgrössen) abhängen sollen und sich bei einer Drehung des Koordinatensystems wie folgt transformieren:

$$Y_{LM}(D A_i \cdots) = \sum_m D_{mM}^L(\alpha \beta \gamma) Y_{Lm}(A_i \cdots). \quad (3)$$

D soll die Drehung charakterisieren, die durch die drei Eulerschen Winkel α, β, γ gegeben ist. $D_{mM}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ ist der dazugehörige Darstellungskoeffizient.

Für die Wechselwirkung fordern wir aus physikalischen Gründen Drehinvarianz. Dies führt dann offenbar auf folgenden Ansatz für den Energieoperator

$$H = \sum_L a_L \sum_{M=-L}^{+L} Y_{LM}(X_i \cdots) Y_{LM}^*(A_i \cdots), \quad (4)$$

wo die X_i sich nur auf den Kern und die A_i nur auf die emittierten Teilchen beziehen sollen. Für das Matrixelement $(Jm | H | J'm')$ folgt damit der Ausdruck

$$(Jm | H | J'm') = \sum_L a_L \sum_{M=-L}^{+L} (Jm | Y_{LM}(X_i \cdots) | J'm') Y_{LM}^*(A_i \cdots). \quad (5)$$

$[Jm | Y_{LM}(X_i \cdots) | J'm']$ kann aus allgemeinen gruppentheoretischen Gründen in zwei Faktoren zerlegt werden:

$$(Jm | Y_{LM}(X_i \cdots) | J'm') = C_{JmLM}^{J'm'} f(J, J', L, X_i \cdots), \quad (6)$$

wo f von den magnetischen Quantenzahlen m, m', M unabhängig ist. Der erste Faktor ist ein Clebsch-Gordon-Koeffizient, der die Vektoraddition

$$\vec{J} + \vec{L} = \vec{J'} \quad m + M = m'$$

vermittelt. Da dieser Koeffizient immer dann verschwindet, wenn obige Beziehungen nicht erfüllt sind, bleibt mit $a_L f = \alpha_L$

$$(Jm | H | J'm') = \sum_L \alpha_L C_{JmLM}^{J'm'} Y_{LM}^*(A_i \cdots)_{M=m'-m}. \quad (7)$$

Dieses Resultat in (2) eingesetzt, ergibt bei einer beliebigen Wahl der z -Achse für die Korrelationsfunktion

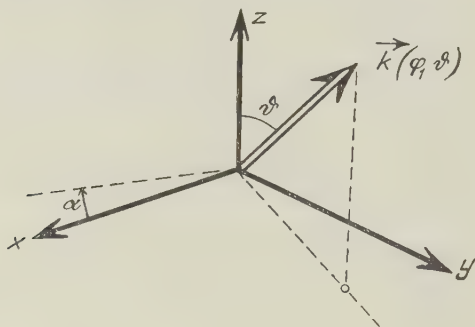
$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum \alpha_{L_1} \alpha_{L_2}^* C_{I_B M_B L_1 M_1}^{I_A M_A} C_{I_B M_B' L_2 M_2}^{I_A M_A} F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k}_1) \beta_{L_3} \beta_{L_4}^* C_{I_C M_C L_3 M_3}^{I_B M_B} C_{I_C M_C L_4 M_4}^{I_B M_B'} F_{L_3 L_4}^{M_3 M_4}(\vec{k}_2) \frac{1}{1 - i \omega_{BB'} \tau}, \quad (8)$$

*) Diese Funktionen sind eine Verallgemeinerung der polarisierten Kugelfunktionen von FALKOFF und UHLENBECK⁵⁾.

wo abkürzungsweise gesetzt ist

$$F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k}) = S \{ Y_{L_1 M_1}^* (A_i \dots) Y_{L_2 M_2} (A_i \dots) \}. \quad (9)$$

Die $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k})$ lassen sich noch weiter vereinfachen. Wir führen eine Drehung des Koordinatensystems so aus, dass die Emissionsrichtung in die z -Achse fällt. Die drei Eulerschen Winkel sind dann:



$\alpha = \varphi - \pi/2$, $\beta = \vartheta$, γ beliebig. Es kann $\gamma = 0$ gesetzt werden.

Wegen der Transformationseigenschaften der Y_{LM} ist

$$F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{m_1 m_2} D_{M_1 m_1}^{L_1*}(\varphi - \frac{\pi}{2}, \vartheta, 0) D_{M_2 m_2}^{L_2}(\varphi - \frac{\pi}{2}, \vartheta, 0) C_{L_1 L_2}^{m_1 m_2} \quad (10)$$

mit

$$\begin{aligned} C_{L_1 L_2}^{m_1 m_2} &= F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) = \\ &= S \{ Y_{L_1 m_1}^* (A_i \dots \vec{k} \equiv z, \gamma = 0) Y_{L_2 m_2} (A_i \dots \vec{k} \equiv z, \gamma = 0) \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Formeln (8), (9), (10), (11) gestatten jede beliebige Korrelation (inklusive Polarisierungen und Mischungen) zu berechnen. Die einzigen Unbekannten sind die modellabhängigen Kernmatrixelemente α_L , β_L , und die $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(0)$.

Wir wollen uns vorerst auf den Fall beschränken, dass keine der Polarisationsgrößen A_i gemessen werde. S bedeutet dann die Mittelung über alle A_i . Mitteln wir zunächst über alle möglichen Lagen,

Aus bekannten gruppentheoretischen Relationen der Darstellungskoeffizienten [Appendix A (8), (4)] leitet man die folgenden Eigenschaften der F her:

$$\begin{aligned} \int F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2} d\Omega &= \delta_{M_1 M_2} \delta_{L_1 L_2} \cdot \text{const}; \text{const unabhängig von } M, \\ \sum_{-L}^{+L} F_{L L}^{M M}(\vartheta) &\text{unabhängig von } \vartheta. \end{aligned}$$

Diese beiden Sätze sind in FALKOFF und UHLENBECK⁵⁾ zitiert.

die aus einer speziellen Lage durch Drehung um \vec{k} um den Winkel γ entstehen, so führt dies wegen der Transformationseigenschaften der Y_{LM} auf ein Integral

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m_1 - m_2)\gamma} d\gamma = 2\pi \delta_{m_1 m_2}, \quad (12)$$

d.h. es muss

$$F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) = \delta_{m_1 m_2} F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) \quad (13)$$

sein. (13) ist äquivalent mit der Bemerkung (HAMILTON²), GOERTZEL⁹), FALKOFF und UHLENBECK⁵), LLOYD¹¹) und LIPPMANN¹²)), dass sämtliche Interferenzterme verschwinden, wenn die z -Achse in die Richtung des einen Quanten gelegt wird. Aus der Herleitung geht hervor, dass dieser Satz nicht mehr richtig ist, wenn Polarisationen gemessen werden können.

(13) sagt weiter aus, dass $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}$ nur von $\text{Min}(L_1, L_2)$ willkürlichen Koeffizienten abhängt. Diese Bemerkung stammt ebenfalls von FALKOFF und UHLENBECK⁵).

Die Formeln (8), (9), (10), (11) für die Richtungskorrelation beliebiger Teilchen können noch vereinfacht werden. Die Summen über magnetische Quantenzahlen tragen ja im allgemeinen nur geometrischen Charakter und es muss daher möglich sein, diese explizit auszuwerten. Dies führt auf sogenannte Racah-Koeffizienten, deren Definitionen und Beziehungen mit anderen oft gebrauchten gruppentheoretischen Relationen im Appendix zusammengestellt sind.

Speziell ist nach Appendix A (3), (7)

$$F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{m, k \text{ gerade}} C_{L_1 - M_1, L_2, M_2}^k C_{L_1 - m, L_2, m}^k D_{M_2 - M_1, 0}^k \left(\varphi - \frac{\pi}{2}, \vartheta, 0 \right) (-1)^{m - M_1} F_{L_1 L_2}^{m m}(0). \quad (14)$$

(14) in (8) eingesetzt ergibt dann

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ \mu}} a_{\mu}^{k_1 k_2} D_{\mu 0}^{k_1} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right) D_{\mu 0}^{k_2*} \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_2, 0 \right), \quad (15)$$

) Dass in (14) nur über die geraden k summiert zu werden braucht, folgt aus der Erhaltung der Parität. Es existieren nämlich zwei verschiedene Arten von $Y_{LM}(A_i \dots)$; solche, die bei einer Spiegelung das Vorzeichen wechseln und solche, die invariant bleiben. Da man für die Wechselwirkung H ausser der Drehinvarianz auch Spiegelungsinvarianz fordern muss, folgt, dass Parität $Y_{LM}(X_i \dots) = \text{Parität } Y_{LM}(A_i \dots) \pm \text{Paritätsänderung des betrachteten Übergangs}$ ist: Diese Grösse ist aber fest, so dass $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k}) = S \{ Y_{L_1 M_1}^(A_i \dots) Y_{L_2 M_2}(A_i \dots) \}$ eine gerade Parität besitzt.

wo die $a_{\mu}^{k_1 k_2}$ sich wie folgt darstellen lassen:

$$a_{\mu}^{k_1 k_2} = \text{I}^{k_1} \cdot \text{II}^{k_2} \cdot \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2}. \quad (16)$$

Die drei Faktoren haben die folgende Bedeutung:

$$\left. \begin{aligned} \text{I}^{k_1} &= \sqrt{2k_1 + 1} \sum_{L_1 L_2} \alpha_{L_1} \alpha_{L_2}^* (-1)^{I_A - I_B + L_2} W(I_B I_A k_1 L_2 / L_1 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_m (-1)^{L_1 - m} C_{L_1 m L_2 - m}^{k_1 0} F_{L_1 L_2}^{m m}(0) \right\}, \\ \text{II}^{k_2} &= \sqrt{2k_2 + 1} \sum_{L_3 L_4} \beta_{L_3} \beta_{L_4}^* (-1)^{I_C - I_B + L_4} W(I_B I_C k_2 L_4 / L_3 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_m (-1)^{L_3 - m} C_{L_3 m L_4 - m}^{k_2 0} F_{L_3 L_4}^{m m}(0) \right\}, \\ \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} &= \sum_{M_B M_B'} C_{I_B M_B' k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M_B k_2 \mu}^{I_B M_B} \cdot \frac{1}{1 - i \omega_{B B'} \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

k_1, k_2 gerade

3. Allgemeine Eigenschaften der Korrelationsfunktionen.

Die Formeln (15) sind Entwicklungen von $W(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ in natürlicher Weise nach Darstellungskoeffizienten. Die Auswahlregeln der Racah-Koeffizienten (Appendix B) verlangen

$$\left. \begin{aligned} |I_A - I_B| &\leq L_{1,2} \leq |I_A + I_B| & |I_C - I_B| &\leq L_{3,4} \leq |I_C + I_B| \\ 0 &\leq 2k_1 \leq 2I_B & |L_1 - L_2| &\leq 2k_1 \leq L_1 + L_2 \\ 0 &\leq 2k_2 \leq 2I_B & |L_3 - L_4| &\leq 2k_2 \leq L_3 + L_4 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die ersten beiden Ungleichungen sind nichts anderes als der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses.

Ist $\omega_{B B'} \tau \ll 1$, d.h. die Störung des mittleren Niveaus klein, so ergibt sich eine weitere Vereinfachung.

Es ist nämlich

$$\text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} = \sum_{M_B M_B'} C_{I_B M_B' k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M_B k_2 \mu}^{I_B M_B} = \delta_{k_1 k_2} \frac{2I_B + 1}{2k + 1} \quad (19)$$

also

$$\begin{aligned} W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \sum_{k, \mu} \frac{1}{2k + 1} \text{I}^k \cdot \text{II}^k D_{\mu 0}^k \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right) D_{\mu 0}^{k*} \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_2, 0 \right) = \\ &= \sum_{k, \mu} \frac{1}{2k + 1} \text{I}^k \cdot \text{II}^k D_{\mu 0}^k \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right) D_{0 \mu}^k \left(0, \vartheta_2, \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Die Summe über μ kann aus der Gruppeneigenschaft der Raumdrehungen leicht bestimmt werden.

Es seien Φ, Θ, Ψ die Eulerschen Winkel der zusammengesetzten Drehung ST mit

$$T = \left\{ \varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right\},$$

$$S = \left\{ 0, \vartheta_2, \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right\}.$$

Die Bedeutung des Winkels Θ lässt sich durch eine kleine Rechnung leicht erhalten. Es ist $\Theta = \angle(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$.

Aus

$$\sum_{\mu} D_{\mu_1 \mu}^k(S) D_{\mu \mu_2}^k(T) = D_{\mu_1 \mu_2}^k(ST) \quad (21)$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned} W(k_1 k_2) &= \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{2k+1} \mathbf{I}^k \cdot \mathbf{II}^k \cdot D_{00}^k(\Phi, \Theta, \Psi) = \\ &= \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{2k+1} \mathbf{I}^k \cdot \mathbf{II}^k D_{00}^k(0, \Theta, 0) = \\ &= \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{2k+1} \mathbf{I}^k \cdot \mathbf{II}^k P_k(\cos \Theta) = \sum_{k \text{ gerade}} a_k P_k(\cos \Theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Die Korrelationsfunktion ist speziell von der Lage der z -Achse unabhängig. Sie ist eine Summe von Potenzen in $\cos^2 \Theta$. Der höchste Exponent ist nach den Auswahlregeln (18) durch

$$\text{Min} \{2 I_B, \text{Max} (L_1 + L_2), \text{Max} (L_3 + L_4)\}$$

begrenzt. Ist dagegen die Störung $\omega\tau$ nicht mehr vernachlässigbar, so hat man mit den allgemeinen Formeln (17) zu rechnen. Diese können aber wie folgt interpretiert werden:

Wir entwickeln die ungestörte Korrelationsfunktion nach Kugelfunktionen

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{k, \mu} a_k \frac{1}{2k+1} Y_k^\mu(\vec{k}_1) Y_k^{-\mu}(\vec{k}_2). \quad (23)$$

Den Einfluss der Störung erhalten wir nun, indem jedes Glied (k, μ) mit einem Schwächungsfaktor G_k^μ („attenuation factor“) multipliziert wird:

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{k, \mu} a_k G_k^\mu \frac{1}{2k+1} Y_k^\mu(\vec{k}_1) Y_k^{-\mu}(\vec{k}_2), \quad (24)$$

wo

$$G_k^\mu = (2k+1) \text{III}_{\mu}^{kk} = (2k+1) \sum_{m, m'} \left| C_{B m' k \mu}^{I B m} \right|^2 \frac{1}{1 - i \omega_{m m'} \tau}. \quad (25)$$

Dies bleibt offenbar nur solange richtig, als unser Ausdruck

$$\text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} = \delta_{k_1 k_2} \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} \quad (26)$$

ist. Neben dem oben betrachteten Fall $\omega\tau \ll 1$ gilt (26) auch dann, wenn die Hyperfeinaufspaltung zwischen verschiedenen magnetischen Quantenzahlen gleich gross ist (z. B. Aufspaltung im schwachen Magnetfeld). Ist die Hyperfeinaufspaltung nicht äquidistant, so müssen noch Interferenzterme berücksichtigt werden, die durch den Schwächungsmechanismus erzeugt werden. Nach (17) ist

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ \mu}} \text{I}^{k_1} \text{II}^{k_2} \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} \frac{1}{\sqrt{2k_1+1}} Y_{k_1}^{\mu}(\vec{k}_1) \frac{1}{\sqrt{2k_2+1}} Y_{k_2}^{-\mu}(\vec{k}_2). \quad (27)$$

Wenn statt unpolarisierter Strahlung irgendwelche Grössen (Polarisationen) zusätzlich gemessen werden, so wird der obige Formalismus nur unwesentlich geändert.

In den Formeln (17) hat man einfach \sum_m durch den Ausdruck

$$\left\{ \sum_{m_1 m_2} (-1)^{L_1 - m_1} C_{L_1 m_1 L_2 - m_2}^{k_1 - \mu_1} F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) \right\}$$

und $D_{0\mu}^{k_1}$ durch $D_{\mu_1 \mu}^{k_1}$ zu ersetzen.

$$\left. \begin{aligned} \text{I}_{\mu_1}^{k_1} &= \sqrt{2k_1+1} \sum_{L_1 L_2} \alpha_{L_1} \alpha_{L_2}^* (-1)^{I_A - I_B + L_2} W(I_B I_A k_1 L_2 / L_1 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{m_1 m_2} (-1)^{L_1 - m_1} C_{L_1 m_1 L_2 - m_2}^{k_1 - \mu_1} F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) \right\} \\ \text{II}_{\mu_2}^{k_2} &= \sqrt{2k_2+1} \sum_{L_3 L_4} \beta_{L_3} \beta_{L_4}^* (-1)^{I_C - I_B + L_4} W(I_B I_C k_2 L_4 / L_3 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{m_3 m_4} (-1)^{L_3 - m_3} C_{L_3 m_3 L_4 - m_4}^{k_2 - \mu_2} F_{L_3 L_4}^{m_3 m_4}(0) \right\} \\ \text{III}_{\mu_1}^{k_1 k_2} &= \sum_{M_B M'_B} C_{I_B M_B k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{k_B M'_B k_2 \mu}^{I_B M'_B} \frac{1}{1 - i \omega_B \tau} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$a_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2} = \text{I}_{\mu_1}^{k_1} \text{II}_{\mu_2}^{k_2} \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2}$$

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu} a_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2} D_{\mu_1 \mu_1}^{k_1} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right) D_{\mu_2 \mu_2}^{k_2} \left(0, \vartheta_2, \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right).$$

Die $F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0)$ hängen natürlich jetzt noch von den gemessenen Polarisationsgrössen $A_i \dots$ ab.

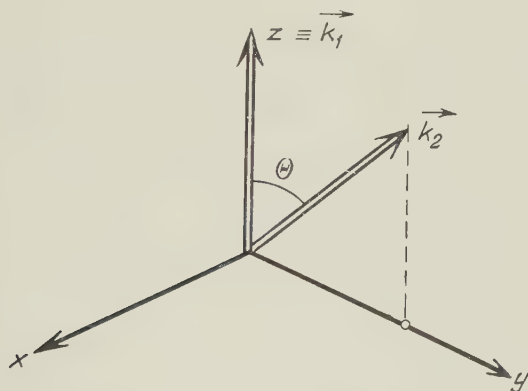
Für verschwindende Schwächung $\omega\tau \ll 1$ lässt sich die Summe über μ wie vorhin auswerten und erhält

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{\mu_1, \mu_2} \frac{1}{2k+1} I_{\mu_1}^k \Pi_{\mu_2}^k D_{\mu_1, \mu_2}^k(\Phi, \Theta, \Psi). \quad (29)$$

Die Eulerschen Winkel Φ und Ψ sind vom speziell gewählten Koordinatensystem abhängig. Dies ist nicht verwunderlich, da die Polarisationsgrößen $A_i \dots$ ja auf dieses festgewählte System bezogen sind.

Wählen wir als Koordinatensystem dasjenige, das als z -Achse die Emissionsrichtung des einen Quants und als (z, y) -Ebene die Ebene der beiden Quanten besitzt, so ist $\Phi = 0$, $\Psi = 0$. Wir haben

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{k_1, \mu_1, \mu_2} \frac{1}{2k+1} I_{\mu_1}^k \Pi_{\mu_2}^k D_{\mu_1, \mu_2}^k(0, \Theta, 0). \quad (30)$$



Schwächungen durch äussere Einflüsse können wie oben diskutiert werden.

4. Diskussion der Schwächungserscheinungen.

Die Korrelation kann durch irgendwelche äussere oder innere Felder gestört werden. Als inneres Feld wollen wir das Magnetfeld der Hülle am Ort des Kerns annehmen. Die Hülle werde durch den Drehimpuls J charakterisiert. Er setzt sich mit dem Kernspin I zu einem totalen Drehimpuls F zusammen. In den obigen Formeln hat man jetzt unter den A_i , B_m , C_p die Wellenfunktionen des gesamten Atoms (Kern und Hülle) zu verstehen. Dabei ist aber zu beachten, dass der Operator H nur auf die Kerneigenfunktionen wirkt.

Wegen der (I, J) -Kopplung können aber die Kernmatrixelemente der Form $(A_l | H_1 | B_m)$ leicht auf gewöhnliche Kernmatrixelemente umtransformiert werden. Es gilt z. B.

$$(I_A J F_\alpha m_\alpha | H_1 | I_B J F_\beta m_\beta) = \sum_{M_A M_B} C_{I_A M_A J_\alpha}^{F_\alpha m_\alpha} (I_A M_A | H_1 | I_B M_B) C_{I_B M_B J_\beta}^{F_\beta m_\beta} \quad (31)$$

Diese und analoge Formeln in (2) eingesetzt ergeben unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen der Clebsch-Gordon-Koeffizienten für III

$$\text{III}_\mu^{k_1 k_2} = \sum C_{I_B M_B k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M_B k_2 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M_B J r}^{F m} \times \\ \times C_{I_B M_B J s}^{F m} C_{I_B M_B J s}^{F' m'} C_{I_B M_B J r}^{F' m'} \frac{1}{1 - i \omega_F m; F' m'}. \quad (32)$$

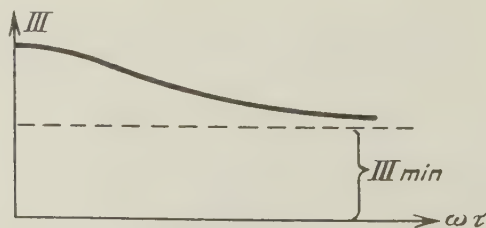
Diese Summe kann wieder durch Racah-Koeffizienten aufsummiert werden:

$$\text{III}_\mu^{k_1 k_2} = \sum_{F' F'} (2F+1) W(I_B J k_1 F/F' I_B) W(I_B J k_2 F/F' I_B) \times \\ \times \sum_{m m'} C_{F' m' k_1 \mu}^{F m} C_{F' m' k_2 \mu}^{F m} \frac{1}{1 - i \omega_F m; F' m'}. \quad (33)$$

Für äquidistante Hyperfeinaufspaltung ist $\text{III}_\mu^{k_1 k_2}$ von der Form $\delta_{k_1 k_2}$. Also verschwinden die Interferenzterme und es bleibt

$$\text{III}_\mu^k = \sum_{F, F'} (2F+1) |W(I_B J k F/F' I_B)|^2 \sum_{m m'} |C_{F' m' k \mu}^{F m}|^2 \frac{1}{1 - i \omega_F m; F' m'}.$$

Diese Formel ist nur solange richtig, als die äussere Wechselwirkung die (I, J) -Kopplung nicht zerstört.



Für den Spezialfall $H = 0$ kann die Summe über m, m' noch ausgeführt werden. Es ist

$$\text{III}^k = \frac{1}{2k+1} \sum_{F, F'} \frac{(2F+1)(2F'+1) |W(I_B J k F/F' I_B)|^2}{1 + (\omega_F F' \tau)^2} \quad (34)$$

$\omega_{FF'}\tau$ ist ein Mass für die Schwächung. III in Abhängigkeit von $\omega\tau$ ist eine monoton fallende Funktion.

Für $\omega\tau \ll 1$ kann jedoch III nicht verschwinden. Es bleibt

$$(\text{III}^k)_{\min} = \frac{1}{2k+1} \sum_F (2F+1)^2 |W(I_B J k F / F I_B)|^2. \quad (35)$$

Die obigen Formeln erlauben wieder eine einfache Interpretation. Wenn die ungestörte Korrelationsfunktion in der Form

$$W(\Theta) = \sum_k a_k P_k(\cos \Theta)$$

vorliegt, so äussert sich der Einfluss der Hülle in einem Schwächungsfaktor

$$G_k = (2k+1) \text{III}^k,$$

$$W(\Theta) = \sum_k a_k G_k P_k(\cos \Theta).$$

Die Diskussion von G_k bzw. $(G_k)_{\min}$ in Funktion der Grössen $\omega\tau$, I_B , k geschieht am besten für $J = 1/2$. In diesem Fall lassen sich die Racah-Koeffizienten leicht berechnen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B + \frac{1}{2} / I_B + \frac{1}{2} I_B\right) &= \frac{1}{2(I_B+1)(2I_B+1)} \\ &\quad \sqrt{(2I_B+1-k)(2I_B+k+2)} \\ W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B + \frac{1}{2} / I_B - \frac{1}{2} I_B\right) &= -\frac{1}{2(2I_B+1)} \sqrt{\frac{k(k+1)}{I_B(I_B+1)}} \\ W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B - \frac{1}{2} / I_B + \frac{1}{2} I_B\right) &= \frac{1}{2(2I_B+1)} \sqrt{\frac{k(k+1)}{I_B(I_B+1)}} \\ W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B - \frac{1}{2} / I_B - \frac{1}{2} I_B\right) &= \frac{1}{2(I_B+1)(2I_B+1)} \\ &\quad \sqrt{(2I_B+1-k)(2I_B+k+2)} \\ G_k &= 1 - \frac{k(k+1)}{(2I_B+1)^2} T \\ T &= \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \\ (G_k)_{\min} &= 1 - \frac{k(k+1)}{(2I_B+1)^2}. \end{aligned} \right\} (36)$$

$(G_k)_{\min}$ für verschiedene k und I_B ist in der folgenden Tabelle niedergelegt.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass Glieder mit höheren $\cos^n \Theta$ empfindlicher geschwächt werden, als diejenigen mit niedrigen Po-

tenzen. Ferner ist die Schwächung kleiner, je grösser der Spin I_B im mittleren Zustand ist.

$I_B \backslash k$	2	4	6	8	10
1	0,33				
$3/2$	0,52				
2	0,76	0,20			
$5/2$	0,83	0,44			
3	0,88	0,59	0,15		
$7/2$	0,90	0,68	0,34		
4	0,93	0,75	0,48	0,11	
$9/2$	0,94	0,80	0,58	0,28	
5	0,95	0,84	0,65	0,40	0,09

Für ein äusseres Magnetfeld ohne Berücksichtigung eventueller Hülleneffekte kann der Schwächungsfaktor ebenfalls leicht berechnet werden. Es ist nämlich

$$\omega_{mm'} = r \omega = r \mu H / I \hbar = r g \mu_k H / \hbar \quad (37)$$

(μ , g magnetischer Moment und g -Faktor des mittleren Zustandes; μ_k Kernmagneton). Für G_k^r ergibt sich dann

$$G_k^r = \frac{1}{1 - i r \omega \tau}. \quad (38)$$

Wenn wir das äussere Magnetfeld H senkrecht zur Ebene der zwei Quanten anlegen, werden die Formeln besonders einfach

$$W(\vartheta, H) = \sum_r b_r \frac{1}{1 - i r \omega \tau} e^{i r \vartheta}, \quad (39)$$

wo ϑ der Winkel zwischen den beiden Quanten ist. Das magnetische Feld H induziert eine Schwächung und eine Phasenverschiebung. Für $\omega \tau \ll 1$ äussert sich dies in einer Rotation der Symmetrieachse um den klassischen Präzessionswinkel $\Phi = \omega \tau$.

Wenn die beiden Zähler die beiden Partikel nicht unterscheiden können, so wird der Schwächungsfaktor reell:

$$G_k^r = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - i r \omega \tau} + \frac{1}{1 + i r \omega \tau} \right\} = \frac{1}{1 + (r \omega \tau)^2}. \quad (40)$$

Eine Messung von G_k^r mit gleich empfindlichen Zählern gibt somit nur die Grösse, nicht aber das Vorzeichen des gyromagnetischen Faktors des Kernes.

Berechnung der Konstanten $F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0)$ für einige Spezialfälle.

Aus physikalischen Gründen verschwindet $F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0)$, wenn es nicht gelingt, die z -Komponenten m_1 bzw. m_2 des Drehimpulses ohne Bahnimpuls (sondern nur durch Spin, Neutrinos usw.) wegzutragen.

Es ist also speziell

$$\begin{aligned} \text{für Spin-0-Teilchen } F_{l_1 l_2}^{m m}(0) &= 0, & \text{ausser } m &= 0; \\ \text{für } \gamma\text{-Strahlen } F_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(0) &= 0, & \text{ausser } m_{1,2} &= \pm 1. \end{aligned}$$

Spin-0-Teilchen.

Es ist
$$F_{l_1 l_2}^{00}(0) = \{Y_{l_1}^0(0) Y_{l_2}^0(0)\} = 1. \quad (41)$$

γ -Strahlen.

Es ist
$$\begin{aligned} Y_l^1 &\sim \varepsilon_+ & \text{für elektrische Strahlung} \\ Y_l^1 &\sim -i \varepsilon_+ & \text{für magnetische Strahlung } \varepsilon_+ = e_x + i e_y. \end{aligned}$$

Mit $Y_l^{-1} = -(Y_l^1)^*$ gewinnt man ohne weiteres:

	el-el	mg-mg	el-mg	mg-el
$F_{l_1 l_2}^{11}$	1	1	$-i$	i
$F_{l_1 l_2}^{-1-1}$	1	1	i	$-i$

Sämtliche von l abhängige Grössen sind dabei zum Matrixelement geschlagen. Daher sind die Matrixelemente von FALKOFF und LING von den unsrigen verschieden. Es gilt

$$\alpha_l = \sqrt{2l+1} i^{-l} (\alpha_l)_{\text{Falk-Ling}}.$$

Wenn Polarisationen gemessen werden, können die zugehörigen $F_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(0)$ ebenfalls leicht angegeben werden. Dabei wollen wir das Koordinationssystem, auf das die Polarisationsgrössen bezogen werden, wie oben wählen [z -Achse in Richtung des einen Quants, (z, y)-Ebene = Ebene der beiden Quanten].

φ bedeutet den Winkel, den der Polarisationsvektor mit der Ebene der beiden Quanten einschliesst.

	el-el	mg-mg	el-mg	mg-el
$F_{l_1 l_2}^{1-1}$	$e^{-i2\varphi}$	$-e^{-i2\varphi}$	$i e^{-i2\varphi}$	$i e^{-i2\varphi}$
$F_{l_1 l_2}^{-11}$	$e^{i2\varphi}$	$-e^{i2\varphi}$	$-i e^{i2\varphi}$	$-i e^{i2\varphi}$

γ -Konversion.

Für gewisse Fälle lassen sich auch hier die Konstanten F leicht angeben. Insbesondere ist die Konversion eines s -Elektrons leicht zu behandeln. Das durch Konversion ausgesandte Elektron bildet mit dem in der K -Schale verbleibenden aus Paritätsgründen

a) bei elektrischer Konversion einen Singulettzustand;

b) bei magnetischer Konversion einen Triplettzustand.

Bei elektrischer Konversion verhält sich das Teilchen offenbar wie ein Spin-0-Teilchen

$$F_{ll}^{00}(0) = 1 \quad F_{ll}^{mm}(0) = 0 \quad m \neq 0;$$

wird das Elektron magnetisch konvertiert, so wird es in einer $(l-1)$ - oder $(l+1)$ -Welle ausgesandt.

Erfolgt die Emission in einer $(l+1)$ -Welle, so ist das F_{ll}^{mm} gegeben durch

$$F_{ll}^{mm}(0) = \left| \sum_{\mu} C_{l-1, \mu; 1, m-\mu}^{lm} Y_{l-1, \mu}(0) X_{1, m-\mu} \right|^2,$$

wo X_1 die Triplettspineigenfunktion bedeutet. Dieser Ausdruck reduziert sich aber sofort auf

$$F_{ll}^{mm}(0) = |C_{l-1, 0; 1, m}^{lm}|^2. \quad (42)$$

Für die $(l+1)$ -Welle ergibt die analoge Überlegung

$$F_{ll}^{mm}(0) = |C_{l+1, 0; 1, m}^{lm}|^2. \quad (43)$$

Speziell ist noch daraus ersichtlich, dass $F_{ll}^{mm}(0) = 0$ ist, für $m > 1$.

Es ergibt sich dann nach den Tabellen von CONDON und SHERLEY für die Clebsch-Gordon-Koeffizienten:

	F_{ll}^{11}	F_{ll}^{00}	F_{ll}^{-1-1}
$l-1$	$\frac{l(l+1)}{2}$	l^2	$\frac{l(l+1)}{2}$
$l+1$	$\frac{l(l+1)}{2}$	$(l+1)^2$	$\frac{l(l+1)}{2}$

 β -Strahlung.

In der $(Z=0)$ -Näherung sind von FALKOFF und UHLENBECK die $F_l^m(\theta)$ für erlaubte sowie verbotene Übergänge erster und zweiter Art berechnet worden. Wir bestimmen aus jener Arbeit die $F_l^m(0)$:

$$l=1,$$

$$l=2,$$

$$F_1^0(0) = 1 - \lambda,$$

$$F_2^0(0) = 1 + \mu_1 + \mu_2,$$

$$F_1^{\pm 1}(0) = 1 + \lambda,$$

$$F_2^{\pm 1}(0) = \frac{2}{3} + \mu_1 + \frac{1}{3} \mu_2,$$

$$F_2^{\pm 2}(0) = -\frac{1}{3} + \mu_1 - \frac{1}{3} \mu_2.$$

Für die Bedeutung der λ , μ_1 , μ_2 siehe FALKOFF und UHLENBECK, wo diese Parameter auch für die verschiedenen Wechselwirkungsansätze berechnet sind.

Herrn Prof. Dr. W. PAULI und Herrn Prof. Dr. V. WEISSKOPF möchte ich für ihr Interesse, das sie an dieser Arbeit bekundet haben, meinen herzlichsten Dank aussprechen. Den Herren Dr. H. FRAUENFELDER, Dr. R. SCHAFROTH und meinem Freund E. HEER danke ich für viele anregende Diskussionen.

Literatur.

- 1) M. E. ROSE, G. GOERTZEL, B. SPINRAD, J. HARR und P. STRONG, Phys. Rev. **83**, 79 (1951).
- 2) D. R. HAMILTON, Phys. Rev. **58**, 122 (1940).
- 3) C. N. YANG, Phys. Rev. **74**, 764 (1948).
- 4) D. L. FALKOFF und D. S. LING, Phys. Rev. **76**, 1639 (1949).
- 5) D. L. FALKOFF und G. E. UHLENBECK, Phys. Rev. **79**, 323 (1950).
- 6) D. R. HAMILTON, Phys. Rev. **74**, 728 (1948); I. ZINNES, Phys. Rev. **80**, 363 (1950).
- 7) E. L. BRADY und H. DEUTSCH, Phys. Rev. **72**, 870 (1947).
- 8) H. DEUTSCH, Reports of Progress in Physics XIV, 196.
- 9) G. GOERTZEL, Phys. Rev. **62**, 763 (1946).
- 10) J. W. GARDNER, Proc. Phys. Soc. **62**, 763 (1949); S. P. LLOYD, Dissertation, unveröffentlicht; Phys. Rev. **83**, 716 (1951); G. RACAH, im Druck.
- 11) S. P. LLOYD, Phys. Rev. **80**, 118 (1950).
- 12) B. A. LIPPMANN, Phys. Rev. **81**, 162 (1951).

APPENDIX

A. Einige oft gebrauchte gruppentheoretische Relationen.

$$D_{\mu'\mu}^j(\alpha\beta\gamma) = \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} \frac{V(j+\mu)!(j-\mu)!(j+\mu')!(j-\mu')!}{(j-\mu'-\kappa)!(j+\mu-\kappa)!\kappa!(\kappa+\mu'-\mu)!} \times \\ \times e^{i\mu'\alpha} \cos^{2j+\mu-\mu'-2\kappa} \left(\frac{1}{2}\beta\right) \cdot \sin^{2\kappa+\mu'-\mu} \left(\frac{1}{2}\beta\right) e^{i\mu\gamma} \quad (1)$$

$$\sum D_{\mu'\mu}^j(S) \cdot D_{\mu\mu''}^j(T) = D_{\mu'\mu''}^j(ST) \quad (2)$$

$$D_{\mu'\mu}^j(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{\mu-\mu'} D_{-\mu'-\mu}^j(\alpha\beta\gamma)^* \quad (3)$$

$$D_{\mu'\mu}^j \text{ bildet eine unitäre Matrix} \quad (4)$$

$$D_{\mu 0}^L(\alpha\beta\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} Y_L^M(\beta, \alpha) \quad (5)$$

Y auf 1 normierte Kugelfunktion

$$D_{\mu'\mu}^j(0, 0, 0) = \delta_{\mu'\mu} \quad (6)$$

$$D_{MN}^J \cdot D_{mn}^j = \sum_{k=J-j}^{J+j} C_{JMjm}^{kM+m} \cdot D_{M+m, N+n}^k \cdot C_{JNjn}^{kN+n} \quad (7)$$

$$\int D_{MN}^j \cdot D_{mn}^j d\Omega = \delta_{j_j} \cdot \delta_{Mm} \delta_{Nn} \frac{4\pi}{2J+1} \quad (8)$$

$$C_{l\mu\bar{l}\nu}^{L\mu+\nu} = \frac{\sqrt{(L+l-\bar{l})! (L-l+\bar{l})! (l+\bar{l}-L)! (L+\mu+\nu)! (L-\mu-\nu)!}}{\sqrt{(L+l+\bar{l}+1)! (l-\mu)! (l+\mu)! (\bar{l}-\nu)! (\bar{l}+\nu)!}} \times \\ \times \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa+l+\bar{l}+\nu} \sqrt{2L+1} \frac{(L+l+\mu-\kappa)! (l-\mu+\kappa)!}{(L-l+\bar{l}-\kappa)! (L+\mu+\nu-\kappa)! \kappa! (\kappa+l-\bar{l}-\mu-\nu)!} \quad (9)$$

$$\sum_{\alpha, \gamma} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \cdot C_{a\alpha b'\beta}^{c\gamma} = \delta_{bb'} \frac{2c+1}{2b+1} \quad \beta \text{ fest} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} &= (-1)^{a+b-c} \cdot C_{a-\alpha b-\beta}^{c-\gamma} \\ C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} &= (-1)^{a+b-c} \cdot C_{b\beta a\alpha}^{c\gamma} \\ C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} &= (-1)^{a-\alpha} \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} C_{c\gamma a-\alpha}^{b\beta} \\ C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} &= (-1)^{b+\beta} \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{b-\beta c\gamma}^{a\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \cdot C_{d\delta b\beta}^{e\epsilon} \cdot C_{a\alpha f\phi}^{d\delta} = \sqrt{2c+1} \sqrt{2d+1} W(c b f d / a e) C_{c\gamma f\phi}^{e\epsilon} \quad (12)$$

wo $W(abcd/ef)$ der sogenannte Racah-Koeffizient ist, der von sechs ganz- oder halbzahligen positiven Quantenzahlen abhängt. Dieser Koeffizient kann aus folgender Formel berechnet werden.

$$\omega(abcd/ef) = \\ = \sum_z (-1)^z \frac{(a+b+c+d+1-z)!}{(a+b-e-z)! (c+d-e-z)! (a+c-f-z)! (b+d-f-z)! \times} \times \\ \times (b+d-f-z)! (e+f-a-d+z)! (e+f-b-c+z)! \\ W(abcd/ef) = \\ = \left[\frac{(a+b-e)! (a+e-b)! (b+e-a)! (c+d-e)! (c+e-d)! (d+e-d)!}{\times (a+c-f)! (a+f-c)! (c+f-a)! (b+d-f)! (b+f-d)! (d+f-b)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \omega(abcd/ef). \quad (13)$$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$W(abcd/ef) = W(badc/ef) = W(cdab/ef) = W(acbd/fe) \\ = (-1)^{e+f-a-d} \cdot W(ebcf/ad) = (-1)^{e+f-b-c} \cdot W(aefd/bc).$$

Die Racah-Koeffizienten verschwinden nur dann nicht, wenn die vier Triaden

$$(abe) \quad (cde) \quad (acf) \quad (bdf)$$

alle trigonometrische Ungleichungen der Form $|a-b| \leq c \leq a+b$ erfüllen.

B. Allgemeine Formeln für oft gebrauchte Racah-Koeffizienten.

Alle benötigten Racah-Koeffizienten sind von der Form

$$W(I_B I_A k, l_1/l_2 I_B).$$

Meistens ist jedoch in praktischen Anwendungen

$$l_1 = l_2 \text{ oder } l_1 = l_2 \pm 1 \quad |I_A - I_B| = l_1 \text{ oder } l_1 - 1,$$

so dass man nur wenige Koeffizienten zu berechnen hat. Es ist

$$W(I, I-l, k, l/l I) = \left\{ \frac{2! 2! (2I+k+1)! (2I-k)!}{(2I+1)! (2I+1)! (2l+k+1)! (2l-k)!} \right\}^{1/2}$$

$$W(I, I+l, k, l/l I) = (-1)^k \left\{ \frac{2! 2! 2! 2!}{(2I-k)! (2l-k)! (2l+k+1)! (2I+k+1)!} \right\}^{1/2}$$

$$W(I, I-l+1, k, l/l I) = 2 [2l(I+1) - k(k+1)(I-l+1)] \times \\ \times \left\{ \frac{(2l-1)! (2l-1)! (2I-k)! (2I+k+1)!}{(2I+2)! (2I+2)! (2l+k+1)! (2l-k)!} \right\}^{1/2}$$

$$W(I, I+l-1, k, l/l I) = 2 (-1)^k [2lI - k(k+1)(I+l)] \times \\ \times \left\{ \frac{(2l-1)! (2l-1)! (2I-1)! (2I-1)!}{(2I+k+1)! (2l+k+1)! (2l-k)! (2I-k)!} \right\}^{1/2}$$

$$W(I, I-l, k, l/l+1, I) = \\ = \left\{ 2k(k+1)(I-l) \frac{2! (2l+1)! (2I-k)! (2I+k+1)!}{(2l-k+1)! (2l+k+2)! (2I+1)! (2I+2)!} \right\}^{1/2}$$

$$W(I, I+l, k, l/l+1, I) = (-1)^{k-1} \times \\ \times \left\{ 2k(k+1)(I+l+1) \frac{2! (2l+1)! 2I! (2I-1)!}{(2I-k)! (2I+k+1)! (2l-k+1)! (2l+k+2)!} \right\}^{1/2}$$

$$W(I J 0 F/F I) = \left\{ \frac{1}{(2F+1)(2I+1)} \right\}^{1/2}$$

$$W(I J 2 F/F I) = \left\{ \frac{(2F-2)! (2I-2)!}{(2F+3)! (2I+3)!} \right\}^{1/2} [3C(C+1) - 4I(I+1)F(F+1)]$$

$$C = J(J+1) - F(F+1) - I(I+1).$$

C. Allgemeine Formeln für Clebsch-Gordon-Koeffizienten.

$$l_1 + l_2 + k = 2g$$

$$C_{l_1 0 l_2 0}^{k 0} = (-1)^{g-k} \sqrt{2k+1} \frac{g!}{(g-l_1)! (g-l_2)! (g-k)!} \times \\ \times \sqrt{\frac{(l_1+l_2-k)! (l_1+k-l_2)! (l_2+k-l_1)!}{(l_1+l_2+k+1)!}}$$

$$C_{l_1 1 l_2 -1}^{k 0} = \frac{1}{2} \frac{k(k+1) - l_2(l_2+1) - l_1(l_1+1)}{\sqrt{l_1(l_1+1) l_2(l_2+1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{k 0}$$

$$C_{l_1 0 l_2 0}^{k 0} = 0 \quad l_1 + l_2 + k = 2g + 1.$$

Tabellen von Racah-Koeffizienten.

Allgemein

$$W(J, J', 0, L/L, J) = \left\{ \frac{1}{(2L+1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$$

Dipolstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 1/1, J)$
$J-1$	$\left\{ \frac{1}{30} \cdot \frac{(J+1)(2J+3)}{J(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$\left\{ \frac{1}{30} \cdot \frac{(2J-1)(2J+3)}{J(J+1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+1$	$\left\{ \frac{1}{30} \cdot \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$

Quadrupolstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 2/2, J)$
$J-2$	$\left\{ \frac{2}{35} \cdot \frac{(J+1)(2J+3)}{J(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-1$	$-(J-5) \left\{ \frac{1}{70} \cdot \frac{(2J+3)}{J(J+1)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$-(2J-3)(2J+5) \left\{ \frac{1}{70} \cdot \frac{1}{J(J+1)(2J-1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+1$	$-(J+6) \cdot \left\{ \frac{1}{70} \cdot \frac{2J-1}{J(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$\left\{ \frac{2}{35} \cdot \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 2/2, J)$
$J-2$	$\left\{ \frac{1}{630} \cdot \frac{(J+1)(J+2)(2J+3)(2J+5)}{(J-1)J(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-1$	$-\left\{ \frac{2}{315} \cdot \frac{(J+2)(2J-3)(2J+3)(2J+5)}{(J-1)J(J+1)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$\left\{ \frac{2}{35} \cdot \frac{(J-1)(J+2)(2J-3)(2J+5)}{J(J+1)(2J-1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+1$	$-\left\{ \frac{2}{315} \cdot \frac{(J-1)(2J-3)(2J-1)(2J+5)}{J(J+1)(J+2)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$\left\{ \frac{(J-1)J(2J-3)(2J-1)}{630(J+1)(J+2)(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$

Oktopolstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 3/3 J)$
$J-3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{J+1}{J} \cdot \frac{(2J+3)}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-2$	$\frac{3}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{(2J+3)}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$-\frac{3}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{(2J-1)}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{J}{J+1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 3/3 J)$
$J-3$	$\left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{(J+1)(J+2)}{(J-1)J} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-2$	$\frac{1}{3} (23-7J) \left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{(J+2)}{(J-1)J(J+1)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$-\frac{1}{3} (30+7J) \left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{J-1}{J(J+1)(J+2)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$
$J+3$	$\left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{J(J-1)}{(J+2)(J+1)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)}{(2J+5)(2J+3)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 6, 3/3 J)$
$J-3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+1)(J+2)(J+3)}{J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J-2$	$\frac{3}{2} (5-2J) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+2)(J+3)}{(J+1)J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$-\frac{2}{3} (2J+7) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J-1)(J-2)}{J(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$
$J+3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{J(J-1)(J-2)}{(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$

2⁴-Pol-Strahlung.

J'	$W(J, J', 2, 4/4 J)$
$J-4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{J+1}{J} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-3$	$\frac{1}{6} (J+13) \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+3$	$\frac{1}{6} (J-12) \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{J}{J+1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 4/4 J)$
$J-4$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{(J+1)(J+2)}{(J-1)J} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-3$	$\frac{1}{6} (17-3J) \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{(J+2)}{(J-1)J(J+1)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+3$	$-\frac{1}{6} (20+3J) \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{(J-1)}{J(J+1)(J+2)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$
$J+4$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{J(J-1)}{(J+1)(J+2)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 6, 4/4 J)$
$J-4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+1)(J+2)(J+3)}{J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J-3$	$\frac{1}{6} (67-17J) \times$
$J-3$	$\times \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+2)(J+3)}{(J+1)J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J-3$	$-\frac{1}{6} (84+17J) \times$
$J+3$	$\times \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J-2)(J-1)}{J(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$
$J+4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{J(J-1)(J-2)}{(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$

Interferenzkoeffizienten.*Dipol-Quadrupol-Strahlung.*

J'	$W(J, J', 2, 1/2, J)$
$J-1$	$\left\{ \frac{1}{10} \cdot \frac{(J-1)(2J+3)}{J(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$\left\{ \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{J(J+1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+1$	$-\left\{ \frac{1}{10} \cdot \frac{(J+2)(2J-1)}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$

Quadrupol-Oktopol-Strahlung.

J'	$W(J, J', 2, 2/3, J)$
$J-2$	$\left\{ \frac{1}{14} \cdot \frac{J-2}{J} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$-\left\{ \frac{1}{14} \cdot \frac{J+3}{J-1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 2/3, J)$
$J-2$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{7} \cdot \frac{(J-2)(J+2)}{(J-1)J} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$-\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{7} \cdot \frac{(J+3)(J-1)}{(J+2)(J+1)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+5)(2J+3)(2J+1)} \right\}^{1/2}$

(2³ — 2⁴)-Polstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 3/4, J)$
$J-3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{J-3}{J} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+3$	$-\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{J+4}{J-1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 3/4, J)$
$J-3$	$\frac{1}{6} \left\{ \frac{10}{11} \cdot \frac{(J-3)(J+2)}{J(J-1)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+3$	$-\frac{1}{6} \left\{ \frac{10}{11} \cdot \frac{(J+4)(J-1)}{(J+2)(J+1)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+5)(2J+3)(2J+1)} \right\}^{1/2}$

Clebsch-Gordon-Koeffizienten.

$$\begin{array}{lll}
C_{10\ 10}^{00} = -\sqrt{\frac{1}{3}} & C_{11\ 1-1}^{00} = \sqrt{\frac{1}{3}} & \\
C_{10\ 10}^{20} = \sqrt{\frac{2}{3}} & C_{11\ 1-1}^{20} = \sqrt{\frac{1}{6}} & \\
C_{20\ 20}^{00} = \sqrt{\frac{1}{5}} & C_{21\ 2-1}^{00} = -\sqrt{\frac{1}{5}} & C_{22\ 2-2}^{00} = \sqrt{\frac{1}{5}} \\
C_{20\ 20}^{20} = -\sqrt{\frac{2}{7}} & C_{21\ 2-1}^{20} = \sqrt{\frac{1}{14}} & C_{22\ 2-2}^{20} = \sqrt{\frac{2}{7}} \\
C_{20\ 20}^{40} = \sqrt{\frac{18}{35}} & C_{21\ 2-1}^{40} = \sqrt{\frac{8}{35}} & C_{22\ 2-2}^{40} = \sqrt{\frac{1}{70}} \\
C_{30\ 30}^{00} = -\sqrt{\frac{1}{7}} & C_{31\ 3-1}^{00} = \sqrt{\frac{1}{7}} & \\
C_{30\ 30}^{20} = 2\sqrt{\frac{1}{21}} & C_{31\ 3-1}^{20} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} & \\
C_{30\ 30}^{40} = -3\sqrt{\frac{2}{77}} & C_{31\ 3-1}^{40} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{77}} & \\
C_{30\ 30}^{60} = 10\sqrt{\frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11}} & C_{31\ 3-1}^{60} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{77}} & \\
C_{40\ 40}^{00} = \frac{1}{3} & C_{41\ 4-1}^{00} = -\frac{1}{3} & \\
C_{40\ 40}^{20} = -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{77}} & C_{41\ 4-1}^{20} = \frac{17}{6}\sqrt{\frac{1}{77}} & \\
C_{40\ 40}^{40} = 9\sqrt{\frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 13}} & C_{41\ 4-1}^{40} = -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 13}} & \\
C_{40\ 40}^{60} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{11}} & C_{41\ 4-1}^{60} = -\frac{1}{30}\sqrt{\frac{5}{11}} &
\end{array}$$

Elektronenspektren zwischen 1 und 10 KeV

von H. Schneider, O. Huber, F. Humbel, A. de Shalit*) und W. Zünti
ETH., Zürich.

(23. I. 1952.)

Summary. The spectrum of low energy (1–10 KeV) electrons has been measured for the cases of Ag^{107} , Ag^{109} , Tc^{99} , Hg^{197} , Au^{195} , Au^{199} , and Au^{198} using a coincidence technique, in which the electrons are accelerated in a lens spectrometer. The apparatus is described, and the results are compared with the predictions of the single particle shell model.

Einleitung.

Dem Schalenmodell von M. G. MAYER gelingt es durch Einführung der Spinbahnkopplung die meisten Grundzustände der Atomkerne zu beschreiben, und auch das Auftreten von Isomeren in Gruppen am Ende abgeschlossener Schalen zu erklären. Die meisten bekannten „ug“-Isomere haben nach diesem Modell ihren Platz am Ende abgeschlossener Schalen, weil dort hohe Spindifferenzen auftreten. Die vorausgesagten Zustände, zwischen denen ein isomerer Übergang stattfinden kann, sind: $g_{9/2} - p_{1/2}$ in der 50er Schale, $h_{11/2} - d_{3/2}$ in der 82er Schale, sowie $i_{13/2} - f_{5/2}$ in der 126er Schale. Ein solcher Übergang würde also eine Drehimpulsänderung von 4 und Paritätswechsel erforderlich machen; man spricht deshalb von M4-Isomeren. Etwa 36 Isomere in diesem Gebiet zeigen nun tatsächlich M4-Strahlung¹⁾ und lassen sich gut in das System des Schalenmodells einordnen.

Es gibt aber auch Ausnahmen unter den Isomeren am Ende abgeschlossener Schalen, deren Strahlung mit Sicherheit nicht als M4 interpretiert werden kann. Bei diesen schliesst die Lebensdauer-Energie-Beziehung von V. WEISSKOPF²⁾ den M4-Charakter aus und die phänomenologische Klassifikation von GOLDHABER¹⁾ lässt auf E3- resp. M3-Strahlung schliessen. Diese Isomere könnten also mit dem Einteilchenmodell nicht mehr erklärt werden, falls die Sicherheit besteht, dass der Übergang nicht in Kaskade erfolgt. Besonders deutlich wird das Versagen des reinen Einteilchenmodells bei den Silberisomeren Ag^{107} und Ag^{109} . Beide haben im Grundzustand den Spin 1/2. Die beobachtete Drehimpulsänderung¹⁾ von 3 führt ein-

*) From The Hebrew University, Jerusalem.

deutig auf einen Zustand mit dem Spin $7/2$. In der 50er Schale hat aber das betreffende Niveau modellmässig den Spin $9/2$.

Es steht damit zur Diskussion, ob für diese Anregung mehrere Nukleonen verantwortlich sind, oder ob vielleicht doch Kaskadenübergänge vorliegen, die infolge sehr kleiner Energie der ausgesandten Strahlung allen bisherigen Beobachtungen entgangen sind. Daher erschien es uns angezeigt, die experimentellen Daten erneut zu prüfen im Hinblick auf das Gebiet kleiner Energien, die sich im β -Spektrometer infolge der Absorption im Zählrohrfenster jeder Beobachtung entzogen haben. So wäre zum Beispiel ein Niveau von 2 KeV, wie es beim Tc^{99} mit Koinzidenzmessungen und Proportionalzähler³⁾ entdeckt wurde, bisher sicher allen Messungen im Spektrometer entgangen, und gerade solche Niveaux würden auf die Diskussion um das Einteilchenmodell entscheidenden Einfluss ausüben. Wir haben deshalb eine Messtechnik entwickelt, die es ermöglicht, durch Nachbeschleunigung der Elektronen im Linsenspektrometer das Spektrum bis zur Energie 1 KeV hinunter zu untersuchen. Nach Energien unterhalb 1 KeV zu suchen ist unnötig, weil diese auf zu grosse Lebensdauern führen würden, die mit der Erfahrung nicht in Einklang zu bringen sind. Bei diesen kleinen Energien findet man zahlreiche Augerlinien und die richtige Interpretation des Spektrums wird erst mit Hilfe gleichzeitiger Koinzidenzmessung⁴⁾ möglich. Mit diesem Nachbeschleunigungsverfahren konnten wir 3 der erwähnten ug -Isomere (Ag^{107} , Ag^{109} , Au^{197}) untersuchen, von denen die 2 Silberisomere mit Sicherheit zu den Ausnahmen zu rechnen sind. Den hypothetischen Übergang kleiner Energie ($1 \leq E \leq 10$ KeV) konnten wir mit Sicherheit ausschliessen. Ebenso haben wir mit dieser Technik die Spektren des Au^{195} und des Au^{199} aufgenommen. Diese 2 Zerfallsschemata, die in einer späteren Arbeit¹⁹⁾ mitgeteilt werden, sind in guter Übereinstimmung mit dem Einteilchenmodell.

Beim Tc^{99} konnten wir auch im Spektrometer die 2-KeV-Linie finden. Ihre Existenz wurde durch Koinzidenzmessung im Spektrometer nachgewiesen, und ihre Energie mit Hilfe der M - und N -Konversionslinien bestimmt.

Beschleunigung der Elektronen im Spektrometer.

Will man die Messungen von β -Spektren auf sehr kleine Energien ausdehnen, so setzt zunächst die Absorption des Zählrohrfensters eine Grenze, weil selbst bei Verwendung der dünnsten noch brauchbaren Folien ($\sim 0,1$ mg/cm²) Elektronen mit einer Energie unterhalb 6 KeV nicht mehr gezählt werden können. Die Verwendbar-

keit des Zählrohres im Spektrometer ist deshalb begrenzt. Da die Entwicklung von Detektoren grosser Ausbeute in diesem Gebiet kleiner Energien grosse Schwierigkeiten mit sich bringt, besteht wohl die einfachste Lösung des Problems darin, die Elektronen künstlich durch Anlegen eines elektrischen Feldes zu beschleunigen.

Man wird folglich entweder die radioaktive Quelle, deren β -Emission im Spektrometer untersucht werden soll, auf ein negatives oder das Zählrohr auf ein positives Potential bringen. Die Aufladung des Zählrohres ist von Burt⁵⁾ benutzt worden, um die Augerlinien des Thoriums zu untersuchen. In unserer Anordnung befindet sich die Quelle auf negativem Potential, so dass die Elektronen eine Beschleunigung erfahren, bevor sie das Magnetfeld des Spektrometers passieren. Der wesentliche Vorteil dieser Konstruktion besteht darin, dass das Zählrohr von der Beschleunigungsanlage räumlich durch das Spektrometer getrennt ist. Deshalb kann der „Untergrund“,

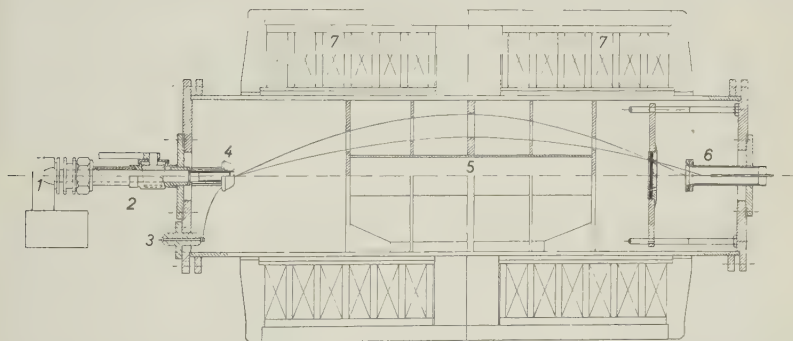


Fig. 1.

Messanordnung im Schnitt. 1. Photomultiplier. 2. Lichtleiter. 3. Anschluss für die Beschleunigungsspannung. 4. Torusförmige Elektrode mit Präparat und Anthracenkristall. 5. Bleikörper. 6. Geiger-Müller-Zähler. 7. Magnetwicklung.

der von der Feldemission herrührt, nur bei einem H_0 -Wert auftreten. An dieser Stelle im Spektrum entsteht die „Nulllinie“, die für die Eichung der Anlage sehr nützlich ist. Natürlich muss von der gemessenen Energie die Beschleunigungsenergie in Abzug gebracht werden, was durch das Auftreten der Nulllinie erleichtert wird. Die Position dieser Linie gibt uns die Elektronen mit der Energie Null im Spektrum.

Da ferner die Intensität und die Energie der Linien im Bereich kleiner Energie wegen Selbstabsorption und Rückstreuung im Präparat oft stark verfälscht sind, erschien es uns stets notwendig, die Interpretation der Linien mit Koinzidenzmessungen zu stützen. Zu

diesem Zwecke befindet sich hinter dem Präparat ein Anthracenkristall (ebenfalls auf Hochspannung), dessen Lichtblitze durch einen isolierenden Lichtleiter aus Plexiglas aus dem Spektrometer heraus und einem Photomultiplier zugeführt werden, der somit auf Erdpotential stehen kann. Ein Schema dieser Anordnung zeigt Fig. 1.

Da sich Präparat und Anthracenkristall auf gleichem Potential befinden, bleibt die Ansprechwahrscheinlichkeit (ε_{sc}) des Scintillationszählers unverändert. Sie wurde nach der bei O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und W. ZÜNTI⁶⁾ beschriebenen Methode bestimmt.

Der Raumwinkel zwischen Präparat und Kristall beträgt $\omega_{sc} = 0,135$. Das Auflösungsvermögen der Koinzidenzschaltung wurde zu $\tau = 2,3 \cdot 10^{-7}$ sec bestimmt.

Definieren wir:

$$\text{Koinzidenzrate} = \frac{\text{Koinzidenzen}}{\text{Einzelstösse im ZR.}}$$

so ist leicht einzusehen, dass die Koinzidenzrate einer Linie abhängt von der Anzahl der Partner, deren Ansprechwahrscheinlichkeit im Scintillationszähler, und bei einem γ -Übergang noch von der Konversion. Einzelheiten dieser Koinzidenztechnik sind in einer früheren Arbeit⁴⁾ diskutiert worden.

Zur Theorie des Linsenspektrometers mit Beschleunigung der Elektronen.

Offenbar wird die Theorie des Linsenspektrometers, wie sie von PERSIKO⁷⁾, DU MOND⁸⁾ u. a. entwickelt wurde, bei Anwendung eines elektrischen Beschleunigungsfeldes eine Modifikation erfahren. Die numerische Lösung der allgemeinen elektronenoptischen Bahngleichungen⁹⁾ für gemischte Felder ist meist nicht durchführbar, weil das elektrische Feld vor allem in der Nähe des Präparates unbekannt ist. Der Versuch, durch z. B. kugelförmige Gestaltung des Präparates das Feld zu definieren, kollidiert mit den Forderungen nach extrem dünnen Quellen und bringt somit erhebliche konstruktive Schwierigkeiten.

Nimmt man ein kugelsymmetrisches elektrisches Feld an, so zeigt die numerische Rechnung in erster Näherung keine Abweichung der Elektronenbahn gegenüber der Rechnung ohne elektrisches Feld. Ein ebenes Feld hingegen, dessen Kraftlinien parallel zur Spektrometerachse gerichtet sind, lässt die Bahnen mit genügend kleiner Anfangsenergie sehr bald entlang den Kraftlinien verlaufen, so dass die Elektronen mit normalem Startwinkel die Blenden nicht mehr erreichen. Dann wird der elektronenoptische Raumwinkel nicht

mehr mit dem geometrischen übereinstimmen. — Dieser Effekt ist tatsächlich vorhanden und er konnte durch einfache Experimente untersucht werden, die im nächsten Kapitel beschrieben werden. — Von grösserem Interesse ist es, zunächst die Auflösung zu berechnen, um ein Bild von der zu erwartenden Abweichung zu erhalten.

Die Theorie des Linsenspektrometers mit rein magnetischem Feld ergibt für das relative Auflösungsvermögen:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon + 2)}{(\varepsilon + 1)} \cdot \frac{dJ}{J}$$

wobei

ε = kinetische Energie in mc^2

J = Strom in Amp

bedeutet. Um die entsprechende Formel für das Spektrometer mit Beschleunigung zu erhalten, gehen wir aus von der Energie in relativistischer Schreibweise:

$$\frac{E}{c} = \pm \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

mit der oben eingeführten Bezeichnung:

$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}.$$

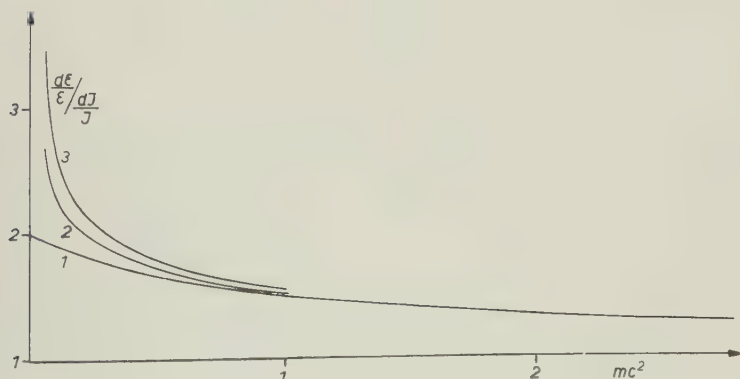


Fig. 2.

Zum Auflösungsvermögen. Kurve 1: $V = 0$. Kurve 2: $V = 10$ kV. Kurve 3: $V = 20$ kV.

Teilen wir die kinetische Energie in die ursprüngliche und die zusätzliche auf, indem wir die Beschleunigungsenergie U eV in mc^2 addieren, so erhalten wir:

$$(1 + \varepsilon + U)^2 = 1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}.$$

Benutzen wir ferner die Proportionalität zwischen dem Impuls der Elektronen und dem Strom im Spektrometer, so erhält man:

$$(1 + \varepsilon + U)^2 = 1 + aJ^2,$$

womit a als Apparatekonstante eingeführt ist.

Daraus ergibt sich durch Differentiation:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{(1 + \varepsilon + U)^2 - 1}{(1 + \varepsilon + U) \cdot \varepsilon} \cdot \frac{dJ}{J}.$$

Für den Fall $U = 0$ geht die Formel über in die normale. Man sieht, dass für $U \neq 0$ aber $\varepsilon = 0$ die Funktion $(d\varepsilon/\varepsilon)/(dJ/J)$ gegen ∞ streben muss. Fig. 2 zeigt dieses Verhalten bei verschiedenen Beschleunigungen als Parameter.

Das bedeutet, dass bei der Stosszahlkorrektur nicht mehr durch H_Q zu dividieren ist, sondern durch $H_Q \cdot F(U, \varepsilon)$. Diese Funktion ist in ähnlicher Weise leicht zu berechnen. Sie soll hier nicht angegeben werden, da die Korrektur in unserem Messbereich sehr klein bleibt. Sie beträgt bei $\varepsilon = 1$ KeV und Beschleunigungsspannung $V = 20$ kV nur etwa 4%.

Das Auflösungsvermögen verschlechtert sich also mit der Beschleunigung. Man wird diese deshalb nur gerade so gross wählen, dass die Absorption der Zählrohrfolie ausgeglichen wird.

Absorption in der Zählrohrfolie und Raumwinkel.

Da eine elektronenoptische Berechnung der Bahnen ohne Kenntnis des elektrischen Feldes nicht durchführbar ist, musste experimentell die Variation des Raumwinkels mit der Beschleunigung ermittelt werden. — Durch Vergleich zweier Messungen mit und ohne Nachbeschleunigung erhält man das relative Produkt aus Raumwinkel und Durchlässigkeit. — Fig. 3 zeigt die Linien des Cd^{107} bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen. Die Verschiebung der Linien entspricht innerhalb der Messgenauigkeit der angelegten Spannung. Die L -Augergruppe gewinnt dabei schnell an Intensität und dieses Anwachsen rührt von der Variation des Raumwinkels und der Durchlässigkeit her.

Um die beiden Effekte getrennt zu ermitteln, haben wir zunächst die Durchlässigkeit der verwendeten Folien bestimmt. Zu diesem Zwecke wurden die Konversionslinien des langlebigen Au^{195} als Funktion der Foliendicke gemessen. Auf diese Weise erhält man für die verschiedenen Energien die relative Durchlässigkeit als Funktion der Foliendicke. In erster Näherung kann die absolute Durchlässigkeit durch lineare Extrapolation der Stosszahlen auf die Foliendicke

0 gewonnen werden. Die Methode hat den Vorteil, dass die Absorption im Spektrometer selber bei unveränderter Geometrie gemessen werden kann. Absolutmessungen, die ausserhalb des Spektrometers mit monochromatischen Elektronen vorgenommen wurden^{10) 11)},

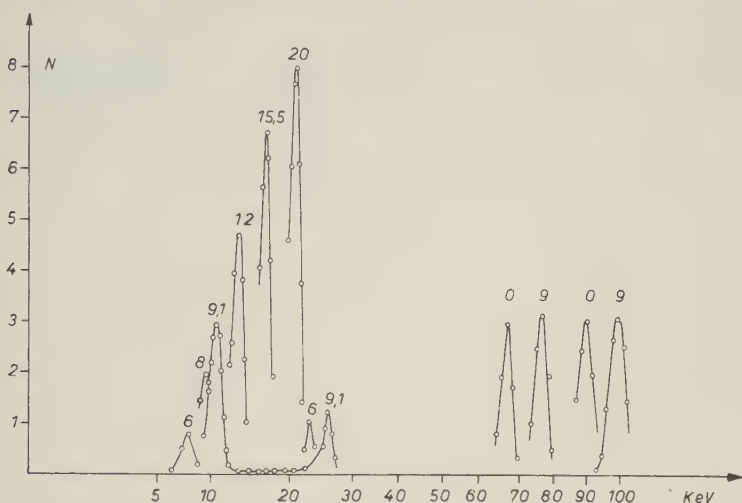


Fig. 3.

Spektrum des Cd^{107} mit verschiedener Beschleunigungsspannung. L -Augerlinien mit 6 kV, 8 kV, 9,1 kV, 12 kV, 15,5 kV und 20 kV. K -Augerlinien mit 6 und 9,1 kV. K_{93} -Konversion mit 0 und 9 kV. L_{93} -Konversion mit 0 und 9 kV.

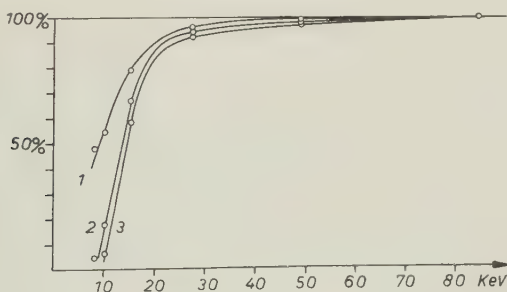


Fig. 4.

Durchlässigkeit der verwendeten Formvarfolien. Kurve 1: 0,086 mg/cm^2 . Kurve 2: 0,156 mg/cm^2 . Kurve 3: 0,186 mg/cm^2 .

zeigen, dass die Kurven bei extrem schwacher Absorption flacher verlaufen, als es der linearen Extrapolation entspricht. Für die vorliegenden Messungen bedeutet das aber nur eine Korrektur, d.h. die Näherung durch lineare Extrapolation kann als gut angesehen werden. Fig. 4 zeigt die Durchlässigkeit der verwendeten Folien.

Da die Absorption nun bekannt ist, lässt sich der Raumwinkel ermitteln. Das Verhalten dieses elektronenoptischen Raumwinkels bei 6 und 10 kV Beschleunigung zeigt Fig. 5. Hier ist der Faktor, mit dem der geometrische Raumwinkel zu multiplizieren ist, in Abhängigkeit von der Energie der gemessenen Elektronen, aufgetragen.

Qualitativ entspricht die Kurve durchaus den Erwartungen. Bei grossen Energien ist der Faktor nahezu 1, denn die Spannung hat keinen grossen Einfluss. Wird die Energie der Elektronen vergleichbar mit der Beschleunigungsenergie oder kleiner, so wächst der Einfluss mehr und mehr, und zwar zunächst in positivem Sinne. Bei

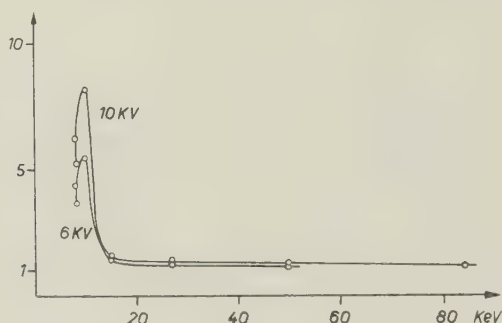


Fig. 5.

Variation des elektronenoptischen Raumwinkels mit der Energie der Elektronen. Beschleunigungsspannung als Parameter.

sehr kleinen Energien jedoch nimmt der Raumwinkel wieder ab, weil das elektrische Feld in der Nähe der radioaktiven Quelle parallel zur Spektrometerachse gerichtet ist. Das Maximum der Vergrösserung beträgt für 6 kV Beschleunigung ca. 5,5 und die Raumwinkelkorrekturen sind für Intensitätsbestimmungen zudem stark energieabhängig. Da sich jedoch die Interpretation der Linien in diesem Bereich auf die Koinzidenzen stützt, so spielt die Intensität der gemessenen Linien keine entscheidende Rolle mehr. Die Intensität ist ohnehin wegen der Selbstabsorption im Präparat unsicher.

Das Isomer Tc^{99} .

Tc^{99} entsteht durch β -Zerfall aus Mo^{99} , dessen Halbwertszeit 67 h beträgt. Von dieser Aktivität lässt sich chemisch das 6-stündige Tc -Isomer abtrennen¹²⁾. Die 6-stündige Halbwertszeit des Isomers wurde einem Übergang von 1,8 KeV zugeschrieben³⁾, die demjenigen von 141 KeV vorangeht.

Die „Crossover“-Linie von $143 \text{ KeV}^{13)}$ ergibt für die Energie des isomeren Überganges 2 KeV . — Die beschriebene Anordnung sollte nun erlauben, die M - und N -Konversion dieser Tc -Linie im Spektrometer zu messen. — MoO_3 wurde mit langsamen Neutronen in der Harwell-Pile bestrahlt. Nach einer von JACOBI¹⁴⁾ beschriebenen Methode konnte das Tc als Oxychinolat getrennt und trägerfrei auf eine Metallfolie von $0,4 \text{ mg/cm}^2$ elektrolysiert werden. Die dreihier interessierenden Gebiete des Spektrums zeigt Fig. 6.

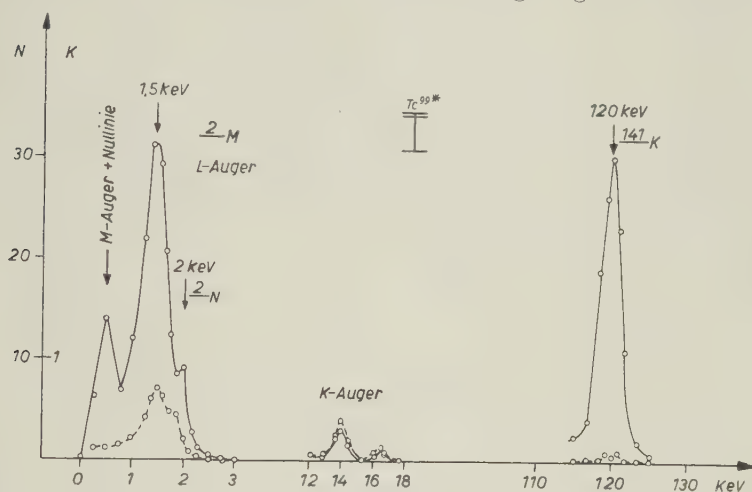


Fig. 6.

Ausschnitte aus dem Elektronenspektrum des $\text{Tc}^{99\text{m}}$ mit Koinzidenzen.

Die Konversionslinien bei 1,5 und 2 KeV überlappen mit den L -Augerelektronen und können im Spektrum der Einzelstöße nicht von diesen unterschieden werden. Aber an Hand der Koinzidenzrate können sie eindeutig identifiziert werden. Die K -Augerelektronen zeigen eine Koinzidenzrate von 11% entsprechend der Geometrie der Anordnung und der Ansprechwahrscheinlichkeit der Koinzidenzpartner im Scintillationszähler. Jedes Augerelektron der K -Gruppe ist in Koinzidenz mit einem K -Konversionselektron des 141-KeV-Überganges, das mit einer Ansprechwahrscheinlichkeit von 83% im Scintillationszähler registriert wird. Die Koinzidenzrate sollte also $\omega_{\text{Sc}} \cdot \varepsilon_{\text{Sc}} = 0,13 \cdot 0,83 = 0,11$ betragen, in Übereinstimmung mit dem Versuch. Im Bereich der L -Gruppe findet man dagegen eine Koinzidenzrate von nur etwa 2,2%. Das bedeutet, dass etwa 4/5 aller Elektronen in dieser Gruppe Konversionselektronen sind, und nur 1/5 als Augerelektronen in Frage kommen. Denn ein Augerelektron der L -Gruppe hat mindestens so viele Koinzidenz-

partner wie ein K -Augerelektron. Diese Konversionselektronen können also nur zu einer Linie gehören, die in Kaskade mit einer schwach konvertierten Strahlung liegt. Und das ist die 141-KeV-Linie, die zu 10% konvertiert ist. Wir interpretieren die zwei Spitzen in der Gruppe bei 1,5 und 2 KeV als M - und N -Konversion, und daraus ergibt sich die γ -Energie des isomeren Überganges zu 2 KeV in guter Übereinstimmung mit der Messung des Crossovers und jener im Proportionalzähler.

Die Isomere Ag^{107} und Ag^{109} .

Beide Kerne entstehen aus ihren Isobaren im Cadmium und wurden durch (p, n) -Reaktion im Cyclotron des Institutes durch Bestrahlen von Silber hergestellt. Wir haben in einem evakuierten Pyrexrohr das Cadmium verdampft, und die Aktivität schlägt sich dabei trägerfrei auf eine im Rohr vorhandene Goldfolie von 0,4 mg/cm² und 0,6 cm Durchmesser nieder.

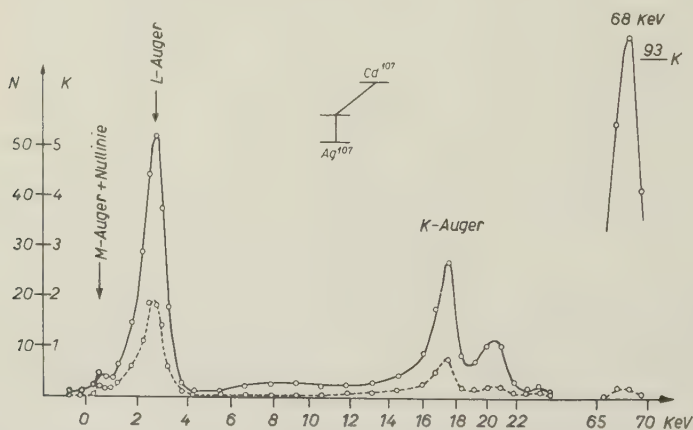


Fig. 7.

Elektronenspektrum des Cd^{107} zwischen 0 und 22 KeV mit Koinzidenzen. Im gleichen Maßstab die 93_K -Konversionslinie.

Fig. 7 und 8 zeigen das Spektrum der Elektronen zwischen 0 und 20 KeV mit den zugehörigen Koinzidenzen.

Die Elektronen, die vom K -Einfang herrühren, haben wegen der nachfolgenden Halbwertszeit des Isomers keine Koinzidenzpartner. Deshalb wird die Koinzidenzrate der Augerelektronen viel kleiner als im Falle des Technetiums, denn dort liegt ja kein K -Einfang vor. Sie beträgt für die K -Gruppe $(2,9 \pm 0,1)\%$ und für die L -Gruppe $(3,1 \pm 0,1)\%$. Der Unterschied entspricht gerade den Erwartungen, da die L -Konversionslinie eine grössere Ansprechwahrscheinlichkeit

im Anthracenzähler besitzt. Eine Konversionslinie würde, wenn sie wie beim Tc^{99} in die L -Augergruppe fällt, die Koinzidenzrate auf mindestens 10% erhöhen, denn diese müsste mit der hochkonvertierten 87- resp. 93-KeV-Linie in Kaskade liegen. Ein solcher Übergang kann hier mit Sicherheit ausgeschlossen werden.

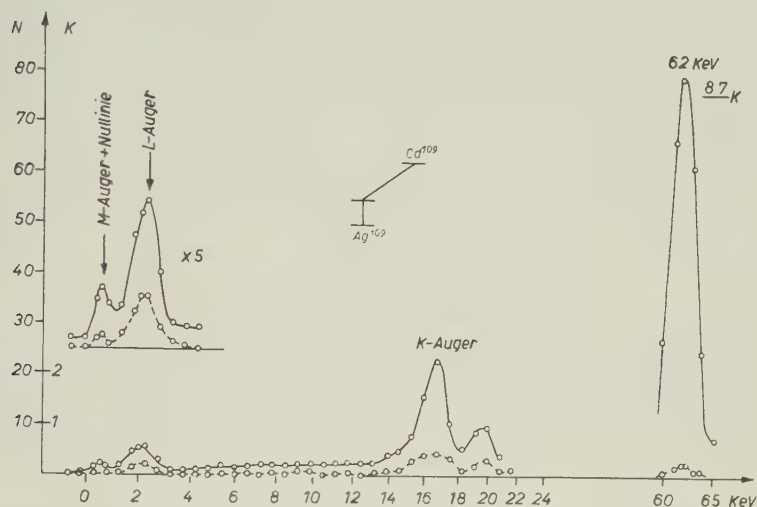


Fig. 8.

Elektronenspektrum des Cd^{109} zwischen 0 und 22 KeV mit Koinzidenzen. Im gleichen Maßstab die 87 $_K$ -Konversionslinie.

Das Isomer Au^{197} .

Über den Zerfall des Hg^{197} sind von verschiedenen Autoren Untersuchungen angestellt worden (siehe Zusammenfassung in ¹⁵).

Nach dem in früheren Arbeiten angegebenen Zerfallsschema folgen dem isomeren Zustand von 7 sec Halbwertszeit im Au^{197} drei γ -Linien von 275, 191 und 77 KeV. Spin und Parität des Grundzustandes sind aus Messungen der Hyperfeinstruktur sowie des Kernmomentes bekannt. Sie lassen eindeutig auf einen $d_{3,2}$ -Zustand schließen. Die Drehimpulsänderung zwischen dem isomeren- und dem Grundzustand wurde aus der Anregung mit Neutronen ermittelt¹⁶). Aus der Anregungskurve wurde auf ein $\Delta I = 4$ und auf Paritätswechsel geschlossen. Damit erhält das Isomer den Drehimpuls $11/2$ — (wahrscheinlich $h_{11,2}$). Diese Zuordnung wird dadurch erhärtet, dass man dem 25-h-Isomer im Hg^{197} den Drehimpuls $13/2$ zuschreibt, was auf Grund der experimentellen Daten der γ -Kaskade im Hg^{197} sehr wahrscheinlich ist. Grundzustand und isomerer

Zustand des Au^{197} würden damit gut in die Termfolge des Schalenmodells passen. Der isomere Zustand führt also über zwei Zwischen-niveaux in den Grundzustand. Auf Grund der Messungen können diesen Niveaux Drehimpuls und Parität nicht eindeutig zugeordnet werden. Weil nur 2% aller Zerfälle des Hg^{197} 23 h über das $h_{11/2}$ -Niveau führen und zudem diese Linien teilweise durch die Konversionslinien des Hg^{197} verdeckt werden, sind die Messungen sehr erschwert. Trotzdem lässt sich sagen, dass die Ergebnisse nicht in Übereinstimmung mit allen theoretischen Forderungen gebracht werden können, nämlich: Konversion, Lebensdauer-Energie-Beziehung und K/L -Verhältnis. Um daher mehr über den Zerfall des Au^{197} zu erfahren, haben wir das Spektrum bis zur Energie 1 KeV gemessen und den Zerfall des Pt^{197} zum Au^{197} untersucht.

Der 18-h-Übergang Pt^{197} – Au^{197} .

In der Harwell-Pile wurde spektralreiner Platinschwamm während 3 Tagen mit langsamen Neutronen bestrahlt. Der (n, γ) -Prozess liefert aus den 6 stabilen Pt-Isotopen nur 3 gut messbare Aktivi-

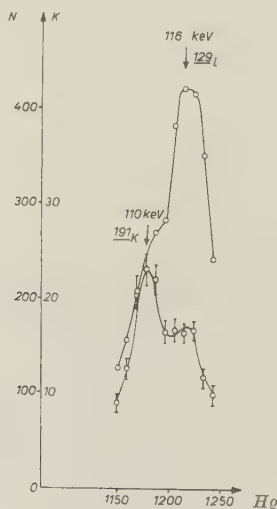


Fig. 9.

Ausschnitt aus dem Elektronenspektrum des Pt^{197} mit Koinzidenzen, zum Nachweis der 191_K -Konversionslinie im Au^{197} .

täten. Pt^{199} zerfällt mit einer Halbwertszeit von 28 min zu Au^{199} , und dieses aktive Gold kann chemisch abgetrennt werden. Somit bleibt noch der angeregte Zustand des Pt^{195} und der gesuchte β -

Übergang des Pt^{197} . Im Pt^{195} findet man nur Konversionslinien, deren höchste Energie 115 KeV beträgt. Das 18-h-Spektrum konnte somit auch in Gegenwart dieser Linien gemessen werden. In diesem Spektrum haben wir nun ausser den Linien des Pt^{195} , die mit 3,8 d Halbwertszeit abklingen, zwei Konversionslinien bei 62 und 73 KeV gefunden, welche eine Halbwertszeit von 18 h aufweisen. Die Energie dieser Linien und ihr Intensitätsverhältnis (3,6) stimmt genau mit der Energie und dem L/M -Verhältnis der bekannten 77-KeV-Linie im Au^{197} überein. Es kann daher kein Zweifel bestehen, dass es sich hier um den gleichen γ -Übergang handelt. Wir haben daher

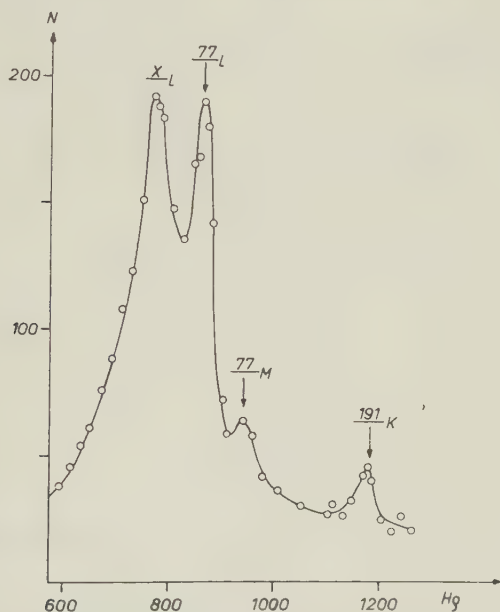


Fig. 10.

Photoelektronenspektrum der Platinfraktion zum Nachweis 77_L , 77_M und der 191_K -Linie. Konverter $2,6 \text{ mg/cm}^{-2} \text{ Au}$.

auch nach der 191_K -Konversion gesucht, welche bei 121 KeV zu erwarten ist. Diese Linie erscheint tatsächlich im Spektrometer. Sie ist aber etwa 50mal schwächer und wird überdies fast verdeckt von der sehr intensiven 129_L -Linie des Pt^{195} . Mit Hilfe von Koinzidenzen konnte sie aber einwandfrei identifiziert werden. Fig. 9 zeigt einen Ausschnitt aus dem Elektronenspektrum.

Beide γ -Übergänge sind ausserdem im Spektrum der Photoelektronen nachzuweisen (Fig. 10).

Somit ist der β -Übergang durch 3 Experimente sichergestellt:
 1. β -Spektrum, 2. Konversionslinien 77 L, 77 M und 191 K und
 3. Photoelektronenspektrum der Platinfraktion. Aus der Intensität der Photolinien folgt unter Berücksichtigung der energieabhängigen Photoausbeute, dass 1,5 % aller Übergänge auf das 268-KeV-Niveau

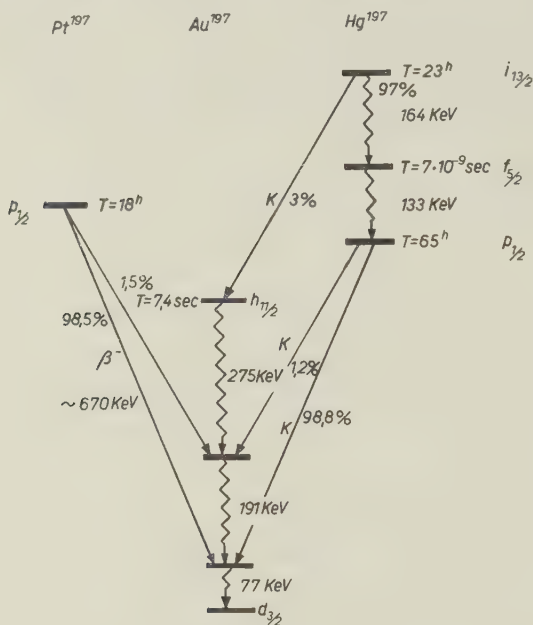


Fig. 11.

Zerfallsschema des Pt^{197} kombiniert mit dem schon bekannten Schema des Hg^{197} und Au^{197} .

im Au^{197} führen. Für das β -Spektrum ergibt sich durch Auswertung des FK.-Diagramms eine Grenzenenergie von 670 KeV. Die Energie des Partialspektrums beträgt demnach 479 KeV (670–191). Das Zerfallsschema des Pt^{197} zeigt Fig. 11.

Das Elektronenspektrum des Hg^{197} und Au^{197} zwischen 1 und 10 KeV.

Die Aktivität wurde im Cyklotron des Institutes durch die Reaktion $\text{Au}(p, n)\text{Hg}$ hergestellt, und konnte durch Verdampfen im Vakuum trägerfrei auf eine Goldfolie von $0,4 \text{ mg/cm}^2$ niedergeschlagen werden. Diese Folie konnte direkt als Quelle im Spektrometer Verwendung finden. Fig. 12 zeigt das Spektrum, das mit einer Be-

schleunigung von 6 kV aufgenommen wurde. Das Zählrohrfenster war $0,1 \text{ mg/cm}^2$ Formvarfolie.

Dass eine Kern- γ -Strahlung im Gebiet zwischen 1 und 10 KeV dieser Messung nicht hätte entgehen können, zeigt folgende Überlegung: Diese Strahlung wäre vollständig konvertiert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Elektron dieser Linie pro Zerfall des Hg^{197} 23 h emittiert wird, wäre demnach 0,03, denn nur dieser

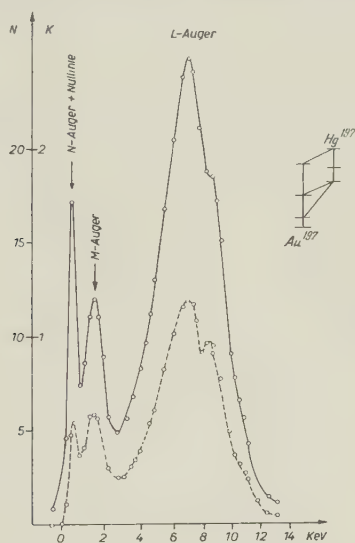


Fig. 12.

Elektronenspektrum des $\text{Hg}^{197} + \text{Au}^{197}$ zwischen 0 und 12 KeV mit Koinzidenzen.

Bruchteil führt über das fragliche Niveau. Als Konkurrenzprozess stehen dem die L -Augerelektronen gegenüber. Eine Schätzung der L -Augerausbeute auf Grund von Messungen der L - und K -Augergruppe im Spektrum des Au^{195} ergibt etwa 25%. Addiert man alle Möglichkeiten für L -Augerprozesse im Zerfallsschema des Au^{197} + Hg^{197} , so erhält man damit eine Wahrscheinlichkeit von 0,5 pro Zerfall des Hg^{197} 23 h. Die fragliche Linie müsste also eine Intensität von ca. 6% aller L -Augerelektronen haben. Man kann berechnen, dass eine Konversionslinie von dieser Intensität die Koinzidenzrate etwa um den Faktor 2 vergrößern müsste. Da die gemessene Koinzidenzrate aber über den ganzen Bereich der L -Augergruppe innerhalb von 10% konstant ist, kann eine Konversionslinie selbst von dieser kleinen Intensität ausgeschlossen werden.

Au¹⁹⁵.

Spektralreines Platin wurde im Cyklotron des kernphysikalischen Institutes in Amsterdam mit Deuteronen bestrahlt*). Trennt man das Gold elektrolytisch vom Platin, so findet man noch folgende Halbwertszeiten: 39 h (Au¹⁹⁴), 3,2 d (Au¹⁹⁹), 5,6 d (Au¹⁹⁶) und 185 d (Au¹⁹⁵). Nachdem alle kürzeren Perioden abgeklungen waren, wurde das Au¹⁹⁵ trägerfrei auf eine dünne Goldfolie elektrolysiert. Fig. 13 zeigt das Spektrum mit 6 kV Beschleunigung.

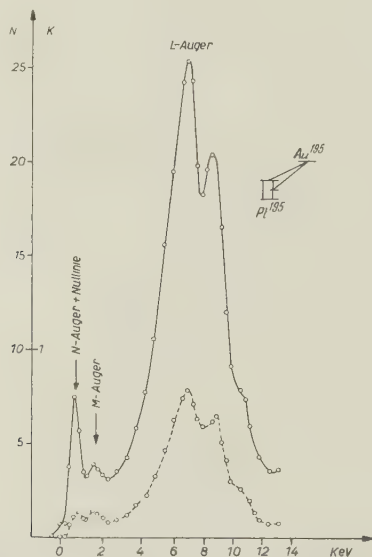


Fig. 13.

Elektronenspektrum des Au¹⁹⁵ zwischen 0 und 12 KeV mit Koinzidenzen.

Beim Vergleich dieser Messung mit jener vom Au¹⁹⁷ + Hg¹⁹⁷ fällt auf, dass die N-Augergruppe relativ zur L-Gruppe und zur Nulllinie weniger intensiv ist. Um das verständlich zu machen, muss einiges über die Präparate gesagt werden: Es hat sich gezeigt, dass die Goldfolie, auf der die Aktivität niedergeschlagen oder elektrolysiert ist, auf der Formvarfolie, die als mechanischer Träger dient, nur haftet, solange kein elektrisches Feld angelegt ist. Um zu verhindern, dass die elektrostatischen Kräfte des Feldes die Goldfolie

*) Herrn Professor BAKKER sind wir für die Bestrahlung, die in seinem Institut durchgeführt wurde, sehr zu Dank verpflichtet.

zerstören, haben wir das Präparat mit einer darübergespannten Formvarhaut von $0,01 \text{ mg/cm}^2$ fixiert. Diese ist natürlich bei jedem Präparat etwas verschieden und wirkt als Absorber. Ausserdem diffundieren mit der Zeit die aktiven Atome etwas in die Goldfolie hinein, was wahrscheinlich gerade beim Au^{199} mitspielt. Diese Selbstabsorption hat aber keinen Einfluss auf die Koinzidenzrate und auf diese stützt sich ja die Interpretation der Messung.

Au^{199} .

Das bei der Bestrahlung mit langsamen Neutronen im Platin entstehende Pt^{199} zerfällt mit einer Halbwertszeit von 28 min unter β -Emission zu Au^{199} . Die Halbwertszeit des Au^{199} beträgt 3,2 d.

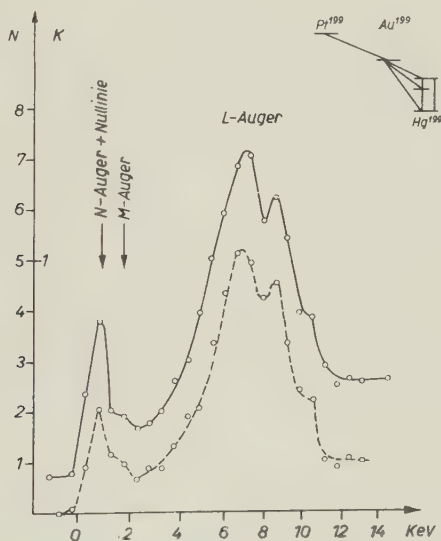


Fig. 14.

Elektronenspektrum des Au^{199} zwischen 0 und 12 KeV mit Koinzidenzen.

Man kann diese Aktivität als Gold chemisch abtrennen und trägerfrei elektrolysieren. Der β -Zerfall des Au^{199} führt zum stabilen Hg^{199} . Fig. 14 zeigt das Spektrum. Die Nullinie erscheint hier intensiver, weil das Präparat relativ schwach war.

Au¹⁹⁸.

Bestrahlt man Gold mit langsamen Neutronen, so entsteht durch (n, γ) -Prozess Au¹⁹⁸, das mit 2,6 d Halbwertszeit zu Hg¹⁹⁸ zerfällt. Durch Elektrolyse kann man also kein trägerfreies Präparat herstellen. Immerhin ist die spezifische Aktivität des käuflichen Isotopes so gross, dass das Spektrum gemessen werden kann. Fig. 15 zeigt das Spektrum des Au¹⁹⁸.

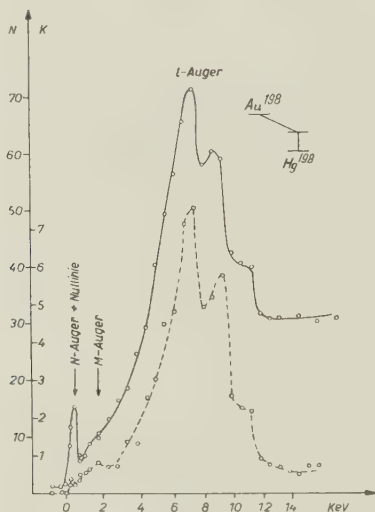


Fig. 15.

Elektronenspektrum des Au¹⁹⁸ zwischen 0 und 12 KeV mit Koinzidenzen.

Diskussion.

Die Messungen an den drei Isomeren Ag¹⁰⁷, Ag¹⁰⁹ und Au¹⁹⁷ zeigen, dass ausser den schon bekannten Kern- γ -Strahlungen keine weiteren Emissionen in dem untersuchten Energiegebiet vorkommen. Ein isomerer Übergang kleiner Energie konnte in allen drei Fällen ausgeschlossen werden.

Bei den zwei Silberisomeren besteht damit eine Diskrepanz zwischen der aus der Lebensdauer-Energiebeziehung und dem gemessenen K/L -Verhältnis hergeleiteten Drehimpulsdifferenz von 3 und der Forderung des strengen Einteilchenmodells. Mit dem Schalenmodell in seiner Fassung als Einteilchenmodell können die Niveaux dieser Isomere also nicht mehr erklärt werden. Beim Au¹⁹⁷ kann

diese Entscheidung noch nicht getroffen werden, weil der Multipolcharakter der γ -Kaskade noch nicht hinreichend genau bekannt ist.

Die Untersuchungen an den Kernen Au^{195} und Au^{199} stehen in engem Zusammenhang mit den Zerfallsschemen, die in der folgenden Arbeit¹⁹⁾ beschrieben werden. Sie beweisen, dass hier die Übereinstimmung mit dem Einteilchenmodell vollkommen ist, und dass keine weiteren Niveaux existieren. Für die in jener Arbeit aufgezeigte Systematik bezüglich der Energie entsprechender Zustände bei ug-Kernen, die sich um je 2 Nukleonen unterscheiden, war es nämlich von fundamentaler Bedeutung, das Gebiet kleiner Energien zu untersuchen. Die Existenz eines Niveaus kleiner Energie in einem der Kerne Au^{195} , Hg^{197} oder Au^{199} hätte bezüglich der Zuordnung gemäss dem Schalenmodell zu grossen Schwierigkeiten geführt.

Von allen hier untersuchten Kernen ist Hg^{198} der einzige gg-Typ, und dieser verdient noch in anderem Zusammenhang Interesse. Von verschiedenen Autoren¹⁷⁾ wurden hier verzögerte Koinzidenzen gefunden, die einem Niveau von sehr kleiner Energie zugeschrieben wurden. Dieser Übergang sollte zeitlich dem Übergang von 411 KeV folgen. Ein solches Niveau im Au^{198} wäre aber eine interessante Ausnahme, denn nimmt man der j - j -Kopplung entsprechend an, dass die angeregten Zustände in einem gg-Kern durch Aufbrechen eines Paares von zwei Nukleonen entstehen, so sollte dazu eine relativ grosse Energie gehören. Dieses Verhalten ist auch durch die Erfahrung bestätigt¹⁸⁾. Unsere Messungen können aber diesen Übergang bis 1 KeV ausschliessen.

Unserem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. P. SCHERRER, sind wir für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Literatur.

- 1) M. GOLDBABER und A. W. SUNYAR, Phys. Rev. **83**, 96 (1951).
- 2) V. F. WEISSKOPF, private Mitteilung und Phys. Rev. **81**, 470 (1951).
- 3) H. MEDICUS, D. MAEDER und H. SCHNEIDER, Helv. Phys. Acta **24**, 72 (1951).
- 4) O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und A. DE SHALIT, Helv. Phys. Acta **25**, 1 (1952).
- 5) D. K. BUTT, Proc. Phys. Soc. [A] **63**, 9, 986 (1950).
- 6) O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und W. ZÜNTLI, Helv. Phys. Acta **23**, 855 (1951).
- 7) E. PERSICO, Rev. Sci. Instr. **20**, Nr. 3, 191 (1949).
- 8) DU MOND, Rev. Sci. Instr. **20**, Nr. 3, 160 (1949).

- ⁹⁾ ZWORYKIN, MORTON, RAMBERG, HILLER und VANCE, „Electron Optics and the Electron Microscope“, John Wiley a. S., New York.
 - ¹⁰⁾ Handbuch der Physik (GEIGER und SCHEEL) **22**, 1 (1933).
 - ¹¹⁾ C. BURCKHARDT, Diplomarbeit ETH. Zürich (1952).
 - ¹²⁾ G. T. SEABORG und SEGRÉ, Phys. Rev. **55**, 808 (1939).
 - ¹³⁾ I. W. MIHELICH, M. GOLDHABER und E. WILSON, Phys. Rev. [A] **83**, 216 (1951).
 - ¹⁴⁾ E. JACOBI, Helv. Chim. Acta [A] **31**, 2118 (1948).
 - ¹⁵⁾ O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER, A. DE SHALIT und W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **24**, 127 (1950).
 - ¹⁶⁾ EBEL und V. F. WEISSKOPF, private Mitteilung.
 - ¹⁷⁾ K. P. MEYER, E. BALDINGER und P. HUBER, Helv. Phys. Acta **23**, 517 (1950).
 - ¹⁸⁾ P. STÄHELIN und P. PREISWERK, Helv. Phys. Acta (im Druck).
 - ¹⁹⁾ A. DE SHALIT, O. HUBER und H. SCHNEIDER, Helv. Phys. Acta **25**, 279 (1952).
-

On the decay of some odd isotopes of Pt, Au and Hg

by A. de-Shalit*), O. Huber, and H. Schneider, Phys. Inst. der ETH., Zurich.

(4. XII. 51.)

Zusammenfassung: Der Zerfall der Kerne Pt^{195*} , Au^{195} und Au^{199} wurde untersucht. Für die Messungen wurde eine Koinzidenzanordnung im β -Spektrometer benützt. Zerfallsschemen sowie Konversionskoeffizienten werden angegeben. Die Resultate werden diskutiert unter dem Aspekt des Schalenmodells und es wird nachgewiesen, dass alle angeregten Zustände in diesen drei Kernen, sowie auch im Hg^{197} , mit den Forderungen eines Einteilchenmodells nach MAYER verträglich sind.

Introduction.

The existence of a shell structure in nuclei has recently been determined in many different ways¹⁻³). One usually notices that a certain property of nuclei, when plotted against the number of protons or neutrons in the nucleus, has a breakdown at certain "magic-numbers" which is interpreted as an indication for the beginning of a new shell.

Since the recognition of these magic-numbers, the first aim of a nuclear model has been to explain the closing of the shells at these numbers. This could be achieved by different models⁴⁻⁸), and the further choice among them is dictated by the behaviour of each of them all along the shell.

The model of MAYER, which is usually considered to be the most successful one, is, at least for the ground states, a single particle model. The natural question is whether this single particle model can be extended to include also excited states, and to what an extent.

In order to calculate nuclear energy levels one may proceed in the following way:

An effective potential-well is postulated and the eigenstates in it are derived. One then considers the different configurations obtained

*) Now at the Palmer Phys. Lab. Princeton N. J., U. S. A.

by distributing those nucleons which are not in closed shells or sub-shells among the empty states. Each such configuration, which in the j - j -coupling scheme will be characterized by giving the occupation numbers n_i of the different sub-shells ($j_1^{n_1}, j_2^{n_2}, \dots$), has generally a number of terms arising from different relative orientations of the angular momenta of each nucleon.

In Mayer's model the lowest configurations are those in which there is exactly one odd occupation number (for odd A nuclei), and further, the lowest term in each configuration has the spin and parity of that state to which the odd particle belongs. That is: the lowest state of a configuration is a single-nucleon state.

A priori there are no serious objections to a situation in which the energy differences between the lowest terms of some different configurations will be smaller than the difference between the lowest term and the next one in the same configuration. That is: a single particle model could, in principle, exist for the first few excited states of odd nuclei. It could be realized, for instance, among particles moving in an oscillator potential-well slightly deformed. As is well known the energy levels of the (three dimensional) oscillator are degenerate with respect to the orbital angular momentum, and thus a slight deformation of this potential could give rise to a situation in which the "single particle levels" are lower than the excited terms of the lowest configuration.

As in Mayer's model the effective potential is a slightly deformed oscillator well, it might be well expected that the lowest excited states will in fact be single-particle ones.

This assumption is further strengthened by comparing the energy levels of odd-even nuclei with those of the neighbouring even-even ones. In general the first excited state of an even-even nucleus is higher than the first few levels in its odd-even neighbours. Even-even nuclei show a tendency of having more or less equi-distant levels of the same parity and whose spins differ by two units: $0 - 2 - 4$. This situation is characteristic for the terms formed by the excited states of a configuration of equivalent particles. Thus, if we really interpret these levels as such, the interpretation of the first excited states of odd-even nuclei as single particle ones would get further support. It should be noted that a big energy difference between the terms of a configuration of an even number of nucleons does not necessarily imply the same distance between the terms of a configuration of an odd number of nucleons. It serves merely to give an idea of the energy needed to "break" the pairing between the nucleons.

Another check on the validity of the single particle model for the first excited states of odd nuclei arises from the following simple considerations:

If the separation of the levels in a configuration is smaller than the separation between the lowest states of different configurations, one would expect to find similar decay schemes for two nuclei of which the one has n particles in the outmost shell and the other has n holes; the decay schemes of successive odd nuclei should be in principle different. If, however, the single particle model predominates, one should find, for odd A nuclei, exactly the same decay schemes all along the shell. That is:

all odd A nuclei having their odd particle in the same sub-shell should have the same "set" of levels, the relative positions of which should vary continuously from one nucleus to the other⁹).

This work was undertaken in order to check if this result holds or not, and we chose for this purpose some odd A isotopes of Pt, Au, and Hg. The previous decay schemes of the isotopes we were about to examine would have definitely contradicted the above conclusion, as they were substantially different from each other. It therefore seemed worth while to check them with refined technique.

For this purpose we used a magnetic lens spectrometer supplemented by a coincidence arrangement which enables the measuring of the number of coincidences of each conversion line with all its "partners". This was technically done by placing a scintillation counter just behind the sample and taking coincidences between all the electrons measured in this scintillation counter and electrons of definite energy arriving at the Geiger counter on the other side of the spectrometer. This arrangement and its applications are described elsewhere^{10,11}).

As for the samples, it was found most useful to prepare them by electrolysis. We could get very nice results by using as cathodes thin (~ 0.4 mg/cm²) gold foils which were floating on the solution to be electrolysed; we were thus sure that the active material was deposited on one side of the backing only, and the backing effects could be minimized.

In Chapter I we give experimental results on some odd N nuclei, and in Chapter II we shall discuss their decay schemes and others from the standpoint of Mayer's shell model.

CHAPTER I.

Spectroscopic measurements.

A. The Pt n - γ -products.

Spectroscopically pure Pt was irradiated by neutrons in the pile of HARWELL. Except for possible isotopes of short half-lives the periods found were of 18^h , $3,16^d$, $3,8^d$ and $\sim 70^d$.

The 18^h activity is known to be due to Pt^{197} decaying to the 77 keV and 268 keV levels in Au^{197} ¹²). The $3,16^d$ activity is due to the β -decay of Au^{199} to Hg^{199} ¹³); the Au^{199} is produced from the 29^m Pt^{199} . As will be shown later the $3,8^d$ activity arises from an isomeric transition in Pt^{195} . The 70^d activity, which was of a very low intensity, is probably due to some impurities of Ir which has a very high cross-section for the n - γ -reaction.

§ 1. Au^{199} ; experimental results.

The electron spectrum of Au^{199} is shown in Fig. 1 together with the coincidence spectrum. The interpretation of these graphs is given in Table I.

Table I.

Energy of conv. line in keV	Interpretation	Relative intensity*)	Coincidence rate**)
1	M Auger		
7	L Auger		
8,5			
10,2			
36	50,6 L	5,83	12,2%
47	50,6 M	1,77	
50	K Auger		
74,6	157,5 K	22,7	8,6%
125,2	208,1 K	11,3	7,5%
145	157,5 L	33,7	8,1%
155	157,5 M	11,7	8,0%
194	208,1 L	2,0	7,1%
205	208,1 M	0,8	

*) These values were taken from another measurement with a better resolving power (1,5%).

**) Simple considerations show that the coincidence rate (number of coincidences per electron counted on the conversion line) at different points of the same line should be equal (indeed, deviations from this constancy were used to establish an overlapping of two different lines). The coincidence rates listed in the Table are averages of 4—5 points on each line; the fluctuations do not exceed 5% in any case and are less than 2% in most of them.

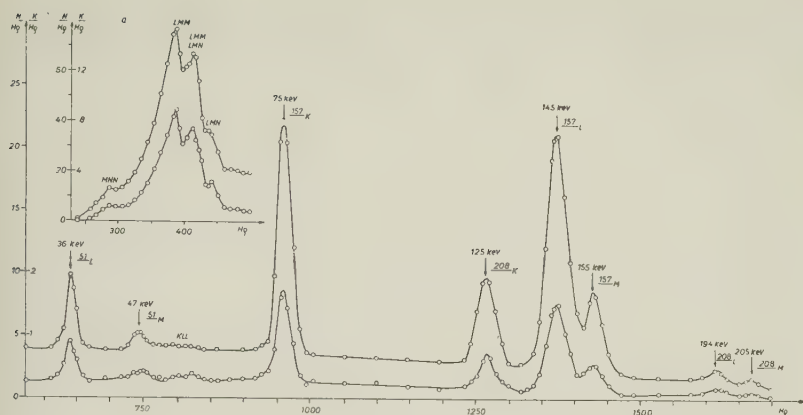


Fig. 1.

Electron spectrum of Au^{199} .

Upper curve—single counts; lower curve—coincidences.

“a” was taken with an acceleration of 6 KeV.

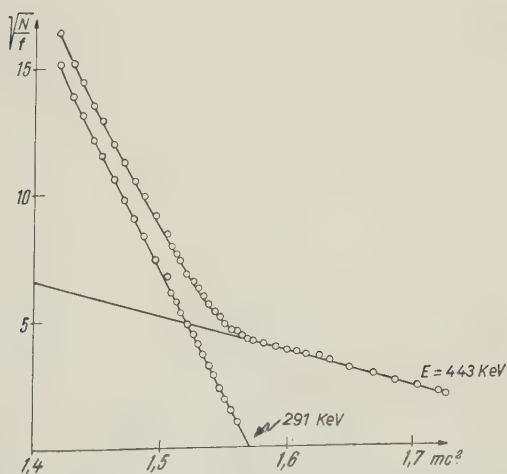


Fig. 2.

Kurie plot of β -spectrum of Au^{199} .

Fig. 2 shows a Kurie plot of the β -spectrum of Au^{199} which demonstrates the definite existence of two spectra of maximum energies 291 ± 5 keV and 443 ± 7 keV. Some 93% of the β -transi-

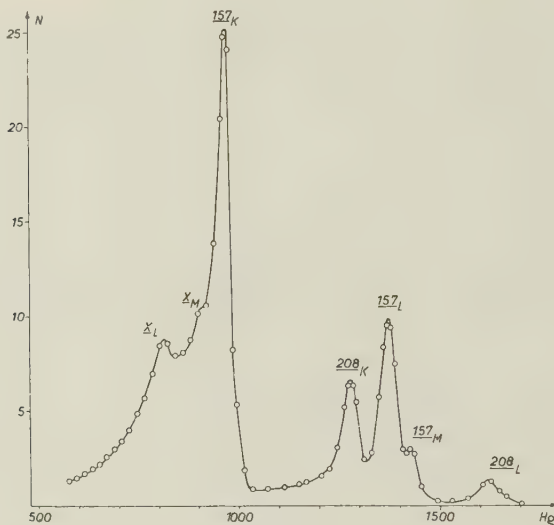


Fig. 3.
Photo-electrons of Au^{199} .

Table II.

Energy of photo line	Interpretation	Relative intensity
55 keV	X-rays L	
64 keV	X-rays M	
76 keV	157 K	25
127 keV	208 K	5,2
145 keV	157 L	9,5
155 keV	157 M	
196 keV	208 L	1,4

tions go to the excited states in Hg^{199} , whereas 7% decay directly to the ground state.

Fig. 3 shows the photo-electron spectrum of Au^{199} taken with an Au radiator of 2,6 mg/cm² thickness. The interpretation of this graph is given in Table II.

An attempt to find angular correlation between the K conversion electrons of the 208 keV γ -ray and the rest of the spectrum, as well as between the K conversion electrons of the 157 keV γ -ray and the rest of the spectrum, gave negative results¹⁴).

Discussion of experimental results; decay scheme.

From the $K - L$ differences it is seen that the 208 and the 157 keV γ -rays are most probably converted in Hg. The 51 keV γ -ray has an appreciable amount of coincidences so that this γ -ray, too, should be converted in the same nucleus, for otherwise it will have no partner to be in coincidence with.

These results agree with those of HILL¹⁵). No indication could be found for the lines of 24 keV, 70 keV, and 230 keV reported by BEACH et al.¹³).

The difference in energy between the two main β -spectra (Fig. 2) indicates that they are leading to the initial and final levels of the 157 keV γ -transition. The fact that the 50,6 keV γ -ray and the 157 keV γ -ray sum up to give 208 keV, suggests that the first two are in cascade with each other and in parallel with the last one.

The absence of photo-electrons of the 51 keV γ -ray (Fig. 3) puts an upper limit of 10% for the ratio of the non-converted 51 keV γ -ray intensity to that of the X-rays. That is: if we denote by κ^{51} the total conversion coefficient of the 51 keV γ -ray ($\kappa = N_e/N$, $\kappa = \kappa_K + \kappa_L + \kappa_M$), and if μ_{51} is the number of transitions via the 51 keV γ -ray per disintegration of Au¹⁹⁹, etc., we have:

$$\mu_{51}(1 - \kappa^{51}) \leq 0,1[\mu_{157}\kappa_K^{157} + \mu_{208}\kappa_K^{208}]. \quad (1)$$

It is clear that:

$$\mu_{51}\kappa^{51} : \mu_{157}\kappa_K^{157} : \mu_{208}\kappa_K^{208} = Z^{51} : Z_K^{157} : Z_K^{208} \quad (2)$$

so that by introducing (2) into (1) one gets:

$$\left(\frac{1}{\kappa^{51}} - 1\right) \leq 0,1 \frac{Z_K^{157} + Z_K^{208}}{Z^{51}}. \quad (3)$$

Inserting the values given in Table I for the relative intensities of the conversion lines one gets from (3):

$$\kappa^{51} \geq 0,70. \quad (4)$$

To determine now whether the 51 keV γ -ray follows the 157 keV one or precedes it, we note that in the first case the number of the 51 keV transitions is at least as big as that of the 157 keV ones, so that:

$$\frac{Z^{51}}{\kappa^{51}} \geq \frac{Z^{157}}{\kappa^{157}} \geq Z^{157}.$$

Therefore, assuming that the 51 keV γ -ray follows the 157 keV one, would lead to the relation

$$Z^{51} \geq 0,7 Z^{157}$$

which is seen not to be the case (Table I). Thus, if they are at all in cascade, the 51 keV γ -ray precedes the 157 keV one. This is also

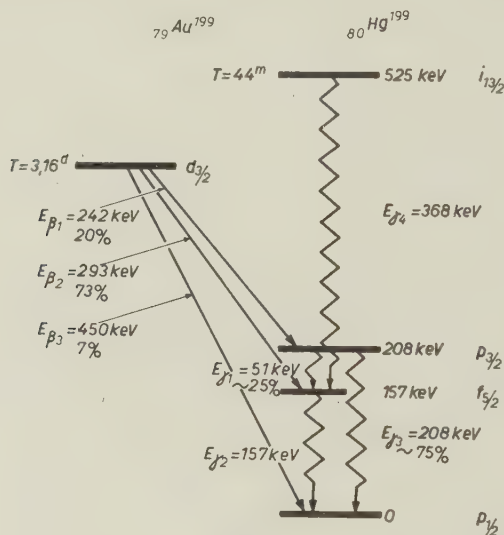


Fig. 4.

Decay scheme of Au^{199} .

confirmed by the decay of the 44^m isomeric state in Hg^{199} , since there is no indication of either a 51 keV or a 208 keV γ -ray, the only ones found being a 368 keV and the 157 keV γ -rays.

It is thus suggested that the decay scheme of Au^{199} - Hg^{199} is as shown in Fig. 4.

Our experimental data enable now a further check on this decay scheme, as well as the determination of the conversion coefficients and the different branching ratios.

We use the following symbols:

- N = number of disintegrations per unit time,
 Z = number of conversion electrons counted per unit time,
 K = number of coincidences per unit time of a conversion line with all its partners,
 ω_{Sc} = solid angle of the scintillation counter,
 ω_{Sp} = solid angle of the spectrometer,
 λ_i = branching ratios for the spectra,
 μ = branching of the 208 keV level via the 51 keV transition,
 $\varepsilon(p)$ = efficiency of scintillation counter for electrons of momentum p ,
 $f(p)$ = "shape" function of the spectrum [$\int f(p) dp = 1$],
 β = coincidence rate on a conversion line.

The following relations are easily proved:

$$\left. \begin{aligned} Z_{L,M}^{51} &= N \lambda_1 \cdot \mu \omega_{Sp} \kappa_{L,M}^{51} \\ Z_{K,L,M}^{157} &= N (\lambda_2 + \lambda_1 \cdot \mu) \omega_{Sp} \kappa_{K,L,M}^{157} \\ Z_{K,L,M}^{208} &= N \lambda_1 (1 - \mu) \omega_{Sp} \kappa_{K,L,M}^{208} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{L,M}^{51} &= Z_{L,M}^{51} \omega_{Sc} \left[\int f_1(p) \varepsilon(p) dp + \sum_{i=K,L,M} \varepsilon_i^{157} \kappa_i^{157} \right] \\ K_{K,L,M}^{157} &= Z_{K,L,M}^{157} \omega_{Sc} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \cdot \mu} \int f_2(p) \varepsilon(p) dp + \frac{\lambda_1 \mu}{\lambda_2 + \lambda_1 \cdot \mu} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int f_1(p) \varepsilon(p) dp + \sum_{i=L,M} \varepsilon_i^{51} \kappa_i^{51} \right) \right] \\ K_{K,L,M}^{208} &= Z_{K,L,M}^{208} \omega_{Sc} \int f_1(p) \varepsilon(p) dp \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Combining (5) and (6) one gets:

$$\beta_{51} - \beta_{208} = \omega_{Sc} \sum_{i=K,L,M} \varepsilon_i^{157} \kappa_i^{157} = \omega_{Sc} \kappa^{157} \sum \varepsilon_i^{157} \frac{Z_i^{157}}{Z^{157}}$$

Hence:

$$\kappa^{157} = \frac{(\beta_{51} - \beta_{208}) Z^{157}}{\omega_{Sc} \sum \varepsilon_i^{157} \cdot Z_i^{157}} \quad (7)$$

From the experimental values of β (Table I) we see that the coincidence rates for the K conversion lines are bigger than the ones for the corresponding L and M lines. This different coincidence rate for the K conversion lines is due to additional coincidences with the K Auger electrons. The efficiency of these electrons in the scintil-

lation counter arrangement is 50%¹⁶⁾. Taking the Auger coefficient in Hg to be 0,06¹⁷⁾ one finds, with $\omega_{Sc} = 0,13$, that the Auger contribution to the coincidence rate for a K conversion line in Hg is 0,4%. This just explains the above difference. (That the difference in β is really due to coincidences with the K Auger electrons can be nicely shown by picking up from the crystal, with the help of an attenuator, only the big kicks caused by high energy electrons; in this case the K Auger electrons efficiency is very low in relation to the efficiency of the other electrons present¹⁶⁾ and the coincidence rate is then exactly the same for all conversion lines of the same γ -ray.)

Subtracting the above 0,4% from the coincidence rates on the K conversion lines given in Table I, we get the following average values for the coincidence rates on the three lines:

$$\beta_{51} = 12,2\% \quad \beta_{157} = 8,1\% \quad \beta_{208} = 7,1\% \quad (8)$$

Substituting these values in (7) we get:

$$\kappa^{157} = 0,50 \pm 0,02. \quad (9)$$

To determine the conversion coefficient of the 208 keV γ -ray we use the photo-electron measurements. The efficiency of the Au radiator for 157 keV and 208 keV γ -rays was determined by interpolation from experimental calibrated points. The calibration was done with the 172 keV and 247 keV γ -rays of In¹¹¹. As is easily seen one has, for any decay scheme:

$$\frac{N_{\gamma}^{208}}{Z^{208}} : \frac{N_{\gamma}^{157}}{Z^{157}} = \frac{1 - \kappa^{208}}{\kappa^{208}} : \frac{1 - \kappa^{157}}{\kappa^{157}}$$

and we find experimentally

$$\frac{1 - \kappa^{208}}{\kappa^{208}} : \frac{1 - \kappa^{157}}{\kappa^{157}} = 0,83. \quad (10)$$

Combining (9) and (10) we get:

$$\kappa^{208} = 0,55 \pm 0,05. \quad (11)$$

It should be noted that correcting factors which were neglected in evaluating (11), such as absorption of the γ 's in the sample and its container, tend to increase this value. It is estimated that they could raise this value by 5–10%.

The relation (10), which is independant of the decay scheme, excludes the possibility that the 208 keV γ -ray will follow the 157 keV

one; for this value means that the conversion coefficients of both γ -rays are roughly equal, and thus if the 208 keV γ -ray would follow the 157 keV, its conversion electrons should be at least as numerous as those of the 157 keV γ -ray, and this is easily seen not to be the case (Table I).

Taking in addition into account the relatively high coincidence rate of the 51 keV γ -ray, which shows that it must be in coincidence with at least two lines or a line and a spectrum, one can see that only the given decay scheme is consistent with all the experimental data.

The small difference in the coincidence rate for the 157 keV γ -ray and for the 208 keV γ -ray is partially due to the 157 keV being in cascade with the 51 keV transition, and mainly to the fact that the spectrum leading to the 157 keV level is of a higher energy than the one leading to the 208 keV level, and thus has a bigger efficiency in the crystal. This was proved by noticing that this difference grew relatively bigger when only the higher kicks from the crystal were allowed to contribute to the measured coincidences.

By means of the conversion coefficients it is now easy to determine the branching ratios. We get:

$$0,22 \leq \mu \leq 0,30 \quad 0,20 \leq \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) \leq 0,23. \quad (12)$$

Table III.
The transitions in Hg¹⁹⁹.

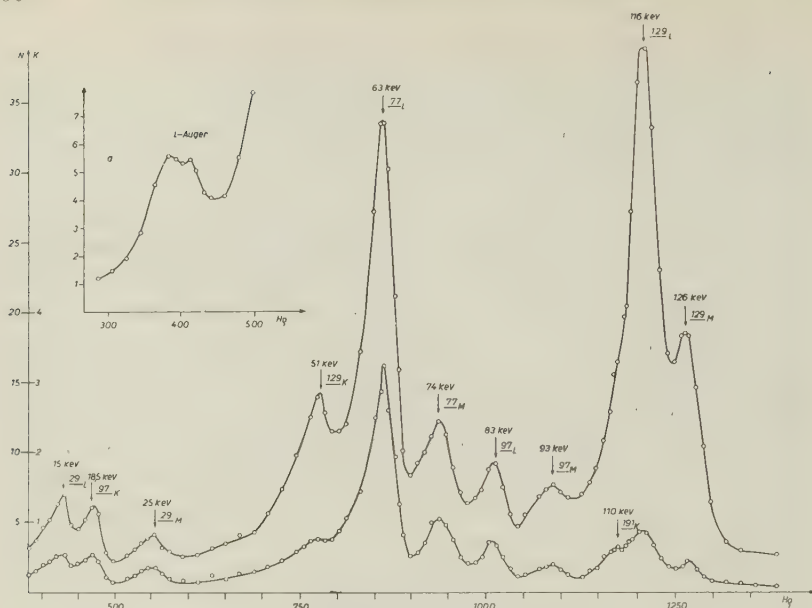
γ	$\kappa (= N_e/N)$				$\alpha (= N_e/N_\gamma)$				K/L
	K	L	M	Tot	K	L	M	Tot	
51		$\geq 0,54$	$\geq 0,16$	$\geq 0,70$	—	$\geq 1,8$	$\geq 0,5$	$\geq 2,3$	—
157	0,17	0,25	0,08	0,50	0,33	0,50	0,17	1,0	0,67
208	0,44	0,08	0,03	0,55	0,98	0,17	0,07	1,22	5,65

§ 2. Pt¹⁹⁵; experimental results.

The Pt fraction of the neutron irradiated Pt decayed with two of the periods referred to above, namely: 18^h and 3,8^d.

Fig. 5 shows the electron and the coincidence spectra of the Pt fraction. The interpretation of these measurements is given in Table IV.

The information one can get from these measurements is mainly qualitative rather than quantitative due to the fact that some of

Fig. 5. Electron spectrum of Pt^{195} .

Upper curve – single counts; lower curve – coincidences
 “a” was taken with an acceleration of 6 KeV.

Table IV.

Energy of conv. line keV	Half life	Conv. in	Inter- pretation	Relat. int. *)	Coinc. rate **)
6,5	3,8 ^d	Pt	<i>L</i> Auger		
8,5	3,8 ^d	Pt			
15	3,8 ^d	Pt	29 <i>L</i>		14 %
18,5	3,8 ^d	Pt	97 <i>K</i>		11,5%
25	3,8 ^d	Pt	29 <i>M</i> + <i>N</i>		14,4%
51	3,8 ^d	Pt	129 <i>K</i>	1,0	7,3%
63	18 ^h	Au	77 <i>L</i>		
74	18 ^h	Au	77 <i>M</i>		
83	3,8 ^d	Pt	97 <i>L</i>	0,75	12 %
93	3,8 ^d	Pt	97 <i>M</i>	0,2	
110	18 ^h	Au	191 <i>K</i>		
116	3,8 ^d	Pt	129 <i>L</i>	3,8	3,2%
126	3,8 ^d	Pt	129 <i>M</i>	1,8	3,0%

*) The relative intensities were measured after the short period (18 h) had decayed; those not given could not be evaluated because of the absorption in the sample.

**) The coincidence rate measurements in the spectrometer were carried out after the 18 h activity had decayed, both in the neutron irradiated Pt and in a deuteron-irradiated Pt, which was also found to contain the 3,8 d activity in its Pt fraction.

the important lines are of such a low energy that the absorption of the electrons in the rather thick sample prevents any evaluation of their intensity. We therefore measured in addition the photo-electrons emitted from a 2,6 mg/cm² Au radiator. These are shown in Fig. 6.

Discussion of experimental results; decay scheme.

Our sample was not carrier-free and indeed absorbed considerably the low conversion lines. Nevertheless it is believed that the measured $K - L$ differences do represent their real values. The L Auger-electron group, which retains its form in our sample, supports this assumption. We thus conclude that the 97 keV and the 129 keV γ -rays are converted in Pt or Au; Ir is excluded. We can further

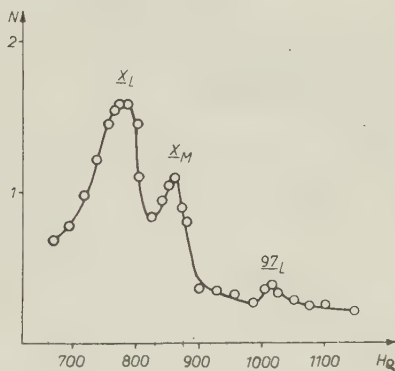


Fig. 6.

Photo-electrons of Pt¹⁹⁵.

exclude their conversion in Au from the absence of a β -spectrum. Thus an isomeric state in Pt is established.

The fact that all three lines: 29 keV, 97 keV, and 129 keV, have the same half-life suggests that they might be in cascade, if they all belong to the same nucleus.

The 129 keV and the 97 keV γ -rays are both converted in Pt; as the 29 keV γ -ray has coincidences and as the only electrons of the same period of 3,8^d are the conversion electrons of the 129 keV and 97 keV γ -rays, we conclude that the 29 keV γ -ray is also converted in Pt. For reasons to be given later we fix the order of the three γ -rays as shown in Fig. 7.

From the coincidence rate on the 97 keV conversion lines one concludes immediately that the 129 keV γ -ray is totally converted. (The 29 keV γ -ray contributes next to nothing to this coincidence rate because of the very low efficiency of the scintillation counter for its conversion electrons.)

The relative intensity of the 97 keV conversion electrons, compared to this of the 129 keV lines, could serve only as a rough lower limit to its conversion coefficient because of the uncertainties in the

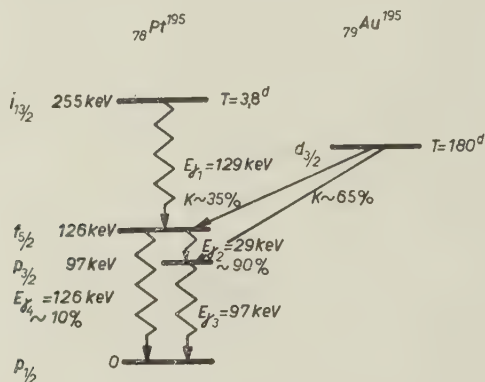


Fig. 7.

Decay scheme of $\text{Au}^{195} - \text{Pt}^{195}$.

absorption in the sample. We can therefore get a better value from the intensity of its photo-electrons as compared to the intensity of the X-rays photo-electrons (Fig. 6). For this we only need the relative efficiency of our radiator for L photo-electrons of the Pt X-rays and the 97 keV γ -ray. The L photo-electrons efficiency for Hg X-rays, 157 keV and 208 keV γ -rays could be easily determined from the photo-electron measurements in Au^{199} (Fig. 3), and from this we determined, by interpolation, our data. The resulting value for κ^{97} is:

$$\kappa^{97} = 0,90 \pm 0,05. \quad (13)$$

To determine the true K/L ratio of the 97 keV conversion electrons we proceed in the following way: assuming $\kappa^{129} = 1$ we see from Table IV that $\kappa_L^{97} = 0,12$; combined with equation (13), we get:

$$(K/L)_{97} = 5,7. \quad (14)$$

Concerning the 29 keV γ -ray one can say that $\kappa_L^{29} \geq \kappa_K^{97}$, since the absorption of the 29 L line is bigger than that of the 97 K , and the experimental peaks are roughly equal (Fig. 5). Thus:

$$\kappa_L^{29} \geq 0.75. \quad (15)$$

It is difficult to draw any quantitative results from the measurements of the coincidence rates for each of the lines. Most of the conversion lines with which we have to do in this case are of such a low energy that they fall on the steep part of the efficiency curve of the crystal. Thus relatively small variations in the energy due to scattering of the electrons in the sample and in the backing affect strongly the efficiency, which cannot therefore be controlled.

The most outstanding feature of these coincidence measurements is the big difference in β between the K conversion line of the 129 keV γ -ray and its L and M conversion lines. This was checked in a number of samples, and always gave the same result. A satisfactory explanation for it, which will be much supported later, is the existence of another γ -ray, of energy nearly equal to 129 keV, with a higher coincidence rate and bigger K/L ratio than those of the 129 keV γ -ray. One notices immediately that the cross-over transition $29 + 97$ could fulfill these requirements if it were of low enough intensity to "hide" itself in the tails of the 129 keV conversion lines, and if it had a big enough K/L ratio. Its high coincidence rate will be explained by its being in cascade with the 129 keV γ -ray.

As the number of transitions via a 126 keV γ -ray (the cross-over transitions) is at any rate small, the 129 keV γ -ray is effectively in coincidence only with the 97 keV γ -ray in our coincidence arrangement (since the 29 keV conversion lines have zero efficiency at the crystal). Similarly the 97 keV γ -ray is effectively in coincidence only with the 129 keV γ -ray, whereas the 29 keV γ -ray is effectively in coincidence with both the 97 keV and the 129 keV γ -rays. Thus we should have:

$$\beta_{29} \sim \beta_{97} + \beta_{129}. \quad (16)$$

Inspection of Table IV shows that this is very nicely fulfilled if we take for β_{129} the value measured on the 129 L or 129 M lines, giving one further support to our decay scheme.

B. The Pt d-x. n products.

Pt was irradiated with deuterons in the cyclotron of the Instituut voor Kernfysisch Onderzoek in Amsterdam*). The Au fraction was separated electrolytically; it showed the known half-lives of: 39^h (Au 194), 180^d (Au 195), $5,6^d$ (Au 196), and $3,2^d$ (Au 199)¹³. In the Pt fraction the $3,8^d$ activity was found, and its spectrum agreed in all details with the $3,8^d$ activity from the neutron-irradiated Pt. No activity of intensity comparable to the $3,8^d$ one and with a longer half life was found in the Pt fraction.

§ 3. *Au¹⁹⁵; experimental results.*

The electron spectrum of the long lived Au¹⁹⁵ is shown in Fig. 8, along with its coincidence spectrum. Although the decay of each line was not followed long enough to find small differences in their half-lives, it is believed they all have the same period since their ratios did not show any systematic increase or decrease. The interpretation of the spectrum is given in Table V together with the coincidence rate on some of the lines.

Table V.

Energy of conv. line in keV	Interpretation	Relat. inten.	Coinc. rate
8	<i>L</i> Auger		3,0%
10			
12			
15	29 <i>L</i>	9,0	2,9%
18,5	97 <i>K</i>	29,2	1,0%
24	29 <i>M</i>	3,1	2,5%
26,5	29 <i>N</i>	0,9	2,4%
49	126 <i>K</i> + <i>KLL</i> Auger		
51	<i>K</i> Auger		
59			
62			
83	97 <i>L</i>	9,2	0,6%
93	97 <i>M</i> + <i>N</i>	2,4	0,4%
113	126 <i>L</i>	0,55	0,4%
124	126 <i>M</i>	0,2	

*) We are deeply indebted to Prof. BAKKER for carrying out this irradiation in his institute.

The interpretation of the Auger lines as such is based on energy considerations as well as on the fact that they were the only ones to follow a "compound" half-life composed of all the initial half-lives present in the Au fraction.

Discussion of experimental results; decay scheme.

The most striking feature of these measurements is the reappearance of the 29 keV and 97 keV γ -rays previously found in the neutron-irradiated Pt. Unfortunately the Pt sample was much thicker than this carrier free Au sample, so that no comparison of the K/L ratios can be done. However, the facts that the $(L/M)_{97}$ ratio is the same in both cases and that the γ -rays agree so well in energy favour very much their being the same lines.

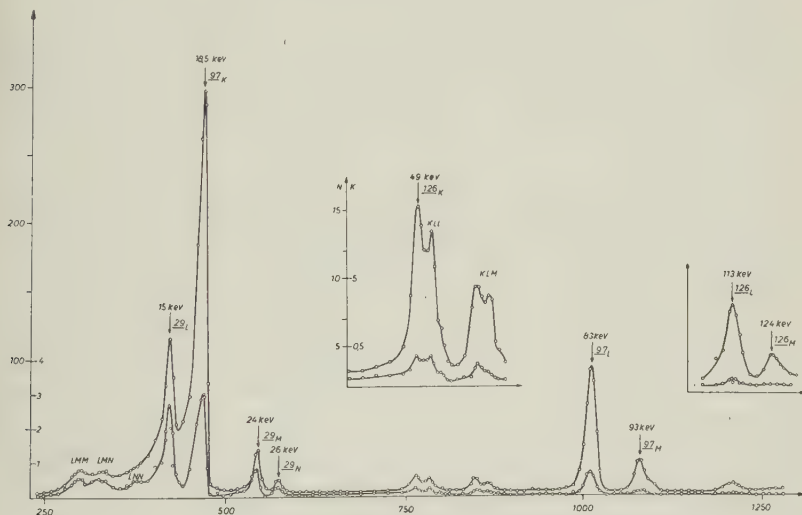


Fig. 8.

Electron spectrum of Au^{195} .

Upper curve—single counts; lower curve—coincidences.

Thus we justify, *a posteriori*, the assignment of mass number 195 to the $3,8^d$ isomeric state in Pt.

We further notice that although the Au sample is thinner than the Pt one, the 29 keV γ -ray is more intense in the second one. As the lines in the Au sample are formed through a K capture, this is only possible if the 29 keV γ -ray is above the 97 keV one.

A γ -ray of 126 keV and low intensity is seen to exist in the Au sample (Fig. 8). It was of great importance to clarify whether this

is the same one as the 129 keV γ -ray found in the Pt sample or not. If it were the same, then from intensity considerations one would conclude that the 129 keV γ -ray is above the others, and is thus responsible for the existence of the isomeric state in Pt. This would mean that the 129 keV γ -ray probably starts from a level of a high spin. As it is very improbable that a single level in Au will decay by K -capture to three levels in Pt which differ much in their spins, the identity of the "126" keV γ -ray and that of the 129 keV would imply the existence of an isomeric state in Au^{195} which decays to the isomeric state in Pt^{195} with roughly the same half-life of 180^d.

To clear this point it was not enough to measure the energies of the conversion lines, because the K conversion line of the 126 keV γ -ray overlaps partially the KLL Auger lines and the exact position of the maximum is not to be determined with the resolving power at our disposal. For the same reason it is impossible to draw any conclusions from the K/L ratio. The position of the L conversion lines will not settle the problem either, as variations in the relative intensity of the L_I , L_{II} , and L_{III} conversions may account for the coincidence of the "L" conversion lines of two slightly different γ -rays.

However, if the two lines are the same then the coincidence rates on both of them should be equal as can be seen by very simple considerations. Anyhow, any deviations from equality, caused by absorption in the sample and other by-effects, could only be in such a direction as to reduce the coincidence rate in our Pt sample. Comparison of Tables IV and V proves definitely that these two lines are different. The most natural assumption will now be that the 126 keV γ -ray is the cross-over transition (29 + 97), which is thus fed from the same level in Au as are the 29 keV and 97 keV γ -rays, and whose existence is also needed to explain the different coincidence rates on the 129 K and 129 L lines in the Pt sample. The decay scheme of Au^{195} would thus be as shown in Fig. 7.

A further check on this decay scheme is provided by considering the coincidence rates on the different lines; one should only remember in this connection that every line which is in coincidence with K Auger electrons (as is the case for all K conversion lines and for every conversion line which follows a K -capture) has, in Pt, a coincidence rate of 0.4% (see the discussion following Formula 7). We then see that the coincidence rates on the 126 keV conversion lines, as well as on those of the 97 keV γ -ray can be attributed to this effect. (The 97 K line is twice in coincidence with K Auger electrons: with those arising from the K -capture and with those

resulting from the filling of the holes in the K shell produced by the K conversion.) The additional coincidence rate on the 29 keV conversion lines arises from coincidences with the 97 keV conversion electrons; this rate fits with the coincidence rate on the 129 keV conversion lines in the $3,8^d$ Pt¹⁹⁵, which are also in coincidence with the same 97 keV γ -ray.

Using previously determined absorption curves of the counter foils we used¹²), and neglecting the absorption in the carrier free Au sample, we get, using the data of Table V:

$$(K/L)_{97} = 5,8 \pm 0,3 \quad (L/M)_{29} = 4,6 \pm 0,4 \quad (17)$$

in good agreement with (14) obtained in the Pt sample.

Using the values $\alpha^{97} = 0,9$, $\alpha_L^{29} = 0,76$ we get that 35% of the K -captures go to the 126 keV level and 65% go to the 97 keV level.

The total conversion coefficient of the 126 keV γ -ray could not be determined, but if one takes α_K from the tables of ROSE et al.¹⁸), together with the K/L ratios from the experimental graphs for this ratio¹⁹), one finds that its conversion is not less than about 70% (for E 2; E 1 is very improbable), and thus that no more than 10% of the decays from the 126 keV level in Pt¹⁹⁵ are going via the cross-over transition.

Table VI summarizes the results obtained for the different γ -rays appearing in the decay of Au¹⁹⁵-Pt¹⁹⁵.

Table VI.

γ	α				α				K/L
	K	L	M	Tot	K	L	M	Tot	
29		$\geq 0,75$	$\geq 0,13$	$\geq 0,88$		$\geq 6,0$	$\geq 1,3$	$\geq 7,3$	
97	0,74	0,13	0,03	0,90	7,4	1,3	0,3	9,0	5,8
126									$< 1,8$
129	0,15	0,58	0,27	1	very big				0,26

CHAPTER II

Spin assignments.§ 1. *Theoretical predictions.*

We shall now try to assign the spins and parities to the different states of the nuclei considered in the previous chapter as well as of other ones, and see to what extent can the shell-model be applied to these states and whether the rule referred to at the introduction holds or not. That is: we shall try to see whether successive odd nuclei which have their odd particle in the same sub-shell have or have not similar decay-schemes.

Let $E(j)$ be the energy of one nucleon in the state j , and let $E^*(j)$ be the energy of a pair of equivalent nucleons in the state j . That is:

$$E^*(j) = 2 E(j) - P(j) \quad (1)$$

where $P(j)$ is the pairing energy in the state j .

For the sake of simplicity we shall talk of the "multiplet" of all the terms arising from a certain configuration of nucleons coupled according to the j - j coupling scheme. This should not be confused with the spin multiplets in the L - S coupling scheme. The "ground state" of a certain configuration would be the lowest term in its multiplet. We shall measure all energies from the bottom of the potential well, so that all energies are positive, and a bigger energy means a less bound state.

Let us consider two states — j_1 and j_2 — of which the first is the lower; that is:

$$E(j_1) < E(j_2). \quad (2)$$

Let us further assume that j_1 is also a lower state for pairs of nucleons, i.e.:

$$E^*(j_1) < E^*(j_2). \quad (3)$$

In spite of these relations it is sometimes possible that the ground state of the configuration $j_1^{n-1} j_2^2$ will be lower than any other configuration of $n+1$ nucleons, especially the configuration $j_1^n j_2^1$, if n is the number of particles in the closed shell j_1 ($n = 2 j_1 + 1$).

To see what are the conditions for such a situation to be realized we note that the energy of the configuration $j_1^{n-1} j_2^2$ is:

$$E(n-1, 2) = (n-2)/2 E^*(j_1) + E(j_1) + E^*(j_2), \quad (4)$$

and similarly:

$$E(n, 1) = (n/2) E^*(j_1) + E(j_2) \quad (5)$$

so that:

$$E(n-1, 2) - E(n, 1) = [E^*(j_2) - E^*(j_1)] - [E(j_2) - E(j_1)]. \quad (6)$$

Therefore: the ground state of the configuration $j_1^{n-1} j_2^2$ will be lower than the ground state of any other configuration provided the following inequality holds:

$$[E^*(j_2) - E^*(j_1)] < [E(j_2) - E(j_1)] \quad (7)$$

and provided $n = 2j_1 + 1$ (otherwise j_1^{n+1} is lower). From (1) and (2) we now get that a necessary condition for the existence of (7) is:

$$P(j_2) - P(j_1) > E(j_2) - E(j_1) > 0. \quad (8)$$

It will be recalled that in Mayer's model⁸⁾ the pairing energy of nucleons in some states is assumed to bring these "paired" states so much lower that $[E^*(j_2) - E^*(j_1)] < 0$. This is easily seen to be an extreme case of our considerations.

For the sake of brevity we should like to call the above effect as that of "delayed closing" of sub-shells.

Pt¹⁹⁵, Hg¹⁹⁷, and Hg¹⁹⁹ are all odd-neutron nuclei which have their odd neutron in the (82—126) shell. The shell model predicts for neutrons in this shell the following states:

$$h_{9/2}, f_{7/2}, p_{3/2}, p_{1/2}, f_{5/2}, i_{13/2}.$$

The energy of the states probably increases in this order. As the pairing energy is bigger for states of higher spin, we could expect a delayed closing of sub-shells only when the higher sub-shell has a higher spin too. Thus in the (82—126) neutron shell, the $p_{1/2}$ could remain unfilled while the upper sub-shells $f_{5/2}$ and $i_{13/2}$ are being filled.

Table VII contains the occupation numbers of the different levels for an odd nucleus which has 117 neutrons (such as Pt¹⁹⁵), as would be predicted by the shell model for the first few excited configura-

Table VII.

Config.	$k_{9/2}$	$f_{7/2}$	$p_{3/2}$	$p_{1/2}$	$f_{5/2}$	$i_{13/2}$	Energy difference
G	10	8	4	1	6	6	0
A	10	8	4	0	6	7	$E(13/2) - E(1/2)$
B	10	8	4	2	5	6	$[E^*(1/2) - E^*(5/2)] - [E(1/2) - E(5/2)]$
C	10	8	3	2	6	6	$[E^*(1/2) - E^*(3/2)] - [E(1/2) - E(3/2)]$
D	10	8	4	2	6	5	$[E^*(1/2) - E^*(13/2)] - [E(1/2) - E(13/2)]$
E	10	8	4	2	3	8	$[E^*(1/2) - E(1/2)] - [E^*(5/2) - E(5/2)]$ + $[E^*(13/2) - E^*(5/2)]$

Table VIII.

Element	Energy of γ -ray	Exp. α_K	Calculated α_K								Exp. K/L	Expected K/L								Ref.
			E1	E2	E3	E4	M1	M2	M3	M4		E1	E2	E3	E4	M1	M2	M3	M4	
Pt ¹⁹⁵	129	big				2,8	3,6	17,5	73	200	0,26									
Pt ¹⁹⁵	97	7,4+8,2 -2,8		0,95	1,7	3,9	7,6	38	>160		5,8		<0,2			7,4	3,9			
Hg ¹⁹⁷	164	>4,6				1,8			27	86	0,45		0,42							
Hg ¹⁹⁷	133	0,5	0,17	0,47	0,97		3,4				0,42		0,41	0,17						10)
Hg ¹⁹⁹	157	0,33	0,12	0,32	0,67		2,3				0,67		0,40							10)
Hg ¹⁹⁹	208	0,98		0,16	0,32		0,94	8,0			5,65		1,0			7,8	6,0	2,4		
Hg ¹⁹⁹	368	>6,8				0,29				4,4	1,6		2,45	1,63	0,56			4,4	1,62	13)

tions, together with the energy difference between the lowest state of each configuration and the ground state G .

With the assumption of the single particle model the ground states of the configurations G, A, B, C, D, E are respectively: $p_{1/2}$, $i_{13/2}$, $f_{5/2}$, $p_{3/2}$, $i_{13/2}$, and $f_{5/2}$, and thus these should be the first few excited states in nuclei having 117 neutrons. It is easily seen that the same excited states should also occur in nuclei having any

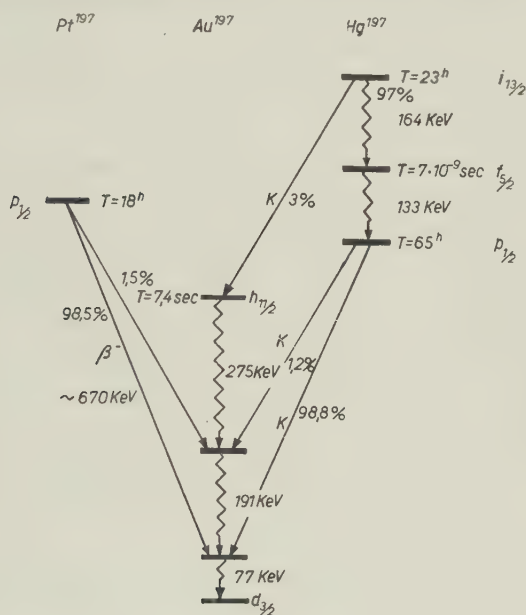


Fig. 9.
Decay scheme of Hg^{197} .

number of odd neutrons between 111 and 125, except the states A and D which do not appear at $N = 125$ and $N = 111$ respectively. States like E have little chances to be excited in usual cases since a transition to them usually involves a double nucleon transition and this is forbidden in a strict single particle model. Usually they are quite high too.

§ 2. Comparison with experiment.

Table VIII gives the experimental conversion coefficients and K/L ratios of some transitions in Pt and Hg, together with the calculated¹⁸⁾ values of α_K and the expected K/L ratios¹⁹⁾ for different multipole orders. For energies lower than 150 keV the values of α_K

were obtained by extrapolation. The expected K/L ratios were obtained by interpolation from the experimental graphs of K/L vs. Z^2/E ; they are intended to give a rough estimate rather than an accurate value of the K/L ratio.

Pt¹⁹⁵.

The spin of Pt¹⁹⁵ in the ground state is measured to be 1/2, and the magnetic moment suggests it is a $p_{1/2}$ state. The α_K of the 97 keV γ -ray could not be measured accurately because of its high value, but even with the relatively big error one sees from Table VIII that it could fit either with an E 4 or an M 1. However, the high K/L ratio of the 97 keV γ -ray and its short half-life ($< 10^{-6}$ sec as can be ascertained from our coincidence measurements) favour the M1 assignment rather than the E 4. Taking into account the spin of the ground state this shows that the 97 keV level is $p_{3/2}$.

The ground state of Au¹⁹⁵ is probably $d_{3/2}$ (as are the ground states of Ir¹⁹³ and Au¹⁹⁷, where both the spins and the magnetic moments are known). As the two K -captures from this state do not differ much in energy (29 keV) and are of the same order of intensity, we conclude that the 126 keV level could be $p_{1/2}$, $p_{3/2}$ or $f_{5/2}$ (opposite parity to that of $d_{3/2}$ and with $\Delta I = 0$ or 1). If it were $p_{1/2}$ or $p_{3/2}$ the 29 keV γ -ray and the 126 keV would both be M 1. This would not fit the experimental results which show that the 126 keV transition is less probable than the 29 keV one. We therefore conclude that the level at 126 keV is $f_{5/2}$.

As for the isomeric transition, its high conversion suggests it is a magnetic multipole, and its K/L ratio fixes it as an M 4. Thus the level at 255 keV is $i_{13/2}$.

Hg¹⁹⁷.

The spin of the ground state is probably 1/2 and the state is a $p_{1/2}$ (the same as in Hg¹⁹⁹). The 133 keV transition fits very well with an E 2 (Table VIII) and fixes the intermediate state as $f_{5/2}$. The half-life of the intermediate state also fits with the assignment of this multipole order for the 133 keV γ -ray¹⁰). The isomeric transition fits nicely the predicted values for α_K and K/L ratio of an M 4 transition. Thus the highest level is $i_{13/2}$.

A further evidence for the assignment of the spin 5/2 to the intermediate state is the $(e^- - e^-)$ -angular correlation²⁰), which was shown to contain a $\cos^4 \vartheta$ term, thus proving that the intermediate state has a spin of at least 5/2 units.

Hg¹⁹⁹.

The measured spin and magnetic moments of the ground state suggest it is a $p_{1/2}$ one. The 157 keV γ -ray fits best with an E 2 transition, thus fixing the 157 keV level as $f_{5/2}$. The branching of the level at 208 keV suggests that the 51 keV γ -ray and the 208 keV one are of the same multipole order. The conversion of the 208 keV γ -ray fixes it as an M 1 transition, thus suggesting that the level at 208 keV is $p_{3/2}$. The isomeric transition is again M 4, and the isomeric state — $i_{13/2}$. The absence of angular correlation between the β -spectrum from Au¹⁹⁹ and any of the following γ -rays supports this spin assignment for the different levels in Hg¹⁹⁹.

§ 3. Conclusion.

It is seen that all the single particle states predicted by the shell model appear in these nuclei and no other levels are found. (The $p_{3/2}$ is not found experimentally in Hg¹⁹⁷; this could be wholly attributed to the mode of exciting the levels in this nucleus. If the $p_{3/2}$ state is above the $f_{5/2}$ or below and very near to it one cannot expect its being excited via a transition from the isomeric state or from the $f_{5/2}$ state. This is clearly seen in Hg¹⁹⁹.)

The relative positions of the different levels change continuously by adding two protons or two neutrons: the energy of the isomeric transition increases with a resulting decrease in the half-life. The energy of the E 2 transition which follows the isomeric state increases too with A , though less rapidly. The $p_{3/2}$ level moves upwards in relation to the $f_{5/2}$ level as one adds pairs of protons or neutrons.

It is perhaps instructive to compare this behavior of the energy levels with the behavior of the corresponding levels at the end of the (50—82) shell as exhibited by different isotopes of Te, Xe, and Ba. There, too, the isomeric transition ($h_{11/2} - d_{3/2}$) increases in energy as one adds pairs of equivalent nucleons, and in the same time the $s_{1/2}$ level moves upwards in relation to the $d_{3/2}$ one, and indeed crosses it, very much the same as the $p_{3/2}$ crosses the $f_{5/2}$ level in the (82—126) shell.

It is hoped that further study of other odd A isotopes of Hg, Pt, Os, etc. will show whether the excellent accord of the hitherto measured isotopes with the single particle model is accidental or real.

We wish to thank Prof. P. SCHERRER for his kind interest in this work and Dr. IGAL TALMI for many helpful discussions.

References.

- ¹⁾ W. ELSASSER, J. de phys. et rad. **5**, 625 (1934).
 - ²⁾ M. G. MAYER, Phys. Rev. **74**, 235 (1948).
 - ³⁾ H. E. SUESS, Phys. Rev. **81**, 1071 (1951).
 - ⁴⁾ HAXEL, JENSEN, and SUESS, Phys. Rev. **75**, 1766 (1949).
 - ⁵⁾ E. FEENBERG and K. C. HAMMACK, Phys. Rev. **75**, 1877 (1949).
 - ⁶⁾ L. W. NORDHEIM, Phys. Rev. **75**, 1894 (1949).
 - ⁷⁾ M. G. MAYER, Phys. Rev. **75**, 1969 (1949).
 - ⁸⁾ M. G. MAYER, Phys. Rev. **78**, 16 (1950).
 - ⁹⁾ A. DE-SHALIT, to be published.
 - ¹⁰⁾ O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER, A. DE-SHALIT, and W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **24**, 127 (1951).
 - ¹¹⁾ O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER and A. DE-SHALIT, Helv. Phys. Acta **25**, 3 (1952).
 - ¹²⁾ H. SCHNEIDER, O. HUBER, and A. DE-SHALIT, Helv. Phys. Acta **25**, 259 (1952).
 - ¹³⁾ K. WAY, L. FANO, M. SCOTT, and K. THEW, Nuclear Data, Circular of the N.B.S. No. 499.
 - ¹⁴⁾ We are indebted to Mr. H. HUBER for performing this experiment.
 - ¹⁵⁾ R. D. HILL, Phys. Rev. **79**, 413 (1950); P. M. SHERK and R. D. HILL, Phys. Rev. **83**, 1097 (1951).
 - ¹⁶⁾ O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER, and W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **23**, 855 (1950).
 - ¹⁷⁾ H. S. W. MASSEY and E. H. S. BURHOP, Proc. Roy. Soc., A, **153**, 661 (1936).
 - ¹⁸⁾ ROSE, SPINARD, GOERTZEL, HAAR, and STRONG (privately circulated report).
 - ¹⁹⁾ M. GOLDBABER and A. W. SUNYAR, Phys. Rev.
 - ²⁰⁾ H. FRAUENFELDER, M. WALTER, and W. ZÜNTI, Phys. Rev. **77**, 557 (1950).
-

Remarks Concerning a Paper by Wilker¹⁾

by Richard W. Iskraut

University of Maryland, College Park, Maryland, U.S.A.

(20. XII. 1951.)

WILKER states that, $W(1)^2$,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + [r, H] \quad (1)$$

is invariant with respect to a homogeneous canonical transformation only for the trivial case of a free particle.

WILKER deduces this result by using the homogeneous canonical formalism, $W(2)$, $W(3)$,

$$q'_i = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_i}, \quad P'_i = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_i}; \quad \mathfrak{H}(q_i, p_i) = 0 \quad (2)$$

$$[i = 1, \dots, f+1]$$

$$r' = \{r, \mathfrak{H}\} \quad (3)$$

$$\mathfrak{H} \equiv t'(\tau)(H + p_t) \quad (4)$$

WILKER shows, $W(4)$, that, if $r = r(q_i, t, p_i, p_t)$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + [r, H] - \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial p_t} \quad (5)$$

WILKER now concludes that (1) follows from (5) only if $\partial H/\partial t = 0$.

Now (1) is usually understood to apply in the formalism that can be LORENTZ invariant, but that is not LORENTZ invariant in appearance. In this formalism r is expressed as a function of q_i, p_i, t . If r is a function of H as well (or any other quantity, e.g. angular momentum),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + [r, H] + \frac{\partial r}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6)$$

where $dH/dt = \partial H/\partial t$.

(6) is equivalent to WILKER's $W(4)$, (5) above, because $\mathfrak{H} = 0$, and $p_t = -H$. However, the third term on the right side of (6) will

¹⁾ P. WILKER, Helv. Phys. Acta, 319, 24, 1951.

²⁾ $W(1)$ etc. refers to WILKER's paper.

not appear if H is expressed as a function of q_i, p_i, t . (6) therefore reduces to (1) by arranging that $\partial r / \partial H = 0$, and not by using WILKER's stronger condition $\partial H / \partial t = 0$.

If $r = r(q_i, p_i, t)$ in one inertial system, and we carry out a LORENTZ transformation, the Hamiltonian will appear in the function. For a scalar r

$$r(q_i, p_i, t) = \bar{r}(\bar{q}_i, \bar{p}_i, \bar{H}, \bar{t}) \quad (7)$$

where the bar quantities refer to the new inertial system. \bar{H} , however, can be expressed as a function of $\bar{q}_i, \bar{p}_i, \bar{t}$, and, if we substitute H expressed as a function of $\bar{q}_i, \bar{p}_i, \bar{t}$ in \bar{r} , the expression (1) will also hold in the new inertial system, because $\partial \bar{r} / \partial \bar{H} = 0$.

It may also be remarked here that the homogeneous canonical formalism can be developed very simply by relating the formulation that is non-covariant in appearance

$$\delta \int L\left(x_i, \frac{dx_i}{dt}, t\right) dt = 0$$

with the covariant formulation

$$\delta \int \mathfrak{L}\left(x_\mu, \frac{dx_\mu}{d\tau}\right) d\tau = 0$$

in the following way:

$$L\left(x_i, \frac{dx_i}{dt}, t\right) dt = \mathfrak{L}\left(x_\mu, \frac{dx_\mu}{d\tau}\right) d\tau. \quad (8)$$

Höhere mesontheoretische Näherungen zum magnetischen Moment des Protons

von A. Thellung, ETH. Zürich / T.H. Delft (Holland).

(22. I. 1952.)

Summary: The fourth order corrections to the magnetic moment of the proton, due to the coupling with a neutral pseudoscalar meson field, are calculated within the framework of Dyson's radiation theory, a slightly different method of self-energy subtraction being used. The integrations over the Feynman parameters are carried out only in the approximation $\delta^2 = (\mu/M)^2 = 0$. The results are unable to compensate the wrong second order contributions. Some questions concerning the renormalization of the coupling constant are discussed in detail and it is shown that, to a certain extent, the definition of what has to be interpreted as renormalization terms is arbitrary, without modifying the quantitative predictions of a theory.

§ 1. Einleitung.

In den letzten Jahren wurde, vor allem durch Arbeiten von TOMONAGA¹⁾, SCHWINGER²⁾, DYSON³⁾ und FEYNMAN⁴⁾, eine relativistisch invariante Form der Quantenelektrodynamik entwickelt, die dank der Einführung des Begriffes der Massen- und Ladungsrenormalisation imstande ist, die Divergenzschwierigkeiten zu umgehen und für die beobachtbaren Effekte endliche Resultate zu liefern. Nachdem diese Theorie für gewisse Phänomene glänzende Übereinstimmung mit dem Experiment ergeben hatte⁵⁾, war es naheliegend, ähnliche Rechnungen mit den Mesontheorien zu versuchen. Wie man die kleine Abweichung des magnetischen Momentes des Elektrons vom Wert, den man auf Grund der Diracschen Theorie erwarten würde, durch den Einfluss des Strahlungsfeldes erklären konnte (vgl. S III), so hoffte man insbesondere auch, die relativ grossen anomalen magnetischen Momente von Proton und Neutron durch ihre Kopplung an Mesonfelder in richtiger Grösse zu erhalten. Im Sinne einer Störungsrechnung, die als ein wesentlicher Zug allen bisherigen Theorien anhaftet, wurden die Beiträge verschiedener Mesonfelder zu den magnetischen Momenten der Nukleonen in 2. Ordnung in der Kopplungskonstanten durch viele Autoren berechnet⁶⁾. Die Resultate zeigten, bei aus der Theorie der Kernkräfte in 2. Ordnung entnom-

menen Werten der Kopplungskonstanten, wenig Ähnlichkeit mit dem Experiment, und auch das von der Kopplungskonstanten unabhängige Verhältnis der magnetischen Momente von Neutron und Proton wurde von keiner Mesontheorie richtig wiedergegeben. Der naheliegendste Grund für dieses Versagen war in der Anwendung der Störungsrechnung zu suchen, da man es hier, im Gegensatz zur Elektrodynamik, mit einer starken Kopplung zu tun hat. Wenn überhaupt die Störungstheorie zulässig war, so stand auf jeden Fall zu erwarten, dass die folgende Näherung einen Beitrag von ähnlicher Grössenordnung liefern würde.

Das Fehlen einer Theorie, die ohne Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten auskommt, liess es deshalb als wünschenswert erscheinen, die Berechnung der anomalen magnetischen Momente in der 4. Ordnung zu versuchen. Dabei sollte sich erstens zeigen, ob sich auch in dieser Näherung alle Divergenzen als Renormalisationen deuten liessen. War dies der Fall, so war die zweite Frage, ob die Resultate imstande waren, die falschen Aussagen der 2. Ordnung zu verbessern. In der vorliegenden Arbeit wurde als Modell die pseudoskalare Mesontheorie mit pseudoskalarer Kopplung gewählt, da diese Theorie am besten geeignet erscheint, die für die Nukleoneigenschaften verantwortlichen Mesonen zu beschreiben. Da die Rechnungen ausserordentlich umfangreich werden, mussten wir uns auf ein neutrales Mesonfeld beschränken, so dass wir bloss für das Proton ein magnetisches Moment erhalten.

Während sich die ursprüngliche Schwingersche Methode (vgl. S III) für praktische Rechnungen in 4. Ordnung sehr kompliziert gestaltet, eignet sich der Feynman-Dysonsche Formalismus^{3) 4)} besser. Er wurde von KARPLUS und KROLL⁷⁾ zur Berechnung des anomalen magnetischen Momentes des Elektrons in 4. Ordnung benützt und wird im wesentlichen auch in der vorliegenden Arbeit verwendet. Eine Methode von GÉHÉNIAT und VILLARS⁸⁾, die speziell für den Fall konstanter äusserer elektromagnetischer Felder entwickelt wurde, würde sich ebenfalls gut eignen, vielleicht auch eine Methode von KÄLLÉN⁹⁾, bei der man direkt in der Heisenbergdarstellung arbeitet. Diese letzte Methode wurde kürzlich von HEBER⁶⁾ zur Berechnung der magnetischen Momente in 2. Ordnung verwendet.

Was die Frage der Divergenzen betrifft, so wird sich im Laufe der Rechnung zeigen, dass sich durch die Renormalisation von Proton- und Mesonmasse sowie der elektrischen Ladung und der Mesonkopplungskonstanten tatsächlich alle Unendlichkeiten in konsi-

stenter Weise (d. h. mit den gleichen Renormalisationen wie in anderen Problemen) beseitigen lassen. Inzwischen hat MATTHEWS¹⁰⁾ zeigen können, welche Meson-Nukleon-Wechselwirkungen mit Hilfe der Renormalisationsmethode in allen Näherungen zu eindeutigen und konvergenten Resultaten führen und welche es nicht tun. Die hier verwendete Wechselwirkung zwischen Proton- und Mesonfeld gehört zur ersten Sorte. Daran ändert sich nichts, wenn ein äusseres elektromagnetisches Feld hinzukommt.

Wegen des Umfanges der Rechnungen kann nur ein kleiner Teil der Arbeit dargestellt werden. In erster Linie sollen die Unterschiede und Besonderheiten gegenüber dem analogen Problem in der Elektrodynamik⁷⁾ diskutiert werden. In § 2 wird die Methode zur Aufstellung des effektiven Energieoperators skizziert und die hier verwendete Methode der Massenrenormalisation erläutert. § 3 handelt von der Regularisierung der divergenten Ausdrücke. § 4 ist den Effekten 2. Ordnung gewidmet, und die Methode zur Ausführung der Impulsraumintegrationen wird am Beispiel der Ladungsrenormalisation illustriert. In § 5 werden Probleme, die bei der Renormalisierung der Kopplungskonstanten auftreten, behandelt. In § 6 wird das magnetische Moment 4. Ordnung berechnet. Die Resultate werden diskutiert und mit einer kürzlich bekanntgewordenen japanischen Arbeit über dasselbe Problem¹¹⁾, in der auch geladene Mesonfelder verwendet werden, verglichen.

§ 2. Zur Methode. Massenrenormalisation.

Wir verwenden durchgehend natürliche Einheiten ($\hbar = c = 1$). Der differentielle Hamiltonoperator in der Wechselwirkungsdarstellung lautet für unser Problem

$$H(x) = H^e(x) + H^I(x), \quad (1)$$

$$H^e(x) = -ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x), \quad (2)$$

$$H^I(x) = if\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\Phi(x) - E_P^S(x) - E_M^S(x). \quad (3)$$

Hier bedeutet A_μ das Viererpotential des äusseren elektromagnetischen Feldes (c -Zahl), Φ ist der Operator des (quantisierten) pseudoskalaren neutralen Mesonfeldes, während die Protonen durch das (quantisierte) Spinorfeld ψ , $\bar{\psi} = \psi^*\gamma_4$ beschrieben werden. γ_μ sind die Diracschen Matrizen, $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. e bedeutet die elektrische Ladung des Protons, f die Kopplungskonstante für die

Wechselwirkung zwischen Proton- und Mesonfeld. ψ , $\bar{\psi}$ und Φ erfüllen die Gleichungen der ungekoppelten Felder,

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right) \psi = 0, \quad \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - \bar{\psi} M\right) = 0, \quad (4)$$

$$(\square - \mu^2) \Phi = 0, \quad (5)$$

und die entsprechenden invarianten Vertauschungsrelationen

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x-x'), \quad (6)$$

$$[\Phi(x), \Phi(x')] = i D(x-x'), \quad (7)$$

wo

$$\{A, B\} \equiv AB + BA, \quad [A, B] \equiv AB - BA. \quad (8)$$

S in (6) ist identisch mit der Schwingerschen S -Funktion (vgl. S II), wenn man dort die Elektronenmasse durch die Protonmasse M ersetzt. D in (7) ist gleich definiert wie das Schwingersche Δ , wenn man die Elektronenmasse dort durch die Mesonenmasse μ ersetzt.

In (4) und (5) sowie in S und D von (6) und (7) bedeuten $M = M_0 + \delta M$ bzw. $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ die „physikalischen“ (renormalisierten) Massen von Proton bzw. Meson. (M_0 , μ_0 bezeichnen die „mathematischen“ Massen der Teilchen, wie sie ursprünglich in der Hamiltonfunktion der ungekoppelten Felder standen. δM und $\delta\mu$ sind die Änderungen dieser Massen, die durch die Wechselwirkung zwischen den beiden Feldern hervorgerufen werden.) Dagegen sind e und f die „mathematischen“ Kopplungskonstanten; für sie haben wir Renormalisationen zu erwarten. Da in besagter Weise die Selbstenergien in die Hamiltonfunktion der ungekoppelten Felder aufgenommen sind, müssen sie in der Hamiltonfunktion der Wechselwirkung wieder subtrahiert werden. Dem wird durch den Term $-E_P^S - E_M^S$ in (3) Rechnung getragen*).

E_P^S und E_M^S sind so definiert, dass die Einteilchenterme (1 Proton- oder 1 Meson-Terme) der S -Matrix ohne äusseres Feld**)

$$\langle S(\infty) \rangle_{1P, 0M} = \langle S(\infty) \rangle_{0P, 1M} = 1. \quad (9)$$

Ausserdem sind die Vakuumerwartungswerte der Selbstenergien so definiert, dass auch der Vakuumerwartungswert der S -Matrix

$$\langle S(\infty) \rangle_{0P, 0M} = 1. \quad (10)$$

*) Nach MATTHEWS¹⁰⁾ müsste auch ein Term $\delta\lambda \Phi^4$ subtrahiert werden, um die Meson-Meson-Streuung endlich zu machen. Da er jedoch für das hier interessierende Problem keine Rolle spielt, lassen wir ihn weg.

**) $S(\infty)$ ist in DI , Gl. (32) gegeben, wobei nun unter $H I$ der Ausdruck (3) zu verstehen ist.

Aus (9) folgt direkt, bei Bildung der Einteilchenterme auf die in D I oder D II dargelegte Weise, dass die Selbstenergiedichten von Proton und Meson in 2. Ordnung in f — die Selbstenergien höherer Ordnung haben in unserer Näherung keinen Einfluss auf das anomale magnetische Moment — gegeben sind durch

$$E_P^S(x) = -\frac{1}{8} i f^2 \int d^4 x' \left[\bar{\psi}(x) M_c(x-x') \psi(x') + \bar{\psi}(x') M_c(x'-x) \psi(x) \right], \quad (11)$$

$$M_c(x-x') \equiv \gamma_5 S_c(x-x') \gamma_5 D_c(x-x'),$$

und

$$E_M^S(x) = -\frac{1}{8} i f^2 \int d^4 x' Sp[\gamma_5 S_c(x-x') \gamma_5 S_c(x'-x)] \Phi(x) \Phi(x'). \quad (12)$$

(Sp bedeutet Spurbildung bezüglich der γ -Matrizen.) Weiter enthalten die Selbstenergiedichten noch Vakuumterme, so dass

$$\langle E_P^S(x) + E_M^S(x) \rangle_{0P,0M} = -\frac{1}{16} i f^2 \int d^4 x' Sp[\gamma_5 S_c(x-x') \times \gamma_5 S_c(x'-x)] D_c(x-x'). \quad (13)$$

Dann ist auch (10) erfüllt.

In diesen Gleichungen bezeichnen S_c und D_c die „kausalen“ Funktionen

$$S_c(x) = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M'^2} e^{ipx}, \quad (14)$$

$$D_c(x) = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{k^2 + \mu'^2} e^{ikx}. \quad (15)$$

d^4x, d^4p, d^4k bedeuten die reellen vierdimensionalen Volumenelemente $dx_1 dx_2 dx_3 dx_0, \dots, \dots, px, kx, \gamma x, p^2, k^2$ stehen für die skalaren Produkte der Vierervektoren $p_\mu x_\mu = \vec{p} \vec{x} - p_0 x_0, \dots, \dots, k_\mu k_\mu = \vec{k}^2 - k_0^2$. $M'^2 = M^2 - i\epsilon$ soll angeben, dass man sich bei der Protonmasse einen infinitesimalen negativ-imaginären Zusatz zu denken hat, der bei der p_0 -Integration den Weg um die Pole $p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$ festlegt und den man nach der Integration nach Null gehen lässt. Analog bedeutet $\mu'^2 = \mu^2 - i\epsilon$.

Aus Gründen der relativistischen Invarianz ist direkt ersichtlich, dass die Ausdrücke (11), (12) von der Form sind

$$E_P^S = \delta M \bar{\psi} \psi, \quad E_M^S = \frac{1}{2} \delta \mu^2 \Phi^2. \quad (16)$$

δM und $\delta \mu^2$ divergieren jedoch.

Wir interessieren uns für den 1 Proton-0 Meson-Teil des in D I definierten effektiven Hamiltonoperators H_F

$$\langle H_F(x) \rangle_{1P, 0M} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4 x' \dots \int d^4 x^{(n)} \times \\ \times \langle P(H^e(x), H^I(x'), \dots, H^I(x^{(n)})) \rangle_{1P, 0M}. \quad (17)$$

Er stellt die Dichte der potentiellen Energie eines Protons im äusseren elektromagnetischen Feld in 1. Bornscher Näherung dar und ist mit dem analogen Energieoperator, den man nach der invarianten Störungsmethode von SCHWINGER erhielt, identisch (D I, Appendix). Das Ziel ist nun, (17) zu berechnen bis zur 4. Ordnung in f . Daraus lässt sich dann das magnetische Moment des Protons $\sim f^4$ ableiten.

Hierbei denken wir uns die Selbstenergiedichten E_P^S und E_M^S , die in (17) vermöge (3) vorkommen, nicht in der meist verwendeten Form (16), sondern in der Form (11) und (12) — mit Berücksichtigung von (13) — eingesetzt. Diese Art der Selbstenergiesubtraktion erwies sich in Arbeiten von JOST und LUTTINGER¹²⁾ und von SCHAFROTH¹³⁾ im Rahmen der Schwingerschen Theorie als nützlich. Sie lässt sich im Rahmen der Dysonschen Rechenmethoden ebenfalls durchführen. Sie ist zwar etwas weniger elegant als der übliche Dysonische Subtraktionsformalismus, hat aber den Vorteil, dass man in den Termen von (17), wo die abgeänderten $\bar{\psi}$ - und ψ -Operatoren (in D II mit $\bar{\psi}'$ und ψ' bezeichnet) auftreten, die Renormalisationen von e und f „von selbst“ richtig erhält, während die übliche Methode eine feinere Analyse gewisser unbestimmter Ausdrücke nötig macht. Wir werden dies am Schluss von § 4 noch näher erläutern.

Die Einführung der Ausdrücke (11), (12) in (17) hat zur Folge, dass in den P -Klammern neben den Variablen $x^{(i)}$, die für die chronologische Reihenfolge massgebend sind, noch andere Variablen $x^{(k)}$ vorkommen. Für diese Fälle müssen die Regeln zur Bildung der Einteilchenterme noch etwas verallgemeinert werden. Nehmen wir als einfaches Beispiel den Ausdruck

$$-i \int d^4 x' \langle P(H^e(x), -E_P^S(x')) \rangle_{1P}, \quad (18)$$

der im Term $n = 1$ von (17) enthalten ist. Einsetzen von (11) gibt

$$\frac{1}{8} f^2 \int d^4 x' \int d^4 x'' \langle P_{0(12)}(H^e(x), \bar{\psi}(x') M_c(x' - x'') \psi(x'')) + \\ + \bar{P}_{0(21)}(H^e(x), \bar{\psi}(x'') M_c(x'' - x') \psi(x')) \rangle_{1P}.$$

Wegen (2) erhält man also P -Klammern von der Form (Spinorindizes weggelassen)

$$P_{\underline{0}(\underline{12})}(\bar{\psi}(x) \psi(x), \bar{\psi}(x') \psi(x'')) \\ \text{und } P_{\underline{0}(\underline{21})}(\bar{\psi}(x) \psi(x), \bar{\psi}(x'') \psi(x')). \quad (19)$$

Die Indizes 0, 1, 2 am Operator der chronologischen Ordnung P beziehen sich auf die Variablen x, x', x'' . Unterstreichen von 0 und 1 soll andeuten, dass die Zeiten der Punkte x und x' für die Reihenfolge der Faktoren massgebend sind [wie es in (18) die Meinung war], während die runde Klammer um $\underline{1} \underline{2}$ bzw. $\underline{2} \underline{1}$ besagen soll, dass $\psi(x'')$ immer direkt hinter $\bar{\psi}(x')$ stehen muss bzw. $\bar{\psi}(x'')$ immer direkt vor $\psi(x')$. Etwas allgemeiner definieren wir z. B.

$$P_{(\underline{02})(\underline{31})}(\bar{\psi}(x) \psi(x''), \bar{\psi}(x''') \psi(x')) = \\ = \begin{cases} \bar{\psi}(x) \psi(x'') \bar{\psi}(x''') \psi(x') & \text{für } x_0 > x'_0 \\ \bar{\psi}(x''') \psi(x') \bar{\psi}(x) \psi(x'') & \text{für } x'_0 > x_0. \end{cases} \quad (20)$$

Zum Einteilchenterm von (20) gehört ein Ausdruck, in dem $\bar{\psi}(x)$ und $\psi(x')$ als freie Operatoren stehenbleiben, während bezüglich $\psi(x'')$ und $\bar{\psi}(x''')$ der Vakuumerwartungswert gebildet werden muss. Dieser ist, mit den Definitionen (8) und mit

$$\varepsilon(x - x') = \begin{cases} +1 & \text{für } x_0 > x'_0 \\ -1 & \text{für } x'_0 > x_0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\langle P_{(\underline{02})(\underline{31})}(\psi_\alpha(x''), \bar{\psi}_\beta(x''')) \rangle_0 = \\ = \frac{1}{2} \{ \psi_\alpha(x''), \bar{\psi}_\beta(x''') \} + \frac{1}{2} \varepsilon(x - x') \langle [\psi_\alpha(x''), \bar{\psi}_\beta(x''')] \rangle_0 = \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x'' - x''') - \frac{1}{2} \varepsilon(x - x') S_{\alpha\beta}^{(1)}(x'' - x'''),$$

also

$$\langle P_{(\underline{02})(\underline{31})}(\psi_\alpha(x''), \bar{\psi}_\beta(x''')) \rangle_0 = \\ = -\frac{1}{2} \varepsilon(x - x') [S_{\alpha\beta}^{(1)}(x'' - x''') + i \varepsilon(x - x') S_{\alpha\beta}(x'' - x''')]. \quad (22)$$

Die zur Herleitung von (22) neben den Vertauschungsrelationen (6) verwendeten Ausdrücke für Vakuumerwartungswerte sind bei SCHWINGER (S II) erläutert. Ähnlich findet man für Vakuumerwartungswerte in den Mesonoperatoren

$$\langle P_{(\underline{02})(\underline{31})}(\Phi(x''), \Phi(x''')) \rangle_0 = \\ = \frac{1}{2} [D^{(1)}(x'' - x''') + i \varepsilon(x - x') D(x'' - x''')]. \quad (23)$$

Formel (22) dient auch zur Berechnung des Einteilchenterms im spezielleren Fall (18), (19), wo mindestens zwei der Variablen $x^{(i)}$ zusammenfallen. Ist insbesondere $x'' = x$ und $x''' = x'$, so gehen (22) und (23) in die bekannten Beziehungen über

$$\langle P_{01}(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')) \rangle_0 = -\frac{1}{2} \varepsilon(x-x') S_{c_{\alpha\beta}}(x-x'), \quad (22')$$

$$\langle P_{01}(\Phi(x), \Phi(x')) \rangle_0 = \frac{1}{2} D_c(x-x'), \quad (23')$$

wo

$$\begin{aligned} S_c(x-x') &= S^{(1)}(x-x') + i \varepsilon(x-x') S(x-x') = \\ &= S^{(1)}(x-x') - 2i \bar{S}(x-x') \end{aligned} \quad (24)$$

und

$$\begin{aligned} D_c(x-x') &= D^{(1)}(x-x') + i \varepsilon(x-x') D(x-x') = \\ &= D^{(1)}(x-x') - 2i \bar{D}(x-x') \end{aligned} \quad (25)$$

durch die Fourierdarstellungen (14) und (15) gegeben sind. S , $S^{(1)}$ und \bar{S} sind gleich definiert wie in S II; nur muss die Elektronmasse durch die Protonmasse M ersetzt werden. D , $D^{(1)}$ und \bar{D} sind identisch mit den Schwingerschen Δ , $\Delta^{(1)}$ und $\bar{\Delta}$ für Teilchen der Ruhemasse μ .

In (22) tritt, ebenso wie in der bekannten Beziehung (22'), der Faktor $-\frac{1}{2} \varepsilon(x-x')$ auf, wo x und x' die für die Reihenfolge der Faktoren in den P -Klammern verantwortlichen Variablen sind. Aus diesem Grunde lassen sich die Dysonschen Überlegungen (vgl. D I) betreffend Vorzeichen usw. bei der Berechnung von Matrixelementen unverändert auf den vorliegenden Fall übertragen, und die in D I und D II gegebenen Regeln zur Bildung von Einteilchentermen oder allgemeineren Operatoren aus P -Klammern gelten hier ebenfalls, mit dem einzigen Unterschied, dass man für die Vakuum Erwartungswerte von Operatorpaaren an Stelle der S_c - und D_c -Funktionen von (22') und (23') die allgemeineren Funktionen in den eckigen Klammern von (22) und (23) einzusetzen hat, falls die Argumente der Operatoren nicht Variablen sind, welche die zeitliche Ordnung in den P -Klammern bestimmen. Wie man mit den Funktionen (22), (23) zu rechnen hat, soll in § 4 am Beispiel der Renormalisation von e noch ausgeführt werden.

§ 3. Regularisierung.

Wie bereits bemerkt, werden gewisse Ausdrücke, wie z. B. die Selbstenergiedichten (11), (12), divergent. Es handelt sich dabei immer um Renormalisationen, also um unbeobachtbare Effekte. Da man sie jedoch bei der Berechnung der beobachtbaren Effekte benützt, sollte man, um letztere eindeutig zu definieren, von einer Regularisierungsmethode Gebrauch machen, wie sie von PAULI und VILLARS¹⁴⁾ u. a. entwickelt worden ist. Im vorliegenden Fall kann eine einfache und klare Vorschrift zu einer relativistisch invarianten Regularisierung durch die folgenden zwei Forderungen gegeben werden:

1. Man kopple formal neben dem wirklichen Mesonfeld mit der Masse μ und der Kopplungskonstanten f noch weitere (virtuelle) Mesonfelder des gleichen Typs mit Massen μ_1, μ_2, \dots und mit (zum Teil imaginären) Kopplungskonstanten $f/\sqrt{c_1}, f/\sqrt{c_2}, \dots$ an das Protonfeld. Diesen Mesonfeldern misst man keine reale Bedeutung zu; sie haben aber den Effekt, dass jede in den Formeln auftretende D -Funktion ($D, D^{(1)}, D$ oder D_c) ersetzt wird durch eine Summe von Funktionen

$$D(x; \mu) \rightarrow \sum_i c_i D(x; \mu_i) \quad (c_0 = 1, \mu_0 = \mu). \quad (26)$$

In 4. Ordnung, wo Produkte von zwei D -Funktionen auftreten, erhält man damit eine Regularisierung *mit* Faktorisierung. Den c_i und μ_i werden Bedingungen auferlegt, so dass die sonst divergenten Ausdrücke endlich werden. Für unsere Zwecke genügt

$$\sum_i c_i = 0 \quad (27)$$

(woraus bereits folgt, dass mindestens eine der formalen Kopplungskonstanten imaginär sein muss). Damit werden die logarithmischen Divergenzen weggeschafft, und sowohl die Protonselbstenergie (11) als auch die Renormalisation von e in 2. Ordnung wird dadurch endlich. Die Renormalisation 2. Ordnung von f ist zwar ebenfalls bloss logarithmisch divergent, doch enthält sie einen Term, in dem die Mesonselfstenergie eine Rolle spielt. Um diese zu regularisieren, braucht man noch eine zweite Vorschrift:

2. Man kopple formal neben dem wirklichen Protonfeld noch weitere (virtuelle) Spinorfelder mit Massen M_k und Kopplungskonstanten $f/\sqrt{c_i} \sqrt{C_k}$ an die Mesonfelder. Diesen Spinorfeldern

kommt ebenfalls keine reale Bedeutung zu. Sie haben den Effekt, dass in (12) und allgemein in Ausdrücken, wo Spuren von S -Funktionen vorkommen, und nur in diesen, jede Spur in eine einfache Summe von Spuren übergeht (Regularisierung *ohne* Faktorisierung):

$$\left. \begin{aligned} Sp(\gamma S(x; M) \gamma S(x; M) \dots) &\rightarrow \\ \rightarrow \sum_k C_k Sp(\gamma S(x; M_k) \gamma S(x; M_k) \dots) &\end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$(C_0 = 1, \quad M_0 = M).$$

(Die S können irgendwelche S -Funktionen und die γ irgendwelche γ -Matrizen bedeuten.) Da die Mesonselbstenergie (12) quadratisch divergiert, haben wir hier zwei Bedingungen,

$$\sum_k C_k = 0, \quad \sum_k C_k M_k^2 = 0, \quad (29)$$

nötig, um sie endlich zu machen.

Da den Hilfsfeldern sicher keine reale Bedeutung zukommt — ihre Hamiltonfunktionen der Wechselwirkung sind ja teilweise antihermitisch — dürfen sie auf die beobachtbaren Resultate keinen Einfluss haben. Das erreicht man dadurch, dass man die Hilfsmassen μ_i und M_k gross wählt gegenüber den realen Massen μ und M . Nach erfolgter Rechnung macht man den Grenzübergang $\mu_i \rightarrow \infty, M_k \rightarrow \infty$ ($i, k \neq 0$)¹⁴). Die Formulierung mit den Hilfsfeldern ist praktisch, weil sie auf alle Fragen (z. B. Faktorisierung oder Nicht-Faktorisierung) der Regularisierung von Ausdrücken beliebig hoher Ordnung eine eindeutige und vernünftige Antwort gibt.

Um die Formeln nicht unnötig zu belasten, schreiben wir sie auch im folgenden nicht in der regularisierten Form. Jedoch denken wir uns die Ausdrücke gemäss den dargelegten Vorschriften regularisiert und machen auch Gebrauch von der Eigenschaft, dass sie endlich und eindeutig definiert sind. Wenn wir im folgenden dennoch von divergenten und konvergenten Ausdrücken sprechen, so ist damit das Verhalten gemeint, das sie ohne Regularisierung hätten.

§ 4. Magnetisches Moment und Ladungsrenormalisation in 2. Ordnung.

Mit der in § 2 skizzierten Methode findet man für den effektiven Hamiltonoperator (17) in 2. Ordnung, bei Verwendung der Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} F(x) &\equiv F(0), \quad F(x') \equiv F(1), \quad F(x'') \equiv F(2), \\ F(x-x') &\equiv F(01), \quad F(x'-x) \equiv F(10) \quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

für Funktionen unter dem Integralzeichen,

$$\langle H_F^{(2)} \rangle_{1P, 0M} = H_a^{(2)} + H_b^{(2)}, \quad (31)$$

$$H_a^{(2)}(x) = -\frac{1}{8} f^2 i e A_\mu(x) \int d^4 x' \int d^4 x'' \times \\ \times \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(10) \gamma_\mu S_c(02) \gamma_5 \psi(2) D_c(12), \quad (31a)$$

$$H_b^{(2)}(x) = \frac{1}{10} f^2 i e A_\mu(x) \int d^4 x' \int d^4 x'' \{ \bar{\psi}(0) \gamma_\mu [i \varepsilon(02) S(01) + \\ + 2i \bar{S}(01)] \gamma_5 S_c(12) \gamma_5 \psi(2) + (\leftarrow) \} D_c(12). \quad (31b)$$

Mit (\leftarrow) ist der Ausdruck gemeint, den man erhält, wenn man den vorangehenden Term „von hinten nach vorn liest“:

$$\bar{\psi}(2) \gamma_5 S_c(21) \gamma_5 [i \varepsilon(20) S(10) + 2i \bar{S}(10)] \gamma_\mu \psi(0).$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern entstehen als Differenzen zwischen den Funktionen in den eckigen Klammern von (22) und den S_c -Funktionen (24). Aus dieser Form von (31b) ist die relativistische Invarianz nicht direkt ersichtlich; sie wird jedoch später evident werden.

Obwohl die Methode, die zu (31), (31a), (31b) führt, eine rein analytische ist, geben wir, um den Vergleich mit anderen Arbeiten

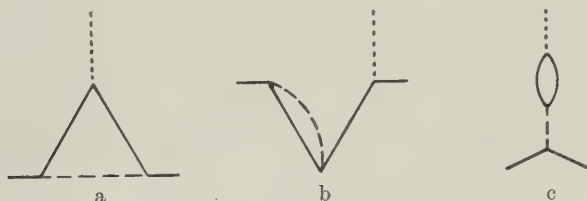


Fig. 1.

Feynman-Dyonsche Figuren für die Streuung eines Protons an einem äusseren elektromagnetischen Feld in 2. Ordnung. Protonlinien sind ausgezogen, Mesonlinien gestrichelt, Photonlinien punktiert gezeichnet.

zu erleichtern, in Fig. 1 die Feynman-Dyonschen Figuren³⁾⁴⁾ für die Effekte in 2. Ordnung. Figur a entspricht dem Ausdruck (31a), Figur b dem Ausdruck (31b); jedoch ist in (31b) der Effekt der Massenrenormalisation bereits berücksichtigt. Ohne Massenrenormalisation hätte der Figur b entsprechende Ausdruck die Form:

$$-\frac{1}{8} f^2 i e A_\mu(x) \int d^4 x' \int d^4 x'' \{ \psi(0) \gamma_\mu S_c(01) \gamma_5 S_c(12) \gamma_5 \psi(2) + \\ + (\leftarrow) \} D_c(12).$$

Der Term, der Figur c entspräche, ist Null, da

$$Sp(\gamma_\mu S_c \gamma_5 S_c) = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (32)$$

auf Grund bekannter Eigenschaften der Dirac-Matrizen.

Setzt man voraus, dass das äussere elektromagnetische Feld (räumlich und zeitlich) quasi-konstant ist, so erhält man aus (31a) mit den bekannten Methoden³⁾⁴⁾

$$H_a^{(2)}(x) = -R_a^e f^2 i e A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \\ - \mu^{(2)} f^2 \frac{e}{2M} A_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x)), \quad (33)$$

wo

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (34)$$

Alle andern Terme von (31a) sind von einem der drei Typen

$$\text{const. } A_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \square^n (\bar{\psi} \psi), \quad \text{const. } A_\mu \square^{n+1} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi), \\ \text{const. } A_\mu \square^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi). \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Diese sind, abgesehen von Viererdivergenzen, äquivalent mit Termen $\sim \delta A_\mu / \delta x_\mu$ (was verschwindet, wenn man die A_μ der Lorentz-schen Nebenbedingung unterwirft) oder $\sim \square A_\mu$ (was für ein quasi-konstantes Feld vernachlässigbar ist).

Der erste Term auf der rechten Seite von (33) bedeutet eine Ladungsrenormalisation zu H^e in (2). Die Renormalisationskonstante R_a^e ist durch das Integral

$$R_a^e = -\frac{i}{8\pi^4} \int_0^1 \xi d\xi \int d^4k \frac{k^2 + 2M^2 \xi^2}{[k^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2]^3} \quad (35)$$

gegeben und würde ohne Regularisierung logarithmisch divergieren. Die Vorschrift (26) mit der Bedingung (27) macht (35) jedoch regulär. Der zweite Term rechts in (33) ist, abgesehen von einer Viererdivergenz, von der Form eines Pauli-Terms

$$- \mu^{(2)} f^2 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \quad (36)$$

wo

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad m_{\mu\nu} = \frac{e}{2M} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi, \quad (37)$$

und bedeutet die Energie, die von dem zusätzlichen magnetischen Spinnmoment des Protons in 2. Ordnung herrührt. Dieses beträgt, in Kernmagnetonen $e/2M$ gemessen,

$$\mu^{(2)} f^2 = - \left(\frac{f}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \frac{\xi^3}{\xi^2 + \delta^2 (1-\xi)} =$$

$$= - \left(\frac{f}{2\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2 (1-\delta^2)}{2} \ln \frac{1}{\delta} - \frac{\delta^3 (3-\delta^2)}{2\sqrt{4-\delta^2}} \arccos \frac{\delta}{2} \right\}, \quad (38)$$

wo

$$\delta = \frac{\mu}{M}; \quad (39)$$

es ist von LUTTINGER u. a.⁶⁾ berechnet worden.

Der Ausdruck (31b) gibt eine reine Ladungsrenormalisation. Diese Rechnung wollen wir etwas ausführen, um das Rechnen mit den Funktionen (22) zu illustrieren. Setzen wir also in (31b) die Fourierdarstellungen (14), (15) und (vgl. S II!)

$$S(x) = - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p (i \gamma p - M) \varepsilon(p) \delta(p^2 + M^2) e^{i p x}, \quad (40)$$

$$S(x) = - \frac{1}{2} \varepsilon(x) S(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} H W \int d^4 p \frac{i \gamma p - M}{p^2 + M^2} e^{i p x} \quad (41)$$

ein $[\varepsilon(p)]$ ist analog (21) definiert, δ ist die eindimensionale Diracsche δ -Funktion und HW bedeutet Hauptwert bei der p_0 -Integration]. Im Laufe der Rechnung zeigt sich, dass der Ausdruck mit (\leftarrow) in (31b) denselben Beitrag gibt wie der vorangehende Ausdruck. Wir nehmen dies vorweg und schreiben $2 \times$ den ersten Term; dann ergibt sich

$$H_b^{(2)}(x) = \frac{1}{8} f^2 i e A_\mu(x) \left[\frac{-2i}{(2\pi)^4} \right]^2 \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 p \int d^4 p' \int d^4 k \times$$

$$\times \psi(x) \gamma_\mu (i \gamma p - M) \gamma_5 (i \gamma p' - M) \gamma_5 \psi(x'') \times$$

$$\times \left[i \varepsilon(x - x'') \frac{-i}{(2\pi)^3} \varepsilon(p) \delta(p^2 + M^2) + \frac{2i}{(2\pi)^4} H W \frac{1}{p^2 + M^2} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{p'^2 + M'^2} \frac{1}{k^2 + \mu'^2} e^{i p(x-x')} e^{i p'(x'-x'')} e^{i k(x'-x'')}.$$

Die Integration über x' gibt eine (vierdimensionale) δ -Funktion

$$\left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d^4 x' e^{i(-p+p'+k)x'} = \delta(-p+p'+k), \quad (42)$$

so dass die Integration über p' trivial wird ($p' \rightarrow p - k$). Benützen wir einige bekannte Eigenschaften der γ -Matrizen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} H_b^{(2)}(x) = & \frac{1}{8} f^2 i e A_\mu(x) \frac{-4}{(2\pi)^4} \int d^4 x'' \int d^4 p \int d^4 k \times \\ & \times \bar{\psi}(x) \gamma_\mu [p^2 + M^2 + (i\gamma p)(i\gamma k) - M(i\gamma k)] \psi(x'') \times \\ & \times \left[i \varepsilon(x - x'') \frac{-i}{(2\pi)^3} \varepsilon(p) \delta(p^2 + M^2) + \frac{2i}{(2\pi)^4} HW \frac{1}{p^2 + M^2} \right] \times \\ & \times \frac{1}{(p-k)^2 + M'^2} \frac{1}{k^2 + \mu'^2} e^{i p(x - x'')}. \end{aligned}$$

Wir fassen nun die beiden letzten Brüche gemäss der Feynmanschen Formel⁴⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n} = & n! \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{n-1}} d\xi_n \times \\ & \times [a_0 + \xi_1(a_1 - a_0) + \dots + \xi_n(a_n - a_{n-1})]^{-(n+1)} \end{aligned} \quad (43)$$

zusammen:

$$\frac{1}{k^2 + \mu'^2} \frac{1}{(p-k)^2 + M'^2} = \int_0^1 d\xi \frac{1}{[k^2 + \mu'^2 + \xi(p^2 - 2pk + M^2 - \mu^2)]^2}.$$

Mit der Schiebung*)

$$k' = k - \xi p \quad (44)$$

wird der Nenner rein quadratisch in der neuen Variablen k' . Da k' sonst nur noch im Ausdruck mit den γ -Matrizen vorkommt, geben dort Terme linear in k' aus Symmetriegründen keinen Beitrag bei der Integration. Mit

$$(p^2 + M^2) \delta(p^2 + M^2) \rightarrow 0, \quad (p^2 + M^2) HW \frac{1}{p^2 + M^2} \rightarrow 1 \quad (45)$$

erhält man

$$\begin{aligned} H_b^{(2)}(x) = & -\frac{1}{2} f^2 i e A_\mu(x) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int d^4 x'' \int d^4 k' \int_0^1 d\xi \times \\ & \times \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \left\{ -i \varepsilon(x - x'') \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4 p (i\gamma p - M) \varepsilon(p) \times \right. \\ & \times \delta(p^2 + M^2) e^{i p(x - x'')} \frac{M\xi}{[k'^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2]^2} + \\ & + \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \left[1 - \xi - HW \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M^2} M\xi \right] e^{i p(x - x'')} \times \\ & \times \left. \frac{1}{[k'^2 + \mu'^2 + (p^2 + M^2 - \mu^2) \xi - p^2 \xi^2]^2} \right\} \psi(x''). \end{aligned}$$

*) Man beachte, dass dank der (gedachten) Regularisierung gemäss (26), (27) das Integral über k wohldefiniert und endlich ist. Im Gegensatz zu KARPLUS und KROLL⁷⁾, Seite 540/541, bekommen wir deshalb bei der Schiebung keinen Oberflächenterm.

Das erste Integral über p gibt nach (40) gerade wieder die S -Funktion, jetzt aber mit dem gleichen Argument $(x - x'')$ wie die ε -Funktion, mit der sie multipliziert ist. Dadurch wird die Lorentzinvarianz evident. Setzen wir für $\varepsilon(x - x'')$ $S(x - x'')$ die Fourierdarstellung (41) ein und verwenden wir die Abkürzungen

$$\alpha = k'^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2, \quad \beta = \alpha + (p^2 + M^2)(\xi - \xi^2),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} H_b^{(2)}(x) &= -\frac{1}{2} f^2 i e A_\mu(x) 2i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^8 \int d^4 x'' \int d^4 k' \int d^4 p \int_0^1 d\xi \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \times \\ &\times \left\{ HW \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M^2} M \xi \frac{1}{\alpha^2} + \left[1 - \xi - HW \frac{i\gamma p - M}{p^2 + M^2} M \xi \right] \frac{1}{\beta^2} \right\} e^{ip(x-x'')} \psi(x'') = \\ &= -f^2 i e A_\mu(x) i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^8 \int d^4 x'' \int d^4 k' \int d^4 p \int_0^1 d\xi \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \times \\ &\times \left\{ \frac{1 - \xi}{\beta^2} + (i\gamma p - M)(\xi - \xi^2) M \xi \frac{1}{\alpha \beta} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right] \right\} e^{ip(x-x'')} \psi(x''), \end{aligned}$$

da

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha \beta} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right].$$

Zur Ausführung der x'' -Integration zerlegen wir ψ nach FOURIER. Um die Formeln nicht zu überlasten, setzen wir nur eine Fourierkomponente von ψ ein (da sie beliebig ist, wird die Allgemeinheit der Rechnung nicht eingeschränkt):

$$\psi(x) = u(q) e^{iqx}. \quad (46)$$

Analog werden wir in §§ 5 und 6 brauchen

$$\bar{\psi}(x) = \bar{u}(q') e^{-iq'x}. \quad (47)$$

Wegen der Diracgleichungen (4) gilt

$$\dots (i\gamma q + M) u(q) e^{iqx} = \bar{u}(q') e^{-iq'x} (i\gamma q' + M) \dots = 0 \quad (48)$$

und

$$\dots (q^2 + M^2) u(q) e^{iqx} = \bar{u}(q') e^{-iq'x} (q'^2 + M^2) \dots = 0, \quad (49)$$

sofern der mit \dots bezeichnete Rest endlich ist (d. h. nicht von der Form $(i\gamma q + M)^{-1}$ oder $(q^2 + M^2)^{-1}$ usw.).

Die Integration über x'' gibt nun, analog (42), die Funktion $\delta(q - p)$. Die p -Integration wird wieder trivial ($p \rightarrow q$). Wegen (49)

hat man $\beta \rightarrow \alpha$, und bei Berücksichtigung von (48) und (46) erhält man schliesslich

$$H_b^{(2)}(x) = -R_b^e f^2 i e A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x), \quad (50)$$

wo

$$R_b^e = \frac{i}{16\pi^4} \int_0^1 d\xi (1-\xi) \int d^4k \left[\frac{1}{[k^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2]^2} - \frac{4 M^2 \xi^2}{[k^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2]^3} \right]. \quad (51)$$

Ein Vergleich der Formeln (33) und (50) mit (2) zeigt, dass die beobachtbaren Einflüsse des äusseren Feldes auf das Proton — abgesehen von Pauli-Termen — nicht durch $e A_\mu$, sondern (bis in 2. Ordnung) durch

$$(e A_\mu)_{\text{ren.}} = e A_\mu [1 + (R_a^e + R_b^e) f^2] \quad (52)$$

bestimmt werden. (Es ist konsequent, die Renormalisationen nicht auf e allein, sondern auch auf die A_μ zu beziehen, da die A_μ auch wieder durch Ladungen e erzeugt werden.) Ein Vergleich von (35) und (51) — am einfachsten mit Hilfe einer partiellen Integration in ξ^*) — zeigt jedoch, dass

$$R_a^e + R_b^e = 0. \quad (53)$$

Hierbei ist die Regularisierung wieder wesentlich, da R_a^e und R_b^e sonst unbestimmt sind und sich nur auf Grund gewisser Zusatzvorschriften betreffend die Ausführung der Integration wegheben.

Eine Bemerkung: Verwendet man die Selbstenergiedichte in der Form $\delta M \bar{\psi} \psi$, so ändert sich $H_a^{(2)}$ (31 a) nicht, während $H_b^{(2)}$ (31 b) eine andere Form bekommt. Bei der Berechnung von R_b^e stösst man dann auf den Ausdruck $(p^2 + M^2) (p^2 + M'^2)^{-1}$ im Integranden, während bei unserer Rechnung Ausdrücke von der Form $(p^2 + M^2) \times HW (p^2 + M^2)^{-1}$ auftraten. Wegen der Äquivalenz von $(p^2 + M'^2)^{-1}$ mit $HW (p^2 + M^2)^{-1} + i \pi \delta (p^2 + M^2)^{**}$) schiene es auf den ersten Blick vernünftig, dem Ausdruck $(p^2 + M^2) (p^2 + M'^2)^{-1}$ ebenfalls den Wert 1 zu geben, wie das in einer Arbeit von WATSON und LEPORE¹⁵⁾ bei der Renormalisation von f getan wird. Dann erhielte man aber eine doppelt so grosse Renormalisationskonstante, und es würde

$$(e A_\mu)_{\text{ren.}} = e A_\mu [1 + (R_a^e + 2 R_b^e) f^2].$$

*) Vgl. die analoge Rechnung in 7), Seite 542.

**) Vgl. hierzu z. B. S. III (1. 68).

Nun zeigt die Integration über x'' und p , dass man es eigentlich mit den Ausdrücken

$$\dots \frac{q^2 + M^2}{q^2 + M'^2} u(q) e^{iqx} \text{ bzw. } \dots HW \frac{q^2 + M^2}{q^2 + M^2} u(q) e^{iqx} \quad (54)$$

zu tun hat, wovon der erste unbestimmt ist (daran kann auch die Regularisierung nichts ändern), während im zweiten der Bruch gleich 1 gesetzt werden darf. Eine Analyse solcher, durch die Integration über ein unendliches Zeitintervall bedingter Unbestimmtheiten in der S -Matrix*) zeigt, dass es tatsächlich richtig ist, dem Bruch im ersten Ausdruck (54) den Wert $1/2$ zuzuschreiben. Solche Feinheiten sind dagegen nicht nötig, wenn man die Selbstenergiedichten in der Form (11), (12), (13) einführt.

§ 5. Renormalisation der Kopplungskonstanten.

Bei der Berechnung des anomalen magnetischen Momentes in 4. Ordnung haben wir Korrekturen zu erwarten, die von der Renormalisation von eA_μ und f^2 im Ausdruck 2. Ordnung [(33), zweiter Term] herrühren. In einer konsistenten Theorie müssen die Renormalisationen für alle Prozesse, die man sich im Rahmen dieser Theorie denken kann, dieselben sein, und man kann sie an Hand einfacherer Prozesse bestimmen. Für eA_μ ist dies in § 4 geschehen an Hand der Streuung eines Protons an einem äusseren elektromagnetischen Feld. Für f^2 könnte man analog die Streuung eines Protons an einem „äusseren Mesonfeld“ betrachten. Doch bringt das, abgesehen von der Frage, ob ein äusseres Mesonfeld etwas physikalisch Sinnvolles ist, Komplikationen mit sich, auf die wir noch zu sprechen kommen werden.

Besser geeignet ist die Proton-Proton-Streuung. Für diesen Prozess lautet die S -Matrix [D I, Gl. (32)] in 2. Ordnung

$$S^{(2)}(\infty) = \frac{1}{4} f^2 \int d^4x \int d^4x' (\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x)) (\bar{\psi}(x') \gamma_5 \psi(x')) D_c(x-x'), \quad (55)$$

oder bei Einsetzen von Fourierkomponenten gemäss (46), (47),

$$\begin{aligned} S^{(2)}(\infty) &= \frac{1}{4} f^2 \int d^4x \int d^4x' (\bar{u}(q') e^{-iq'x} \gamma_5 u(q) e^{iqx}) \times \\ &\times (\bar{u}(p') e^{-ip'x'} \gamma_5 u(p) e^{ipx'}) D_c(x-x'). \end{aligned} \quad (56)$$

Die Terme 4. Ordnung schreiben wir hier nicht explizit an; zu ihrer Diskussion charakterisieren wir sie durch die Feynman-Dyson'schen

*) Vgl. D II, Seite 1752 und 7), Seite 542.

Symbole, Fig. 2. Hierzu ist zu bemerken, dass wiederum in den entsprechenden analytischen Ausdrücken die Massenrenormalisation nach der in § 2 dargelegten Methode bereits ausgeführt ist. Während die Terme, die den Figuren d und e entsprechen, keine Ausdrücke der Form (56) geben, also keine Renormalisationen ent-

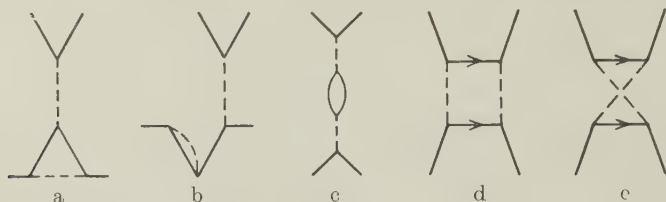


Fig. 2.

Feynman-Dysonsche Figuren für die Proton-Proton-Streuung in 4. Ordnung.

halten können, zeigt sich, bei Benützung der Beziehungen (48), (49), dass die den Figuren a, b und c entsprechenden Ausdrücke auf die Form

$$\text{const. } f^4 \int d^4x \int d^4x' (\bar{u}(q') e^{-iq'x} \gamma_5 u(q) e^{iqx}) \times \\ \times (\bar{u}(p') e^{-ip'x'} \gamma_5 u(p) e^{ipx'}) D_c(x-x') F[(q-q')^2] \quad (57)$$

gebracht werden können. Das ist auch aus Gründen der Lorentzinvarianz, zusammen mit (48), (49) ersichtlich.

Man kann sich nun F in (57) nach Potenzen von $(q-q')^2$ entwickelt denken. Der erste Term dieser Entwicklung $F[0]$ gibt in (57) einen Ausdruck der Form (56); dieser kann deshalb als Renormalisationsterm angesprochen werden (Fall I). Ebenso gut kann man aber F auch nach Potenzen von $(q-q')^2 + \mu^2$ entwickeln und den vom konstanten Term $F[-\mu^2]$ herrührenden Ausdruck als Renormalisation zu (56) interpretieren (Fall II). Im Falle I definiert man die physikalische Kopplungskonstante an Hand des unrelativistischen Grenzfalles: Für Geschwindigkeiten der Protonen, die klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit, werden in der S -Matrix alle Terme der Form (56) in höherer als 2. Ordnung als Renormalisationen interpretiert. Auf den Fall der Streuung eines Protons an einem äusseren Mesonfeld Φ^a übertragen, bedeutet das, dass die Dichte der Wechselwirkungsenergie für alle Näherungen durch

$$i(f\Phi^a)_{\text{ren.}} \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (58)$$

gegeben ist, sofern das äussere Feld Φ^a [wegen der Äquivalenz von $-(q-q')^2$ mit dem Operator \square] der Bedingung genügt

$$\square \Phi^a = 0. \quad (59 \text{ I})$$

Im Falle II gibt (58) die Wechselwirkungsenergie für alle Näherungen, sofern Φ^a der Bedingung

$$(\square - \mu^2) \Phi^a = 0 \quad (59 \text{ II})$$

genügt, also der Gleichung des freien Mesonfeldes (5). In der Elektrodynamik und auch bei unserem Problem in § 4 sind die Fälle I und II identisch, da für Photonen $\mu = 0$. Nun ist ein Feld, das der Gl. (59 I) genügt, und damit auch der unrelativistische Grenzfall in einer Mesontheorie wahrscheinlich wenig sinnvoll, und tatsächlich wird sowohl bei MATTHEWS¹⁰⁾ und NAKABAYASI und SATO¹¹⁾ als auch bei WATSON und LEPORE¹⁵⁾ die Definition II gewählt. Es sei hier aber betont, dass man mit der Definition I ebenfalls zu einer konsistenten Renormalisation gelangt. Auch werden die quantitativen Aussagen der Theorie dadurch nicht geändert. Das soll am Ende dieses Paragraphen bewiesen werden.

Zunächst seien noch die Resultate für die Renormalisation von f zusammengestellt. Man findet bis zur 2. Ordnung

$$f_{\text{ren.}}^2 = f^2 [1 + (R_a + R_b + R_c) f^2], \quad (60)$$

wo R_a , R_b und R_c von den Termen herrühren, die den Symbolen a , b und c in Fig. 2 entsprechen. Sie werden im Falle II

$$R_a = \frac{i}{4\pi^4} \int_0^1 d\xi \int_0^\xi d\eta \int d^4k \frac{k^2 - M^2 \xi^2 + \mu^2 (\xi - \eta) \eta}{[k^2 + \mu'^2 - \mu^2 \xi + M^2 \xi^2 - \mu^2 (\xi - \eta) \eta]^3}, \quad (61)$$

$$R_b = 2 R_b^e, \quad (62)$$

$$R_c = \frac{i}{4\pi^4} \int_0^1 d\xi \xi (1 - \xi) \int d^4p \frac{3(p^2 + M'^2) + \mu^2 \xi (1 - \xi)}{[p^2 + M'^2 - \mu^2 \xi (1 - \xi)]^3}. \quad (63)$$

R_b^e ist durch (51) gegeben. Im Falle I würde R_a einfacher, da die Summanden $\mu^2(\xi - \eta)\eta$ in Zähler und Nenner wegfielen. R_b würde gleich bleiben. R_c dagegen würde komplizierter.

Die Renormalisationen R_a und R_b stimmen mit den entsprechenden Grössen, die NAKABAYASI und SATO¹¹⁾ für ein neutrales Mesonfeld finden, überein, falls man ihre Ausdrücke regularisiert. [Dann fallen dort wegen (27) gewisse additive, von μ und M unabhängige Konstanten weg]. R_c wird in der japanischen Arbeit doppelt so gross, weil dort auch Neutronen an die Mesonfelder gekoppelt sind. Diese geben für R_c in den virtuellen Zwischenzuständen denselben Beitrag wie die Protonen. Mathematisch äussert sich das darin, dass man nicht nur eine Spurbildung bezüglich der γ -Matrizen, sondern auch

bezüglich der Matrizen des isotopen Spins auszuführen hat. Das gibt gerade den Faktor 2.

Nach (52) und (60) erwarten wir bei der Rechnung in 4. Ordnung folgende Renormalisationsterme zum Pauli-Term (36)

$$-\mu^{(2)} f^2 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu} [R_a^e + R_b^e + R_a + R_b + R_c] f^2, \quad (64)$$

wobei die R in (35), (51), (61), (62) und (63) gegeben sind.

Versucht man, die Renormalisation von f an Hand der Streuung eines Protons an einem „äusseren Mesonfeld“ zu bestimmen, so ergeben sich zwei Komplikationen.

Erstens hat bei einer Wechselwirkungsenergiedichte vom Typus

$$H = j \Phi^a + H^1 \quad (65)$$

($j = i f \bar{\psi} \gamma_5 \psi$, Φ^a = äusseres Mesonfeld (c -Zahl); H^1 ist durch (3) gegeben) die Subtraktion der Mesonselbstenergie in H^1 auf die Renormalisation in 2. Ordnung keinen Einfluss (Φ kommutiert ja mit $j \Phi^a$), und der R_c entsprechende Ausdruck würde im Falle I ohne Regularisierung quadratisch divergieren und wäre im Falle II nicht definiert (auch mit Regularisierung nicht). Dem kann man abhelfen, indem man statt des äusseren Feldes Φ^a seine Quellen

$$j^a = (\square - \mu^2) \Phi^a \quad (66)$$

in die Wechselwirkungsenergie einführt:

$$\tilde{H} = j^a \Phi + H^1 \quad (67)$$

($j^a = c$ -Zahl). Ohne Subtraktion der Selbstenergien in H^1 erhält man mit (67) dieselbe S -Matrix wie mit (65), weil in allen Termen j^a , mit einer Greenschen Funktion von (66) multipliziert und über den ganzen vierdimensionalen Raum integriert, auftritt. Mit Selbstenergiesubtraktion kommt in 2. Ordnung für den Fall (67) auch ein Beitrag von der Mesonselbstenergie hinzu, so dass die f -Renormalisationen nur logarithmisch divergent werden.

Die zweite Komplikation besteht darin, dass man so die folgende Renormalisation erhält:

$$(f \Phi^a)_{\text{ren.}} = f \Phi^a \left[1 + \left(\frac{1}{2} R_a + \frac{1}{2} R_b + R_c \right) f^2 \right]. \quad (68)$$

Der Vergleich mit (60) zeigt, dass man Φ^a anders als f renormalisieren muss, nämlich

$$\Phi_{\text{ren.}}^a = \Phi^a \left[1 + \frac{1}{2} R_c f^2 \right]. \quad (69)$$

Das gibt zu keinerlei Widersprüchen Anlass und weist höchstens darauf hin, dass weder ein äusseres Mesonfeld noch seine Quellen etwas sehr Sinnvolles sind.

N. B. Dasselbe Problem hätte man auch in der Quantenelektrodynamik. Dort kann man das äussere Feld nur deshalb gleich wie die Ladung des Elektrons renormalisieren, weil dort $R_a + R_b = 0$.

Zum Schluss dieses Kapitels soll im Hinblick auf die oben diskutierten Fälle I und II allgemein gezeigt werden, weshalb es in einer Theorie, die durch Renormalisierung divergenzfrei gemacht werden kann, bis zu einem gewissen Grade reine Konventionssache ist, wel-

chen Anteil man von den ohne Regularisierung endlichen Termen zu den beobachtbaren Grössen zählen will und welchen man als Renormalisation interpretieren will. Die Reihenentwicklungen der beobachtbaren Grössen nach Potenzen der physikalischen (renormalisierten) Kopplungskonstanten f_r bekommen bei einer andern Renormalisierung zwar andere Koeffizienten; der Wert von f_r muss dann aber konsequenterweise so geändert werden, dass der numerische Wert der Reihe, die man (durch Vergleich mit dem Experiment) zur numerischen Bestimmung von f_r benützt, ungeändert bleibt. Daraus wird folgen, dass auch die numerischen Werte aller andern Reihen gleich bleiben.

Nennen wir die mathematische Kopplungskonstante wie bisher f . Setzen wir voraus, dass die Theorie mit einer bestimmten Renormalisation

$$f_r^2 = f^2 [1 + R_2 f^2 + R_4 f^4 + R_6 f^6 + \dots] \quad (70)$$

für die beobachtbaren Effekte endliche Resultate liefert. Irgendein Operator, der beobachtbare Grössen beschreibt (z. B. Streuquerschnitte), wird von der Theorie durch eine Reihe in f_r mit endlichen Koeffizienten gegeben. Bezeichnen wir einen Erwartungswert dieses Operators, den wir mit dem Experiment vergleichen können, mit σ_{exp} , so ist

$$\sigma_{\text{exp}} = A f_r^2 [1 + A_2 f_r^2 + A_4 f_r^4 + A_6 f_r^6 + \dots]. \quad (71)$$

Dabei ist der Einfachheit halber angenommen, dass der erste Term der Entwicklung mit f_r^2 beginnt; das ist jedoch nicht wesentlich. A , A_2 , A_4 , sind auch ohne Regularisierung endlich. Ersetzen wir gemäss (70) f_r durch f , so wird

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{exp}} &= A \{ f^2 [1 + R_2 f^2 + R_4 f^4 + R_6 f^6 + \dots] + \\ &\quad + A_2 f^4 [1 + 2 R_2 f^2 + (R_2^2 + 2 R_4) f^4 + \dots] + \\ &\quad + A_4 f^6 [1 + 3 R_2 f^2 + \dots] + A_6 f^8 + \dots \} \\ \sigma_{\text{exp}} &= A \{ f^2 + [R_2 + A_2] f^4 + [R_4 + 2 R_2 A_2 + A_4] f^6 + \\ &\quad + [R_6 + (R_2^2 + 2 R_4) A_2 + 3 R_2 A_4 + A_6] f^8 + \dots \}. \end{aligned} \quad (72)$$

Nun nehmen wir eine Umdefinition der Renormalisierung vor:

$$R_i \rightarrow R_i', \quad A_i \rightarrow A_i', \quad f_r \rightarrow f_r'. \quad (73)$$

Natürlich muss dabei z. B. gelten

$$R_2 + A_2 = R_2' + A_2',$$

da Koeffizienten der Entwicklung (72) nach Potenzen der unrenor-

malisierten Kopplungskonstanten durch die Störungsrechnung eindeutig definiert werden. Allgemein muss deshalb verlangt werden

$$\left. \begin{aligned} A &= \text{invariant} \\ R_2 + A_2 &= \text{invariant} \\ R_4 + 2 R_2 A_2 + A_4 &= \text{invariant} \\ R_6 + (R_2^2 + 2 R_4) A_2 + 3 R_2 A_4 + A_6 &= \text{invariant} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Unter „invariant“ ist bei dieser Betrachtung immer die Invarianz gegenüber den Umdefinitionen (73) gemeint. Die A_i sollen natürlich nur um Beträge geändert werden, die auch ohne Regularisierung endlich sind. Die ohne Regularisierung vorhandenen Divergenzen in den R_i werden dadurch nicht stärker. Im Fall der pseudoskalaren Mesonen divergiert z. B. R_2 logarithmisch; es wird nach (74) um einen endlichen Betrag geändert. R_4 , das wieder eine R_2 -Renormalisation zu R_2 enthält, divergiert mindestens wie das Quadrat eines Logarithmus. Aus der dritten Gleichung (74) sieht man, dass es sich höchstens um einen logarithmisch divergenten Betrag ändert.

Den numerischen Wert der physikalischen Kopplungskonstanten f_r können wir durch Vergleich mit einem experimentell gemessenen σ_{exp} auf Grund von (71) bestimmen. Analog bestimmt sich der Wert von f_r' aus

$$\sigma_{\text{exp}} = A f_r'^2 [1 + A_2' f_r'^2 + A_4' f_r'^4 + A_6' f_r'^6 + \dots]. \quad (75)$$

Berechnet man den beobachtbaren Erwartungswert m eines anderen Operators (z. B. ein magnetisches Moment), so muss er sich in der Form

$$m = B f_r^2 [1 + B_2 f_r^2 + B_4 f_r^4 + B_6 f_r^6 + \dots] \quad (76)$$

darstellen lassen. Gemäss unserer Voraussetzung sind die B_i bei der ursprünglichen Art der Renormalisation endlich. Wir wollen nun beweisen, dass sich der numerische Wert von m (76) nicht ändert und dass die B_i endlich bleiben, wenn die Umdefinition (73) in konsistenter Weise erfolgt.

Aus den gleichen Gründen wie für (74) muss auch gelten

$$\left. \begin{aligned} B &= \text{invariant} \\ R_2 + B_2 &= \text{invariant} \\ R_4 + 2 R_2 B_2 + B_4 &= \text{invariant} \\ R_6 + (R_2^2 + 2 R_4) B_2 + 3 R_2 B_4 + B_6 &= \text{invariant} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Aus (74) und (77) folgt

$$\left. \begin{aligned} B_2 - A_2 &= \text{invariant} \\ 2 R_2 (B_2 - A_2) + B_4 - A_4 &= \text{invariant} \\ (R_2^2 + 2 R_4) (B_2 - A_2) + 3 R_2 (B_4 - A_4) + B_6 - A_6 &= \text{invariant} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Wir formen m (76) so um, dass f_r sukzessive eliminiert und durch den experimentell gegebenen Wert σ_{exp} (71) ersetzt wird:

$$\begin{aligned} m &= B \frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} + B \{ (B_2 - A_2) f_r^4 + (B_4 - A_4) f_r^6 + (B_6 - A_6) f_r^8 + \dots \} = \\ &= B \frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} + B (B_2 - A_2) \left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} \right)^2 + B \{ [B_4 - A_4 - (B_2 - A_2) 2 A_2] f_r^6 + \\ &\quad + [B_6 - A_6 - (B_2 - A_2) (A_2^2 + 2 A_4)] f_r^8 + \dots \}. \end{aligned}$$

So ergibt sich schliesslich

$$\begin{aligned} m &= B \frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} + B (B_2 - A_2) \left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} \right)^2 + B [B_4 - A_4 - 2 (B_2 - A_2) A_2] \left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} \right)^3 + \\ &\quad + B [B_6 - A_6 - 3 (B_4 - A_4) A_2 + (B_2 - A_2) (5 A_2^2 - 2 A_4)] \left(\frac{\sigma_{\text{exp}}}{A} \right)^4 + \\ &\quad + \text{Terme} \sim f_r^{10}. \end{aligned} \quad (79)$$

Aus (74), (77) und (78) ist leicht zu sehen, dass alle Koeffizienten in der Reihenentwicklung (79) Invarianten sind. Somit ist auch m eine Invariante. Weiter folgt, dass die B_i für die zugelassenen Umdefinitionen der Renormalisation endlich bleiben, da die anderen Grössen in (79) endlich bleiben für jede bestimmte Ordnung der Störungsrechnung. Der Beweis, dass m in eindeutiger Weise von σ_{exp} abhängen muss, unabhängig davon, wie f_r aus f definiert wird, ist viel kürzer, wenn man die inverse Funktion von (70), $f = R^{-1}(f_r)$, benützen will. Jedoch ist es dann nicht so evident, unter welchen Bedingungen die Koeffizienten der Entwicklung von m nach Potenzen von f_r auch ohne Regularisierung endlich bleiben. Die hier verwendete Methode ist dagegen dem Formalismus der Störungstheorie angepasst und verwendet direkt die endlichen physikalischen Kopplungskonstanten.

Diese Invarianz gegenüber „Umeichungen“ in der Renormalisierung gilt auch für die Elektrodynamik. Nur ist es dort eindeutig, was man als renormalisierte Elektronenladung zu definieren hat, da die elektrische Ladung eine unmittelbare physikalische Bedeutung hat und direkt messbar ist. (Für sie gilt ja sogar ein Erhaltungssatz.) Dagegen kommt der Mesonkopplungskonstanten wohl keine so direkte physikalische Bedeutung zu; ihr Wert muss indirekt z. B. aus Streuversuchen bestimmt werden.

Wenn für eine beobachtbare Grösse σ_{exp} (71) gilt: $|A_i| < A_{\text{max}}$ für alle i , wo A_{max} eine feste Zahl ist, so kann die Renormalisation so definiert werden, dass die Reihe (71) schnell konvergiert. Über die Konvergenz der anderen Reihen, z. B. (76), ist damit jedoch nichts bewiesen.

§ 6. Das magnetische Moment in 4. Ordnung.

Für den effektiven Hamiltonoperator (17) findet man in 4. Ordnung, mit den gleichen Bezeichnungen wie in § 4 und mit $d^{16} x \equiv d^4 x' d^4 x'' d^4 x''' d^4 x''''$,

$$\langle H_F^{(4)} \rangle_{1P, 0M} = H_a^{(4)} + H_b^{(4)} + H_c^{(4)} + H_d^{(4)} + H_e^{(4)} + H_f^{(4)} + \quad (80)$$

+ Terme, die zum anomalen magnetischen Moment nichts beitragen.

$$H_a^{(4)}(x) = - \left(\frac{1}{2} \right)^6 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16} x \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(12) \gamma_5 S_c(20) \gamma_\mu \times \\ \times S_c(03) \gamma_5 S_c(34) \gamma_5 \psi(4) D_c(13) D_c(24), \quad (80a)$$

$$H_b^{(4)}(x) = - \left(\frac{1}{2} \right)^6 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16} x \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(12) \gamma_5 S_c(20) \gamma_\mu \times \\ \times S_c(03) \gamma_5 S_c(34) \gamma_5 \psi(4) D_c(14) D_c(23), \quad (80b)$$

$$H_c^{(4)}(x) = - \left(\frac{1}{2} \right)^6 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16} x \{ \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(10) \gamma_\mu S_c(02) \gamma_5 \times \\ \times S_c(23) \gamma_5 S_c(34) \gamma_5 \psi(4) + (\leftarrow) \} D_c(13) D_c(24), \quad (80c)$$

$$H_d^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^7 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16} x \{ \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(10) \gamma_\mu S_c(02) \gamma_5 \times \\ \times S_c(23) \gamma_5 [i \varepsilon(24) S(34) + 2 i \bar{S}(34)] \gamma_5 \psi(4) + (\leftarrow) + \\ + \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(10) \gamma_\mu [i \varepsilon(03) S(02) + 2 i \bar{S}(02)] \gamma_5 \times \\ \times S_c(23) \gamma_5 S_c(34) \gamma_5 \psi(4) + (\leftarrow) \} D_c(14) D_c(23), \quad (80d)$$

$$H_e^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^7 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16} x \{ \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(10) \gamma_\mu S_c(02) \gamma_5 \times \\ \times [i \varepsilon(24) S(23) + 2 i \bar{S}(23)] \gamma_5 S_c(34) \gamma_5 \psi(4) + \\ + (\leftarrow) \} D_c(12) D_c(34), \quad (80e)$$

$$H_f^{(4)}(x) = - \left(\frac{1}{2} \right)^7 f^4 i e A_\mu(x) \int d^{16} x \bar{\psi}(1) \gamma_5 S_c(10) \gamma_\mu \times \\ \times S_c(02) \gamma_5 \psi(2) S p(\gamma_5 S_c(34) \gamma_5 S_c(43)) \times \\ \times \{ D_c(13) [i \varepsilon(23) D(24) + 2 i \bar{D}(24)] + \\ + D_c(23) [i \varepsilon(13) D(14) + 2 i \bar{D}(14)] \}. \quad (80f)$$

Die (80a) — (80f) entsprechenden Feynman-Dysonischen Symbole sind in Fig. 3, a—f, zusammengestellt. Die Ausdrücke, die den Symbolen g und h entsprechen, kompensieren sich gerade, wie das auch in der Quantenelektrodynamik der Fall ist.

Zur Ausrechnung von (80a)—(80f) setzt man die Fourierdarstellungen (14), (40) und (41) für S_c , S und \bar{S} ein und die entsprechenden Fourierdarstellungen für D_c , D und \bar{D} . Ebenso ersetzt man ψ und $\bar{\psi}$ durch Fourierkomponenten (46) und (47). Die Terme, die Produkte von ε mit S oder D enthalten, lassen sich, genau wie in § 4,

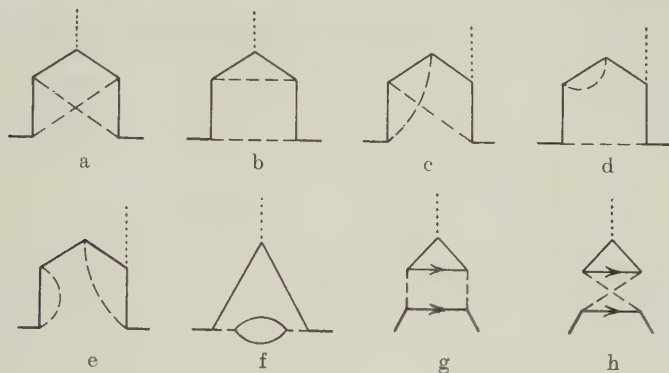


Fig. 3.

Feynman-Dysonische Figuren für die Streuung eines Protons an einem äusseren elektromagnetischen Feld in 4. Ordnung, soweit sie zum anomalen magnetischen Moment beitragen.

durch Integration über ein x und eine Variable p oder k so umformen, dass die S - oder D -Funktion dasselbe Argument bekommt wie die ε -Funktion. Von hier an ist die Lorentzinvarianz der Ausdrücke evident. Für die so erhaltenen \bar{S} und \bar{D} setzt man ebenfalls die Fourierdarstellung ein. Der Rest der Rechnung verläuft analog wie bei KARPLUS und KROLL⁷⁾. Alle x -Integrationen geben δ -Funktionen, und es bleiben zwei nichttriviale Integrationen über „Impulse“ p oder k übrig. Die Brüche fasst man mit Feynmans Formel (43) zusammen. Durch Schiebungen von der Art (44) werden die Nenner rein quadratisch in der Variablen k oder p gemacht, über die man integrieren soll. Nach FEYNMAN⁴⁾ ist

$$\int d^4k \frac{(1; k_\sigma; k_\sigma k_\rho)}{(k^2 + A)^3} = \left(\frac{\pi^2 i}{2A}; 0; \frac{1}{4} \delta_{\sigma\rho} \int d^4k \frac{k^2}{(k^2 + A)^3} \right), \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \int d^4k \frac{(1; k_\sigma; k_\sigma k_\rho)}{(k^2 + A)^4} &= \int d^4k \frac{(1; k_\sigma; \frac{1}{4} \delta_{\sigma\rho} k^2)}{(k^2 + A)^4} = \\ &= \left(\frac{\pi^2 i}{6A^2}; 0; \frac{1}{4} \delta_{\sigma\rho} \frac{\pi^2 i}{3A} \right), \end{aligned} \quad (82)$$

wobei in A immer ein infinitesimaler negativ-imaginärer Zusatz zu denken ist, der festlegt, wie die Pole bei der k_0 -Integration umfahren werden müssen. Wegen (81) und (82) lassen sich die Ausdrücke in den γ -Matrizen vereinfachen. Dank den bequemen Eigenschaften von γ_5 ist das hier etwas einfacher als in der Quantenelektrodynamik. Eine Erleichterung kommt auch dadurch, dass man die zu erwartenden Renormalisationen zum Ausdruck in 2. Ordnung bereits kennt; sie lassen sich leicht vom Rest abspalten, ohne dass es nötig ist, diesen als Funktion von $i\gamma p + M$ usw. zu schreiben.

Nach Abspaltung der Renormalisationen und Ausführung der Impulsraumintegrationen für den Rest bleiben nur noch Integrale über die Feynmanschen Parameter von (43) übrig. Auf Grund der Eigenschaften der Dirac-Matrizen und mit Hilfe der Beziehungen (48), (49) lassen sich alle Ausdrücke in den γ -Matrizen auf die Form

$$\gamma_\mu F[(q-q')^2] \text{ oder } (q_\mu - q'_\mu) G[(q-q')^2] \text{ oder } \sigma_{\mu\nu}(q_\nu - q'_\nu) L[(q-q')^2]$$

bringen. Da uns Ladungsrenormalisationen und, wie in 2. Ordnung, Viererdivergenzen und Terme $\sim \partial A_\mu / \partial x_\mu$ oder $\sim \square A_\mu$ nicht interessieren, schreiben wir nur Terme der Form $\sigma_{\mu\nu}(q_\nu - q'_\nu) L[0]$ an. So erhalten wir, wenn wir die Fourierkomponenten (46) und (47) wieder durch $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ ersetzen,

$$\left. \begin{aligned} H_a^{(4)} &\rightarrow -\mu_a^{(4)} f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \\ H_b^{(4)} &\rightarrow -[\mu^{(2)} R_a^e + \mu_b^{(4)}] f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \\ H_c^{(4)} &\rightarrow -[\mu^{(2)} R_a + \mu_c^{(4)}] f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \\ H_d^{(4)} &\rightarrow -[\mu^{(2)} 2 R_b^e + \mu_d^{(4)}] f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \\ H_e^{(4)} &\rightarrow -\mu^{(2)} R_b^e f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \\ H_f^{(4)} &\rightarrow -[\mu^{(2)} R_c + \mu_f^{(4)}] f^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu} m_{\mu\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Wegen $R_b - 2 R_b^e$ (62) sieht man, dass man wirklich die in (64) erwarteten Renormalisationen erhält, so dass nur noch die renormalisierten Grössen auftreten:

$$\begin{aligned} \langle H_F^{(2)} + H_F^{(4)} \rangle_{1P, 0M} &= -\mu^{(2)} f_r^2 \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} m_{\mu\nu})_{\text{ren.}} - \\ &\quad - \mu^{(4)} f_r^4 \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} m_{\mu\nu})_{\text{ren.}} + \end{aligned} \quad (84)$$

+ Terme, die kein anomales magnetisches Moment beschreiben,

$$\mu^{(4)} = \mu_a^{(4)} + \mu_b^{(4)} + \mu_c^{(4)} + \mu_d^{(4)} + \mu_f^{(4)}. \quad (85)$$

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 &\equiv (\mu/M)^2, \quad f(v) \equiv v^2 + \delta^2(1-v), \quad g(v) \equiv 1 - \delta^2 v(1-v), \\ h &\equiv (1-\eta)v - (\xi-\eta)w, \quad l \equiv \frac{h}{1-\eta}, \\ N &\equiv \eta(1-\eta)f(v) - 2\eta(\xi-\eta)vw + \eta \frac{(\xi-\eta)^2}{1-\eta} w^2 + wf(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

wird

$$\begin{aligned} \mu_a^{(4)} = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{8} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 dv \int_0^w dw \left\{ \frac{w}{N^2} \left[\xi^2 \left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) \eta(2v-w) + \right. \right. \\ & + \xi(1-\xi) \eta h(2v-w) - \xi \left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) \eta^2 l - (1-\xi) \eta^2(1-\eta) l^2 + \\ & + \frac{1}{2} \eta^2(1-\eta)^2 l^3 - \frac{1}{2} \xi \eta h^2(2v-w) \Big] + \\ & + \frac{1}{N} \left[-\xi w(1-v+2w) - \eta(v-w) + \xi^2 w(1+2w) + \right. \\ & + \xi \eta \left(3v - \frac{1}{2} w - vw\right) - \frac{3}{2} \eta^2 v + \frac{1}{2} \xi(1-\eta) w^2 + \\ & + \left(2\xi - \frac{3}{2}\eta\right) h w - 2\xi \eta \frac{1-\xi}{1-\eta} w + \frac{3}{2} \eta^2 \frac{\xi-\eta}{1-\eta} w - \\ & \left. \left. - \xi \eta \frac{\xi-\eta}{1-\eta} w + \eta l^2 \right] \right\}, \quad (87a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_b^{(4)} = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{8} \left\{ \int_0^1 d\xi \int_0^1 dv \int_0^v dw \int_0^w dt \xi^2(1-\xi) \times \right. \\ & \times [\xi(1-\xi)f(v) + tf(\xi)]^{-1} + \\ & + \int_0^1 d\xi \int_0^1 dz \int_0^1 dv \int_0^v dw \frac{\xi(v-w)}{z} \left[(4v^2 - 2v) \left[f(v) + \frac{w}{\xi(1-\xi)z} f(\xi) \right]^{-1} + \right. \\ & \left. + (2v^3 - v^4) \left[f(v) + \frac{w}{\xi(1-\xi)z} f(\xi) \right]^{-2} \right] + \left[\int_0^1 d\xi \frac{\xi^3}{f(\xi)} \right]^2 \Big|, \quad (87b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_c^{(4)} = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{4} \left\{ \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 dz \int_0^v dv \int_0^v dw (v-w) \times \right. \\
& \times \left[4 \left[-2l^2 + l \frac{1-\xi}{1-\eta} \right] \left[z(l^2 + \delta^2(1-v)) + \frac{wf(\xi)}{\eta(1-\eta)} \right]^{-1} + \right. \\
& + 2l^2 \left[l^2 - 2l \frac{1-\xi}{1-\eta} \right] \left[z(l^2 + \delta^2(1-v)) + \frac{wf(\xi)}{\eta(1-\eta)} \right]^{-2} + \\
& + \frac{1}{\eta(1-\eta)} \left[-\xi(v-w)l + \left(2\xi - \xi^2 - \frac{1}{2}\xi(v+w) + \xi w \frac{\xi-\eta}{1-\eta} \right) l^2 - \right. \\
& - 2(1-\xi)\eta l^3 + \eta(1-\eta)l^4 \left. \right] \left[l^2 + \delta^2(1-v) + \frac{wf(\xi)}{\eta(1-\eta)} \right]^{-2} + \\
& + \left[-\xi + \frac{3}{2}\xi(v+w) - 3\xi w \frac{\xi-\eta}{1-\eta} + 2(1-\xi)\eta l - 4\eta(1-\eta)l^2 \right] \times \\
& \times \left[l^2 + \delta^2(1-v) + \frac{wf(\xi)}{\eta(1-\eta)} \right]^{-1} \left. \right\} + \left[\int_0^1 d\xi \frac{\xi^3}{f(\xi)} \right]^2 + \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^1 d\xi \frac{\xi^3}{f(\xi)} \int_0^1 dv \int_0^v dw \int_0^1 dz \left[-\frac{1}{2} \frac{\delta^2(v-w)w}{f(v) - \delta^2 z(v-w)w} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{4} \frac{\delta^2 v^2(v-w)w}{f(v)[f(v) - \delta^2(v-w)w]} - \frac{1}{4} \frac{\delta^2(v-w)w}{f(v) - \delta^2(v-w)w} \right]. \quad (87c)
\end{aligned}$$

(Die letzten Terme, die proportional δ^2 sind, fallen weg, wenn die Renormalisation gemäss Fall I von § 5 definiert wird.)

$$\begin{aligned}
\mu_d^{(4)} = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 dz \int_0^1 dv \int_0^v dw \left\{ \left[\frac{w\xi}{z} - \frac{(1-\xi)v^2}{z} \right] \times \right. \\
& \times \left[f(v) + \frac{wf(\xi)}{z\xi(1-\xi)} \right]^{-1} + \int_0^1 dt \frac{2\xi v^2 w}{z t^2} \left[f(v) + \frac{wf(\xi)}{t z \xi(1-\xi)} \right]^{-2} \left. \right\}, \quad (87d) \\
\mu_f^{(4)} = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \int_0^1 dz \int_0^1 dv \xi^2 (1-\xi)^2 v^3 \times \\
& \times \left[-3 + z \left(1 - \frac{2\delta^2 \xi(1-\xi)}{g(\xi)} \right) \right] [(1-v)g(\xi) + z\xi(1-\xi)f(v)]^{-1}. \quad (87f)
\end{aligned}$$

In allen diesen Ausdrücken sind die einfachsten Integrationen über einen oder mehrere der Feynman-Parameter bereits ausgeführt. Die Resultate der restlichen Integrationen sind Funktionen von δ^2 . Für π -Mesonen ($\mu = 275$ Elektronenmassen) ist $\delta^2 \approx 0,022 \ll 1$. Um analytisch weiter rechnen zu können, beschränken wir uns auf den Grenzfall

$$\delta^2 = 0. \quad (88)$$

Sollten einzelne Terme dann divergieren, so müsste man natürlich Ausdrücke der Form $\ln \delta$ usw. mitnehmen. Eine nähere Untersuchung zeigt jedoch, dass alle Ausdrücke (87a)–(87f) einzeln endlich bleiben, wenn man $\delta^2 = 0$ setzt. Das steht im Gegensatz zur Elektrodynamik⁷⁾, wo man in den zu $\mu_c^{(4)}$ und $\mu_d^{(4)}$ analogen Termen zunächst eine endliche Photonmasse einführen muss, da sie sonst divergieren würden.

Auch im Grenzfall (88) macht die Ausführung der Integrale (87a) bis (87f) den weitaus grössten Teil der ganzen Arbeit aus. Am langwierigsten sind (87a) und (87c). (87b) ist erheblich einfacher, (87d) und (87f) sind leicht. Viel hängt auch davon ab, in welcher Reihenfolge die Integrationen ausgeführt werden. Bei den ersten Integrationen werden die Ausdrücke stets umfangreicher und spalten sich auf in Terme, die bei den letzten zwei Integrationen einzeln divergieren, wenn man bis exakt zu den Grenzen integriert. Man hat deshalb, soweit nötig,

$$\int_0^1 du \int_0^u dv \dots \quad \text{durch} \quad \int_{\varepsilon_3}^{1-\varepsilon_1} du \int_{\varepsilon_1}^{u-\varepsilon_2} dv \dots$$

zu ersetzen. Für $\varepsilon_i \rightarrow 0$ müssen sich alle Divergenzen innerhalb jedes Terms $\mu_a^{(4)}$, ..., $\mu_f^{(4)}$ kompensieren, was übrigens eine gute Kontrolle für allfällige Rechenfehler bietet. Alle Integrationen sind analytisch ausführbar. Bei der zweitletzten Integration gewisser Terme stösst man auf die Funktion

$$\varphi(z) = \int_0^z d\zeta \frac{\ln(1+\zeta)}{\zeta}. \quad (89)$$

Die benötigten Eigenschaften dieser Funktion findet man z. B. in Arbeiten von POWELL¹⁶⁾ und MITCHELL¹⁷⁾. Bei der letzten Integration erhält man für alle Terme in (87a), (87b), (87c) und (87f) — abgesehen vom Faktor $(1/2\pi)^4$ — rationale Resultate und Terme der Form

$$\varphi(1) = \frac{\pi^2}{12}, \quad \varphi(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \quad (90)$$

In $\mu_a^{(4)}$ sowie in $\mu_f^{(4)}$ heben sich alle transzendenten Terme der Form (90) am Ende weg. In (87c) stösst man noch auf das Integral

$$\int_0^1 dv \frac{\ln v \ln(1-v)}{v} = \int_0^1 dv \frac{\ln v \ln(1-v)}{1-v} = \zeta(3), \quad (91)$$

wo

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1,202 \quad (92)$$

die Riemannsche ζ -Funktion vom Argument 3 bedeutet. Die Resultate sind

$$\left. \begin{aligned} \mu_a^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ \mu_b^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{8} \left[-\frac{13}{24} + \frac{1}{9}\pi^2\right] \\ \mu_c^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{61}{24} - \frac{2}{9}\pi^2 - \zeta(3)\right] \\ \mu_d^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{11}{24} - \frac{1}{18}\pi^2\right] \\ \mu_f^{(4)} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8}\right] \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Nach (84), (38), (85) und (93) erhält man somit für das anomale magnetische Moment in 2. und 4. Ordnung in der Näherung $\delta^2 = 0$.

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} f_r^2 + \mu^{(4)} f_r^4 &= - \left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^4 \left[\frac{131}{192} - \frac{1}{15}\pi^2 - \frac{1}{4}\zeta(3)\right] = \\ &= - \left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^2 \cdot 0,250 - \left(\frac{f_r}{2\pi}\right)^4 \cdot 0,166, \end{aligned} \quad (94)$$

in Kernmagnetonen $e/2M$ gemessen, während der experimentell gefundene Wert

$$\mu_{\text{exp}} = (+1,79268 \pm 0,00006) \text{ KM} \quad (95)$$

beträgt¹⁸⁾. Das magnetische Moment in 4. Ordnung hat also, wie dasjenige 2. Ordnung, das falsche Vorzeichen, wenn man nur ein neutrales Mesonfeld ankoppelt. Für den von LUTINGER⁶⁾ versuchsweise gebrauchten Wert von $f_r^2/4\pi \approx 36$ wird $\mu^{(2)} f_r^2 \approx -3$, $\mu^{(4)} f_r^4 \approx -22$. Nun sind aber die experimentellen Werte der Kopplungskonstanten selbst grössenordnungsmässig noch unsicher. Auf jeden Fall müssen in einer Theorie mit γ_5 -Kopplung die Effekte 4. Ordnung bei der Bestimmung der Kopplungskonstanten mitberücksichtigt werden*). Dann zeigt sich auch, dass man für f_r^2 wesentlich kleinere Werte bekommt¹⁵⁾¹⁹⁾. Nehmen wir versuchsweise f_r^2 um einen Faktor 10 kleiner, so wird $\mu^{(2)} f_r^2 \approx -0,3$, $\mu^{(4)} f_r^4 \approx -0,2$.

Die Resultate (93) stimmen in Vorzeichen und Grössenordnung mit den entsprechenden Ergebnissen in der Arbeit von NAKABAYASI und SATO¹¹⁾ überein, worin die magnetischen Momente der Nukleonen in 4. Ordnung der pseudoskalaren Mesontheorie durch nu-

*) Vgl. hierzu R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. 76, Seite 783.

merische Integration für $\delta^2 = 0,022$ abgeschätzt werden. Immerhin ergeben sich Abweichungen, die jedoch nicht mehr als etwa 15% betragen, ausser im Falle von $\mu_e^{(4)}$, wo sich ein Unterschied um einen Faktor 3,5 ergibt.

Eine Möglichkeit, diesen Unterschied zu erklären, könnte darin liegen, dass die Approximation (88) schlecht ist. Während in der japanischen Arbeit ein maximaler Fehler von wenigen Prozent angegeben wird, ist der Fehler, der durch das Nullsetzen von δ^2 entsteht, schwierig abzuschätzen. Er beträgt für das magnetische Moment in 2. Ordnung etwa 5%. Nur im Ausdruck $\mu_f^{(4)}$ kann man, wegen der besonderen Form des Nenners in (87f) leicht zeigen, dass der Fehler nicht mehr als etwa 1% betragen kann. Tatsächlich stimmt $\mu_f^{(4)}$ bis auf wenige Prozent mit dem entsprechenden Resultat von NAKABAYASI und SATO überein (abgesehen von einem Faktor 2, der in der japanischen Arbeit für diesen speziellen Term, und nur für diesen, hinzukommt, weil dort auch Neutronen an das Mesonfeld angekoppelt sind. Vgl. die Bemerkung hierzu in § 5 der vorliegenden Arbeit).

Eine zweite Möglichkeit könnte in der verschiedenartigen Renormalisierung der Kopplungskonstanten gesucht werden. Da in der japanischen Arbeit keine Regularisierung verwendet wird, unterscheiden sich die Renormalisationskonstanten dort von den unsrigen um endliche Summanden. Das hat dort z. B. zur Folge, dass das Neutron vom geladenen Mesonfeld her eine endliche elektrische Ladung $\sim f^2$ bekommt (die mit $\sum_i c_i = 0$ verschwinden würde), wodurch Ladungserhaltung und Eichinvarianz verlorengehen. Wahrscheinlich haben diese Differenzen bei der Renormalisierung jedoch keinen Einfluss auf die Berechnung des anomalen magnetischen Momentes.

Das Endresultat (94) stimmt mit demjenigen von NAKABAYASI und SATO im Vorzeichen überein. Beide Arbeiten kommen demnach zu der Feststellung, dass das magnetische Moment des Protons durch neutrale pseudoskalare Mesonfelder bis in 4. Ordnung nicht richtig wiedergegeben werden kann. Nach NAKABAYASI und SATO ist es in einer pseudoskalaren geladenen oder symmetrischen Theorie möglich, das richtige Protonmoment zu erhalten, jedoch wird dann das magnetische Moment des Neutrons falsch. Die besten Möglichkeiten, um die Momente für Proton und Neutron in einer pseudoskalaren Theorie bis zur 4. Ordnung richtig zu bekommen, scheint die Kombination einer symmetrischen mit einer neutralen Theorie zu bieten. Man hat dann aber Werte der Kopplungskonstanten

nötig, die es wahrscheinlich machen, dass auch die Beiträge noch höherer Ordnungen eine wichtige Rolle spielen.

Wahrscheinlich ist auch von den in der kosmischen Strahlung gefundenen V -Mesonen ein Beitrag zu den magnetischen Momenten der Nukleonen zu erwarten; doch ist im Augenblick noch so wenig über diese schweren Mesonen bekannt, dass es für eine Diskussion ihres Einflusses zu früh ist.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. PAULI, möchte ich für sein dauerndes Interesse an dieser Arbeit herzlich danken. Besonderen Dank schulde ich auch Herrn Dr. R. JOST für seine wertvollen Ratschläge beim Beginn dieser Arbeit. Weiter bin ich Herrn Prof. Dr. F. J. DYSON für eine aufschlussreiche Diskussion zu grossem Dank verpflichtet und Herrn Prof. Dr. R. KRONIG für einige wertvolle Hinweise.

Literatur.

- ¹⁾ S. TOMONAGA, Prog. Theor. Phys. **1**, 27 (1946); Z. Koba, T. TATI and S. TOMONAGA, Prog. Theor. Phys. **2**, 101, 198 (1947); S. KANESAWA and S. TOMONAGA, Prog. Theor. Phys. **3**, 1, 101 (1948); S. TOMONAGA, Phys. Rev. **74**, 224 (1948).
- ²⁾ J. S. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); Phys. Rev. **75**, 651 (1949); Phys. Rev. **76**, 790 (1949). Im Text mit S I, S II bzw. S III bezeichnet.
- ³⁾ F. J. DYSON, Phys. Rev. **75**, 486 (1949); Phys. Rev. **75**, 1736 (1949). Im Text mit D I bzw. D II bezeichnet.
- ⁴⁾ R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. **76**, 749, 769 (1949); Phys. Rev. **80**, 440 (1950).
- ⁵⁾ J. S. SCHWINGER, Phys. Rev. **73**, 416 (1948); Phys. Rev. **75**, 898 (1949); Phys. Rev. **76**, 790 (1949).
- ⁶⁾ J. M. LUTTINGER, Helv. Phys. Acta **21**, 483 (1948); K. M. CASE, Phys. Rev. **74**, 1884 (1948); Phys. Rev. **75**, 1440 (1949); Phys. Rev. **76**, 1 (1949); M. SLOTNICK and W. HEITLER, Phys. Rev. **75**, 1645 (1949); S. BOROWITZ and W. KOHN, Phys. Rev. **76**, 818 (1949); G. HEBER, Ann. d. Phys. 6. Folge, **9**, 151 und 169 (1951).
- ⁷⁾ R. KARPLUS and N. M. KROLL, Phys. Rev. **77**, 536 (1950).
- ⁸⁾ J. GÉHÉNIAU et F. VILLARS, Helv. Phys. Acta **23**, 178 (1950).
- ⁹⁾ G. KÄLLÉN, Arkiv för Fysik **2**, 187 und 371 (1950).
- ¹⁰⁾ P. T. MATTHEWS, Phil. Mag. **41**, 185 (1950).
- ¹¹⁾ K. NAKABAYASI and I. SATO, Prog. Theor. Phys. **6**, 252 (1951); Science Reports, Tôhoku Univ., first ser., **34**, 170 (1950).
- ¹²⁾ R. JOST und J. M. LUTTINGER, Helv. Phys. Acta **22**, 391 (1949).
- ¹³⁾ M. R. SCHAFFROTH, Helv. Phys. Acta **22**, 501 (1949).
- ¹⁴⁾ W. PAULI and F. VILLARS, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- ¹⁵⁾ K. M. WATSON and J. V. LEPORE, Phys. Rev. **76**, 1157 (1949).
- ¹⁶⁾ E. O. POWELL, Phil. Mag. **34**, 600 (1943).
- ¹⁷⁾ K. MITCHELL, Phil. Mag. **40**, 351 (1949).
- ¹⁸⁾ H. SOMMER, H. A. THOMAS and J. A. HIPPLE, Phys. Rev. **80**, 487 (1950).
- ¹⁹⁾ H. A. BETHE, Phys. Rev. **76**, 191 (A) (1949).

Bestimmung des magnetischen Momentes eines angeregten Kernes (Cd^{111})

von H. Aeppli, H. Albers-Schönberg, H. Frauenfelder und P. Scherrer.

Physikalisches Institut der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.

(20. II. 1952.)

Summary. A method for determining the g -factor of the intermediate state of a nuclear γ - γ -cascade is described. The method consists in measuring the angular correlation of the two successive γ -rays as a function of an external magnetic field perpendicular to the plane of the γ -rays. A full account is given of the apparatus and of the various corrections involved in the measurement.

The method has been applied to the cascade of Cd^{111} , giving a g -factor of $g = -0.28 \pm 0.05$ for the intermediate (247 KeV) level. Because this state has a spin of $5/2$, the magnetic moment becomes μ (247 KeV) $= -(0.70 \pm 0.12) \mu_k$.

I. Einleitung.

1. Übersicht.

Untersuchung und Deutung der magnetischen Momente der Atomkerne bilden in den letzten Jahren eines der zentralen Probleme der Kernphysik. Schon 1937 hat SCHMIDT¹⁾ unter Annahme eines Einteilchenmodells einfache Formeln für den Zusammenhang zwischen Spin und magnetischem Moment der Kerne aufgestellt (Schmidt-Linien). Das damals vorliegende Material wurde in den letzten Jahren, hauptsächlich durch Kernresonanzexperimente, sehr stark erweitert. Andererseits wurde ebenfalls in den letzten Jahren die alte Idee²⁾ einer weitgehend auf dem Einteilchenmodell aufgebauten Schalenstruktur der Kerne wieder aufgegriffen, erweitert und teilweise theoretisch begründet³⁻⁶⁾ *). Nach dem Einteilchenmodell sollte zu erwarten sein, dass die magnetischen Momente aller Kerne auf den Schmidt-Linien liegen. Experimentell hat sich jedoch gezeigt, dass mit wenigen Ausnahmen alle Momente *zwischen* diesen Kurven liegen. Diese Abweichung hat schon zu sehr vielen Deutungsversuchen Anlass gegeben, z. B. ⁸⁻¹⁵⁾.

Alle bisherigen experimentellen Methoden ermöglichen die Messung des magnetischen Momentes nur im Grundzustand stabiler

*) Eine gute Übersicht über die Schalenstruktur z. B. bei HEISENBERG⁷⁾.

oder eventuell langlebiger radioaktiver Kerne¹⁶⁾. In keinem Falle aber ist das magnetische Moment in mehr als einem Zustand des gleichen Kernes bekannt. Für eine Entscheidung zwischen den verschiedenen oben erwähnten Theorien wäre jedoch die Kenntnis der magnetischen Momente in angeregten Zuständen von grosser Bedeutung.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der magnetischen Momente des Kernes in einem kurzlebigen angeregten Zustand bietet, wenigstens für gewisse Fälle, die in den letzten Jahren entwickelte Methode der Messung der Richtungskorrelation zweier von einem Kern sukzessive emittierter γ -Strahlen. Die von HAMILTON¹⁷⁾ vorausgesagte Anisotropie solcher Winkelverteilungen ist zuerst von BRADY und DEUTSCH¹⁸⁾ eindeutig festgestellt worden. Die Richtungskorrelation hängt von der Multipolordnung der beiden Strahlungen und von den Drehimpulsen der drei beteiligten Niveaus ab. Schon HAMILTON¹⁷⁾ hat darauf hingewiesen, dass die Anisotropie nur dann den theoretischen Wert erreicht, wenn der mittlere Zustand der Kaskade nicht durch das eventuell vorhandene enorme Magnetfeld der Elektronenhülle (10^5 bis 10^6 Oersted) gestört wird. GOERTZEL¹⁹⁾ hat später diese Idee aufgenommen und den Einfluss der Atomhülle auf die Richtungskorrelation berechnet. Zusätzlich hat er gezeigt, dass durch ein starkes Magnetfeld, welches in Richtung eines Quants angelegt wird, eine durch das Magnetfeld der Hülle verursachte Störung weitgehend aufgehoben werden kann. BRADY und DEUTSCH²⁰⁾ haben erwähnt, dass durch Beobachtung der Richtungskorrelation in einem äusseren Magnetfeld bei genügend langer Halbwertszeit des mittleren Zustandes und bei vernachlässigbar kleinen Hüllenfeldern der g -Faktor des mittleren Zustandes gemessen werden kann.

Versuche von BRADY und DEUTSCH²⁰⁾, den Einfluss verschiedener chemischer Bindungen und den eines äusseren Magnetfeldes auf die Richtungskorrelation einiger Isotope (Ti^{46} , Ni^{60} , Sr^{88} , Pd^{106} , Ba^{134}) nachzuweisen, verliefen ergebnislos.

Ein für solche Untersuchungen sehr günstiger Fall liegt in der γ - γ -Kaskade des Cadmiumisotopes Cd^{111} vor, dessen Zerfallsschema von MCGINNIS²¹⁾ sehr sorgfältig untersucht worden ist. Die Anisotropie der Kaskade ist zuerst von BOEHM und WALTER²²⁾ zu $A = -0,07 \pm 0,04$ bestimmt worden. Da die Halbwertszeit des mittleren Zustandes der Kaskade relativ gross ist ($8,6 \cdot 10^{-8}$ sec), ist zu erwarten, dass sich die Richtungskorrelation sowohl durch ein äusseres Magnetfeld von ca. 10000 Oersted, wie auch durch innere Felder beeinflussen lässt. Die Beeinflussung durch innere Felder kann durch Wechselwirkung des magnetischen Kernmomentes mit

einem Magnetfeld oder auch durch Kopplung des elektrischen Kernquadrupolmomentes mit einem inhomogenen elektrischen Feld erfolgen. Diese Felder können durch die eigene Elektronenhülle oder durch benachbarte Atome erzeugt werden. Ein erster Versuch zur Feststellung einer Beeinflussung durch innere Felder verlief jedoch auch an diesem Isotop erfolglos²³⁾.

Der erste eindeutige Nachweis eines solchen Effektes ergab sich durch Messung der Korrelation an Quellen, bei denen das Cd^{111} in verschiedene Medien eingebaut wurde²⁴⁻²⁶⁾. Beim Einbau des Cd^{111} in Ionenkristalle verschwindet die Anisotropie vollständig, beim Einbau in Silber steigt sie dagegen über den früher gemessenen Wert hinaus bis auf $A = -0,20 \pm 0,01$. Die verschiedenen Quellen gestatten nun, in einem äusseren Magnetfeld die beiden folgenden Effekte zu untersuchen: Einerseits kann bei Quellen maximaler Anisotropie ein Magnetfeld senkrecht zur Ebene der beiden Quanten angelegt werden. Dann lässt sich aus der Schwächung der Anisotropie durch das Magnetfeld mit Hilfe der Formeln von ALDER²⁷⁾ 28) der g -Faktor des mittleren Zustandes bestimmen. Andererseits kann mit Quellen kleinerer oder verschwindender Anisotropie der von GOERTZEL¹⁹⁾ vorgeschlagene Versuch einer Wiederherstellung der ungestörten Richtungskorrelation durch Anlegen eines Magnetfeldes in Richtung des einen Quantes ausgeführt werden. Ein negatives Resultat dieses Versuches würde darauf hinweisen, dass die Störung nicht durch das Magnetfeld der Hülle, sondern durch andere Felder erfolgt.

In der vorliegenden Arbeit berichten wir über die Untersuchung der ersten der beiden erwähnten Möglichkeiten, die Bestimmung des g -Faktors des tiefsten angeregten Zustandes von Cd^{111} . Die provisorischen Messungen sind bereits in einer kurzen Mitteilung veröffentlicht worden²⁹⁾. Die Untersuchung der zweiten Möglichkeit ist zur Zeit im Gange.

Damit ist in einem ersten Fall das magnetische Moment eines Kernes in zwei Zuständen bekannt. Obwohl die Anwendung dieser Methode an viele Voraussetzungen gebunden ist, sollte es trotzdem möglich sein, weitere angeregte Zustände damit zu untersuchen.

2. Theorie.

Wir beschränken uns darauf, die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendigen Formeln zu zitieren und eine einfache klassische Interpretation zu geben. Für alle weiteren Angaben verweisen wir auf die Arbeiten von ALDER²⁷⁾ 28), denen wir hier folgen.

Ausgehend von einer Formel von GOERTZEL¹⁹⁾, zeigt ALDER, dass für die Emissionswahrscheinlichkeit zweier sukzessiver Quanten mit den Richtungen \vec{k}_1 und \vec{k}_2 in einem Magnetfeld gilt:

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{r,k} G_k^r a_k \frac{1}{2^{k+1}} Y_k^r(\vec{k}_1) Y_k^{r*}(\vec{k}_2). \quad (1)$$

Dabei sind $Y_k^r(\vec{k}_i)$ Kugelfunktionen (spherical harmonics). Die Koeffizienten a_k sind vollständig unabhängig vom Magnetfeld am Ort des Kerns, der ganze Einfluss des Feldes steckt in den Schwächungsfaktoren G_k^r . In diesem Ausdruck (1) ist zunächst sowohl die Wirkung des magnetischen Momentes der Elektronenhülle wie auch diejenige eines äusseren Magnetfeldes enthalten. Für den uns interessierenden Fall, in welchem nur ein äusseres Magnetfeld vorhanden ist, das magnetische Moment der Hülle also verschwindet, folgt:

$$G_k^r = \frac{1}{(1 - i r \omega \tau)} \quad (\text{unabhängig von } k) \quad (2)$$

wobei

$$\omega = \frac{g \mu_K H}{\hbar} \quad (3)$$

ist. Hierin bedeuten g den g -Faktor, τ die Lebensdauer des mittleren Zustandes und μ_K das Kernmagneton.

Wenn das Magnetfeld senkrecht zur Ebene der beiden registrierten Quanten steht, vereinfacht sich Formel (1) weiter zu:

$$W(\Theta, H) = \sum_r \frac{b_r}{1 - i r \omega \tau} e^{i r \Theta}. \quad (4)$$

Dabei bedeutet Θ den Winkel zwischen den beiden Quanten, die Koeffizienten b_r sind ebenfalls feldunabhängig. Das magnetische Feld bewirkt also eine Schwächung und gleichzeitig eine Phasenverschiebung.

Falls die Detektoren die beiden emittierten Quanten nicht unterscheiden können, was bei den meisten experimentellen Anordnungen zutrifft, wird die Phasenverschiebung herausgemittelt, und es folgt für den Schwächungsfaktor:

$$\langle G_k^r \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - i r \omega \tau} + \frac{1}{1 + i r \omega \tau} \right] = \frac{1}{1 + (r \omega \tau)^2}. \quad (5)$$

Eine Messung der Richtungskorrelation als Funktion der Feldstärke mit solchen Detektoren kann also nur den Betrag, nicht aber das Vorzeichen des g -Faktors liefern.

Für die in der vorliegenden Arbeit untersuchte γ - γ -Kaskade des Isotops Cd^{111} wurde festgestellt, dass sich die Korrelationsfunktion $W(\Theta)$ bei Abwesenheit eines äusseren Magnetfeldes sehr gut durch eine Verteilungsfunktion der Form

$$W(\Theta) = 1 + A_2 \cos^2 \Theta \quad (6)$$

darstellen lässt (vgl. Abschnitt 3). Damit reduziert sich die Formel (4) — unter Annahme von idealen Detektoren, die nur für je eine Quantensorte empfindlich sind — auf folgenden Ausdruck:

$$W(\Theta, H) = 1 + \frac{b_2}{1 + (2 \omega \tau)^2} \cdot [\cos 2 \Theta \mp 2 \omega \tau \sin 2 \Theta], \quad (7)$$

wobei zwischen A_2 und b_2 die einfache Beziehung besteht:

$$b_2 = \frac{A_2}{2 + A_2}. \quad (8)$$

Das Vorzeichen des $\sin 2\Theta$ -Termes hängt von der Richtung des Magnetfeldes ab.

Sind beide Detektoren wiederum gleich empfindlich, so verschwindet der $\sin 2\Theta$ -Term und es bleibt

$$W(\Theta, H) = 1 + b_2' \cos 2 \Theta$$

mit $b_2' = \frac{b_2}{1 + (2 \omega \tau)^2}.$

(9)

Diese Formel gilt jedoch nur dann, wenn die Richtungskorrelation ohne Rücksicht auf die individuellen Lebensdauern im mittleren Zustand gemessen wird. Die für solche Messungen verwendeten Koinzidenzanordnungen besitzen jedoch ein gewisses Auflösungsvermögen, das durch die Auflösungszeit τ_0 charakterisiert wird. Da das zweite Quant aber immer erst eine bestimmte Zeit t nach dem ersten emittiert wird, registriert die Koinzidenzanordnung das Quantenpaar nicht mehr, wenn $t > \tau_0$. Gerade die Winkelverteilung solcher „langlebiger“ Prozesse wird durch das Magnetfeld am stärksten beeinflusst. Es ist deshalb zu erwarten, dass durch das endliche Auflösungsvermögen der Verlauf der Anisotropie in Funktion der Feldstärke H verfälscht wird.

ALDER*) hat für den Fall, dass nur Zerfallsprozesse registriert

*) Mündliche Mitteilung.

werden, die innerhalb der Auflösungszeit τ_0 erfolgen, die folgende Formel angeben:

$$\left. \begin{aligned} W(\Theta, H, \tau_0) &= 1 + b_2'' \cos 2 \Theta \\ b_2'' &= b_2' \frac{1 - e^{-\tau_0/\tau} [\cos(2 \omega \tau_0) - 2 \omega \tau \sin(2 \omega \tau_0)]}{1 - e^{-\tau_0/\tau}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Es ist zu bemerken, dass man nach dieser Formel bei fester Feldstärke H durch Variation der Auflösungszeit τ_0 grundsätzlich den g -Faktor auch messen kann.

Um die Korrektur (10) möglichst klein zu halten, sollte man die Auflösungszeit τ_0 möglichst gross wählen. Dadurch steigt aber die Zahl der „zufälligen Koinzidenzen“ stark an (vgl. Abschnitt 9). Der optimale Wert von τ_0 wird durch die Messtechnik bestimmt.

Die oben angegebenen Formeln sind wellenmechanisch abgeleitet worden. Wir wollen im Folgenden noch kurz zeigen, dass auch eine einfache halbklassische Überlegung die Formeln (7), (9) und (10) liefert. Wir skizzieren die Rechnung, weil sie zeigt, dass das Vektormodell und der klassische Begriff der Präzession des Kernspins um die Richtung des angelegten Feldes den vorliegenden Fall wiedergeben:

Die Larmorfrequenz ω der Präzession des Spins um die Feldrichtung wird durch den Ausdruck (3) gegeben. Dabei hängt der Drehsinn vom Vorzeichen des g -Faktors ab (positiver Drehsinn bei negativem Wert von g). Wird zur Zeit $t = 0$ der erste γ -Strahl emittiert und zur Zeit t der zweite, so beträgt der zurückgelegte Präzessionswinkel ψ :

$$\psi = \omega \cdot t.$$

Wenn die Feldrichtung senkrecht zur Ebene der Quanten steht, geht die Korrelationsfunktion $W^*(\Theta)$ für dieses Quantenpaar über in $W^*(\Theta - \psi(H))$. Gemessen wird der Mittelwert über alle diese individuellen Funktionen:

$$W(\Theta, H) = \frac{\int_0^{\tau_0} W^*(\Theta - \omega t) e^{-t/\tau} \cdot dt}{\int_0^{\tau_0} e^{-t/\tau} \cdot dt} \quad (11)$$

Die Integration erstreckt sich von $t = 0$ bis zur Auflösungszeit τ_0 der Koinzidenzanordnung. Nun ist

$$\begin{aligned} W^*(\Theta, H) &= 1 + b_2 \cos 2(\Theta - \psi) \\ &= 1 + b_2 (\cos 2 \Theta \cos 2 \psi + \sin 2 \Theta \sin 2 \psi). \end{aligned}$$

Damit führt der Ausdruck (11) auf eine elementare Integration und man erhält direkt für unendlich grosse Auflösungszeit τ_0 die Formeln (7) bzw. (9) und für endliches τ_0 den Ausdruck (10).

3. Die γ - γ -Kaskade des Cd^{111} .

Damit durch den Einfluss eines äusseren Magnetfeldes auf die Richtungskorrelation einer γ - γ -Kaskade der g -Faktor des mittleren Zustandes bestimmt werden kann, muss die Kaskade verschiedene Bedingungen erfüllen:

1. Die γ -Strahlen der Kaskade sollen gut nachweisbar sein und eine messbare Anisotropie der Richtungskorrelation aufweisen. Das Zerfallsschema muss gut bekannt sein.

2. Durch geeignete Herstellung der radioaktiven Quellen soll die Elektronenhülle der aktiven Atome und deren Umgebung so beschaffen sein, dass die Störung durch innere elektrische und magnetische Felder am Ort des Kernes vernachlässigbar ist.

3. Die Halbwertszeit des mittleren Zustandes darf weder zu gross noch zu klein sein. Ist die Halbwertszeit kleiner als etwa 10^{-8} sec,

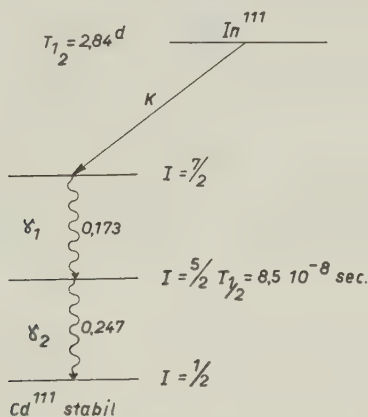


Fig. 1.
Zerfallsschema des In^{111} .

so genügen die heute im Laboratorium verfügbaren Feldstärken nicht, um die Anisotropie merklich zu schwächen. — Die obere Grenze der Halbwertszeit wird dagegen durch verschiedene Faktoren festgelegt (zufällige Koinzidenzen, Störung durch magnetische Momente benachbarter Atome und Kerne) und wird zwischen 10^{-3} und 10^{-5} sec liegen.

Die Kaskade des Cd^{111} erfüllt alle diese Forderungen. Die uns interessierenden Niveaus dieses von MCGINNIS²¹⁾ untersuchten Isotops sind in Fig. 1 dargestellt.

Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ des mittleren Zustandes wurde von DEUTSCH³⁰⁾, MCGOWAN³¹⁾ und STEFFEN³²⁾ gemessen. Wir haben

den Wert von STEFFEN, $T_{1,2} = (8,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-8}$ sec, verwendet. Dieser Wert stimmt mit unserer Messung der Halbwertszeit durch die Koinzidenzverluste (vgl. Abschnitt 9) sehr gut überein.

Die Richtungskorrelation der Kaskade ist von AEPPLI, FRAUENFELDER und WALTER²⁶⁾ mit Quellen, in denen die radioaktive Muttersubstanz In^{111} in Silber eingebaut ist, ausführlich gemessen und diskutiert worden. Das Ergebnis der Messungen lässt sich darstellen durch

$$W(\Theta) = 1 + A_2 \cos^2 \Theta + A_4 \cos^4 \Theta,$$

$$A_2 + A_4 = -0,20 \pm 0,01,$$

$$|A_4| < 0,1.$$

Aus der Interpretation der Richtungskorrelation folgt dann eindeutig, dass der Beitrag des \cos^4 -Termes vernachlässigbar klein ist.

Für die vorliegende Untersuchung haben wir ausschliesslich Quellen benützt, in denen das radioaktive Isotop mit Hilfe der Doppelstrahlmethode³⁵⁾ in Silber eingebaut worden ist. Bei der Herstellung wurde die aus Aluminium bestehende Auffängerfolie auf einer Temperatur von ca. 300°C gehalten.

II. Apparatur.

Alle Richtungskorrelationsmessungen dieser Arbeit wurden mit Szintillationszählern ausgeführt. Der Vorteil gegenüber den Geiger-Müller-Zählern liegt einerseits in der viel grösseren Ansprechwahr-

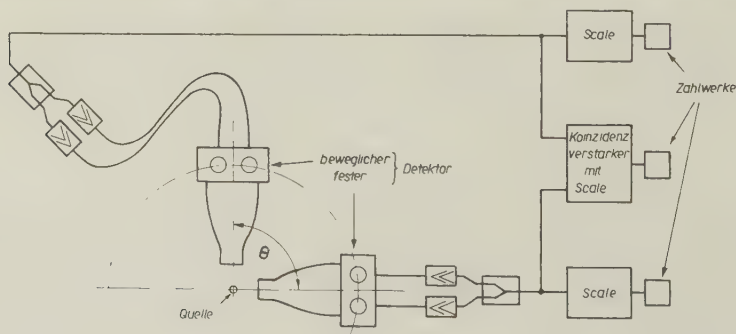


Fig. 2.
Blockschema.

scheinlichkeit für γ -Quanten (vgl. Abschnitt 8) und andererseits in der kleineren Totzeit des Zählers. Die Statistik der registrierten Koinzidenzen wird damit in der gleichen Messzeit sehr viel besser als bei Zählrohrmessungen.

4. Die γ -Detektoren und die Koinzidenzmischung.

Das Prinzip der Anordnung geht aus dem Blockschema, Fig. 2, hervor. Der bewegliche Detektor wird um das Zentrum, wo sich die Quelle befindet, gedreht und schliesst mit dem feststehenden Detektor den Winkel θ ein.

Die γ -Detektoren der beiden Kanäle sind gleich konstruiert. Jeder besitzt einen zylindrischen Anthracenkristall von 20 mm Durchmesser und 24 mm Länge und je zwei Elektronenvervielfacher (Photomultiplier „1 P 21“). Das Lichtleitersystem zwischen dem Anthracenkristall und den beiden Multipliern besteht aus zwei zusammenge kitteten Plexiglaskörpern, die je die Gestalt eines angeschnittenen

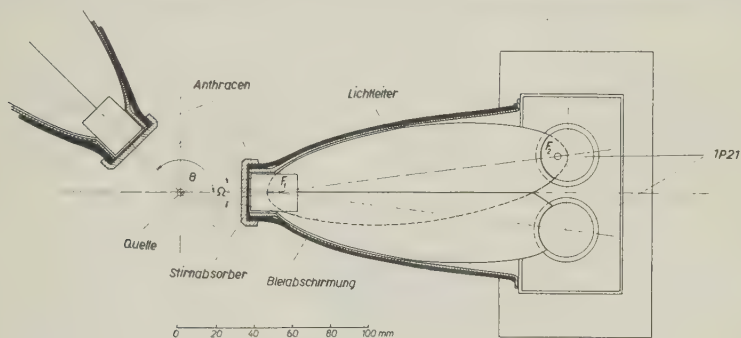


Fig. 3.
 γ -Detektoren.

Rotationsellipsoides haben (vgl. Fig. 3). Der Vorteil eines ellipsoidisch geformten Lichtleiters gegenüber normalen zylindrischen Lichtleitern geht aus einer Brennstrahleneigenschaft der Ellipse hervor und ist besonders ausgeprägt bei nicht zu grossen Leuchtstoffvolumina. Der Grund, warum man bei jedem Kristall zwei Multiplier verwendet, erklärt sich durch folgende Überlegung: Da eine möglichst grosse Ansprechwahrscheinlichkeit erwünscht ist, muss man erstens die Multiplier mit relativ hohen Spannungen betreiben und zweitens die Impulse wenig diskriminieren, um Impulse kleinerer Amplituden nicht zu verlieren. Um dennoch nicht einen unerträglich hohen Nulleffekt zu bekommen, verwendet man für jeden Zähler zwei Multiplier. In einer Koinzidenzmischung werden die statistisch verteilten Untergrundimpulse, die hauptsächlich durch die thermischen Elektronen der Photokathode bedingt sind, grösstenteils unterdrückt, während die Impulse, hervorgerufen durch die Szintillationen, koinzident in die Mischung gelangen und damit durchgelassen werden. Da man zwischen dem beweglichen Detektor und

dem zugehörigen feststehenden Verstärker relativ lange Kabel benötigt, kommt unmittelbar nach den Vervielfachern je eine Kathodenfolgestufe. Nach den dreistufigen Verstärkern folgt die genannte Koinzidenzmischung (eine Germaniumdioden-Schaltung), dann der Diskriminator, ein Multivibrator und nochmals eine Kathodenfolgestufe vor dem längeren Kabel zu dem Koinzidenzverstärker der beiden Kanäle*). Das Auflösungsvermögen, charakterisiert durch die Auflösungszeit τ_0' (gemessen aus den zufälligen Koinzidenzen), ist bei der genannten Diodenkoinzidenzmischung verhältnismässig klein: $\tau_0' \approx 2 \cdot 10^{-6}$ sec. Mit gleichem apparativem Aufwand könnte dieses nur auf Kosten der Verstärkung und damit auch der Ansprechwahrscheinlichkeit wesentlich verbessert werden. Für schwächere Quellen wird daher der Nulleffekt noch nicht genügend reduziert. Deshalb werden die Gehäuse der Multiplier noch mit Eiswasser gekühlt. Der Untergrund sinkt damit nicht nur auf ein für unsere Messungen gut erträgliches Mass (ca. 200 min^{-1}), sondern ist auch konstant.

Die Koinzidenzmischstufe der beiden Kanäle besteht aus einem Triodenpaar mit gemeinsamem Arbeitswiderstand³⁴⁾. Ihr Auflösungsvermögen kann in fünf Werten über den Bereich von $\tau_0 \approx 1 \cdot 10^{-7}$ bis $6 \cdot 10^{-7}$ sec variiert werden. Obwohl die Auflösungszeit τ der Diodenkoinzidenzmischung rund zehnmal grösser ist, hat man selbst beim besten Auflösungsvermögen des Koinzidenzverstärkers kaum spürbare Verluste an wahren Koinzidenzen. Diese Erscheinung lässt sich folgendermassen begründen: Der Koinzidenzverstärker arbeitet differenzierend; wenn nun die sehr steilen Anstiegsflanken der Impulse der beiden Kanäle innerhalb der Auflösungszeit des Koinzidenzverstärkers ankommen, gibt es keine Verluste. Diese rasche Folge der Impulsflanken kann bei völlig symmetrischem Aufbau der beiden Kanäle eben auch bei relativ schlechtem Auflösungsvermögen der Diodenkoinzidenzmischung erreicht werden. Hingegen hat sich tatsächlich gezeigt, dass die Koinzidenzverluste stark abhängig sind von kleinen Asymmetrien der beiden Kanäle.

5. Automatische Anordnung.

Um verschiedene störende Einflüsse der Apparatur auf die Messung zu eliminieren, ist es günstig, die verschiedenen Winkelpositionen während einer Messreihe sehr oft zu wechseln, vgl. ³⁵⁾. Für unsere Messungen am In^{111} mit der Halbwertszeit $T_{1,2} = 2,84^{\text{a}}$ sind halbstündige Messintervalle zweckmässig.

*) Herrn Dr. F. HUMBEL sind wir für die Entwicklung des elektronischen Teiles zu bestem Dank verpflichtet.

Da die Apparatur während vieler Monate ständig in Betrieb stand, war es nötig, die Einstellung der Winkelpositionen, die Steuerung der Messintervalle und die Registrierung der Stosszahlen zu automatisieren. Von einer zentralen Synchronuhr aus wird ein Motor gesteuert, der über eine Exzentrerscheibe und eine Pleuelstange die Positionswechsel während den Pausen zwischen den Messintervallen besorgt. Die gleiche Uhr unterbricht auch während des Positionswechsels die Registrierung. (Der relative Fehler der Messzeitintervalle ist kleiner als $2^0_{\text{‰}}$.) Die entsprechend umgesetzten Koinzidenz- und Einzelstosszahlen — und zur Kontrolle auch die Winkelpositionen — werden ebenfalls automatisch registriert.

6. Der Magnet.

Für unsere Messungen, in denen die Feldrichtung senkrecht zu den beiden Quanten (Messebene) steht, haben wir den in Fig. 4 dargestellten Magneten verwendet. Das Feld ist homogen im Bereich

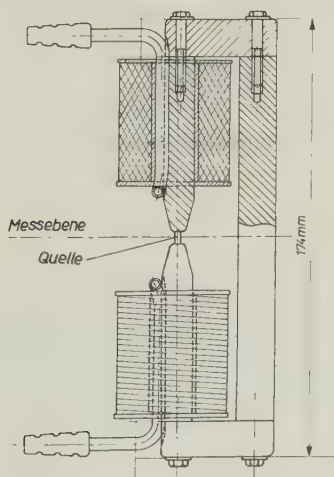


Fig. 4.

Magnet.

der Quelle, es wurde mit einer kleinen Spule (ca. 8 mm^2 Fläche, 200 Windungen) und ballistischem Galvanometer gemessen. Der relative Fehler in der Bestimmung der magnetischen Feldstärke beträgt ca. 4% und die maximal erreichbare Feldstärke rund 7300 Oersted.

III. Messtechnik, Hilfsmessungen und Korrekturen.

In diesem Kapitel werden die für die Messung und Auswertung verwendeten Methoden beschrieben. Da diese auch für andere Koinzidenz- und Richtungskorrelationsmessungen von Bedeutung sind, fassen wir den Formalismus etwas allgemeiner, als für unsere Zwecke notwendig wäre.

7. Experimentelle Bestimmung der Verteilungsfunktion $W(\Theta)$.

Wir wollen für das Folgende voraussetzen, dass die beiden Detektoren gleich empfindlich seien. Diese Annahme ist in Wirklichkeit zwar nicht exakt erfüllt (Empfindlichkeitsunterschiede bei den verwendeten Photomultipliern), sie ist aber gerechtfertigt, da sich ein nicht allzu grosser Unterschied der Ansprechwahrscheinlichkeiten in keiner Weise auf die Messung der Richtungskorrelation auswirkt.

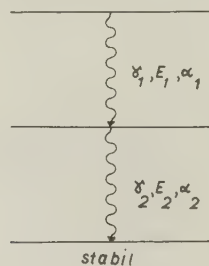


Fig. 5.

Fig. 5 stelle eine γ - γ -Kaskade dar. E_i bedeute die Quantenenergie $h\nu_i$ von γ_i ($i = 1$ und 2). α_i sei der Konversionskoeffizient, definiert als das Verhältnis der Gesamtzahl der Konversionselektronen zur Zahl der γ -Quanten ($N_e:N_\gamma$). Sei N die Zahl der Kernumwandlungen pro Zeiteinheit (Quellenstärke), so gilt für die Zahl der emittierten γ -Quanten

$$N_{\gamma_i} = \frac{N}{1 + \alpha_i} \quad i = 1, 2.$$

Die Zahl Z der in einem Zähler registrierten Quanten beträgt

$$Z = N\Omega \left[\frac{a_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1} + \frac{a_2 \varepsilon_2}{1 + \alpha_2} \right]. \quad (1)$$

Dabei besitzen die einzelnen Faktoren die übliche Bedeutung: Ω ist

der sensible Raumwinkel (gemessen in Einheiten 4π) des Zählers. Die Absorptionsfaktoren a_i der Absorber vor den Detektoren, welche zur Abschirmung zugestreuter Quanten benötigt werden (vgl. Abschnitt 10), sind gegeben durch

$$a_i = e^{-\mu_i x}.$$

Dabei bedeuten μ_i die Absorptionskoeffizienten und x die Dicke des Absorbers. Da sich bei Richtungskorrelationsmessungen die Absorber im allgemeinen unmittelbar vor dem Kristall befinden, und da man keine scharf gebündelten Strahlen hat, sind die Absorptionskoeffizienten μ_i kleiner als die in der Literatur angegebenen Werte. (Man muss sie daher in einer gesonderten Messung bestimmen.) ε_i ist die Ansprechwahrscheinlichkeit für die γ -Strahlung der Energie E_i .

Für die Anzahl K der registrierten Koinzidenzen ergibt sich

$$K = 2 N \Omega_f \Omega_b \cdot \frac{a_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1} \cdot \frac{a_2 \varepsilon_2}{1 + \alpha_2} \cdot W(\Theta). \quad (2)$$

(Die Indizierung f und b deutet auf den feststehenden bzw. beweglichen Detektor hin.) $W(\Theta)$ ist die Richtungskorrelationsfunktion, und zwar so normiert, dass

$$\int_{\text{Kugel}} W(\Theta) d\Omega = 1.$$

Um $W(\Theta)$ zu bestimmen, bildet man die Koinzidenzrate KR , definiert als Quotient von K und Z . Dadurch fällt die Präparatstärke N , die eine Funktion der Zeit ist, aus den weiteren Rechnungen. Weil die Quelle nie ideal zentriert werden kann, bezieht man K auf die Einzelstosszahl Z_b des beweglichen Detektors (vgl. WALTER³⁵):

$$KR = \frac{K}{Z_b} = \frac{\Omega_f \frac{a_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1} \cdot \frac{a_2 \varepsilon_2}{1 + \alpha_2}}{\frac{a_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1} + \frac{a_2 \varepsilon_2}{1 + \alpha_2}} \cdot W(\Theta) = \text{const.} \cdot W(\Theta). \quad (3)$$

Die Konstante, der keine weitere Bedeutung zukommt, wird in einer Ausgleichsrechnung bestimmt bzw. eliminiert (vgl. Abschnitt 13).

8. Bestimmung von absoluten Quellenstärken und Ansprechwahrscheinlichkeiten.

Ausser dem Ausdruck für $W(\Theta)$ können noch die drei weiteren unbekannten Grössen N , ε_1 und ε_2 , die für unsere Untersuchungen zwar weniger wesentlich sind, betrachtet werden. Für sie stehen aber nur zwei Gleichungen zur Verfügung, so dass sie sich nur bei Kenntnis einer zusätzlichen Angabe oder unter vereinfachenden Annahmen einzeln bestimmen lassen. Mit den Ausdrücken (1) und (2) erhält man

$$N = \frac{Z_f \cdot Z_b}{K(\Theta)} \cdot \frac{2 \frac{a_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1} \cdot \frac{a_2 \varepsilon_2}{1 + \alpha_2}}{\left[\frac{a_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1} + \frac{a_2 \varepsilon_2}{1 + \alpha_2} \right]^2} \cdot W(\Theta). \quad (4)$$

Für den Fall, dass $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$ ist, kann man, ohne einen grossen Fehler zu begehen, mit dem Produkt $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ kürzen. Damit folgt

$$N = \frac{Z_f \cdot Z_b}{K(\Theta)} \cdot C \cdot W(\Theta), \quad \text{mit} \quad C = \frac{2 a_1 a_2 (1 + \alpha_1) (1 + \alpha_2)}{[a_1(1 + \alpha_2) + a_2(1 + \alpha_1)]^2}.$$

Der Wert der Konstanten C liegt in der Nähe von $1/2$. Ist der ungefähre Verlauf von ε in Funktion der γ -Energie bekannt, so lässt sich dieser Fehler durch eine entsprechende Korrektur noch wesentlich verkleinern.

Ist $W(\Theta)$ von der Form $1 + A \cos^2 \Theta$, so liefert die Normierung

$$N = \frac{Z_f \cdot Z_b}{K(\pi/2)} \cdot \left(1 + \frac{A}{3}\right) \cdot C. \quad (5)$$

Dabei muss K auf allfällige Koinzidenzverluste korrigiert sein.

Mit den Formeln (1) und (5) kann man schliesslich die Ansprechwahrscheinlichkeit ermitteln. Allerdings ist dies nur möglich für einen Mittelwert von ε_1 und ε_2 : Setzt man $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}$, so erhält man

$$\bar{\varepsilon}_{(f)} = \frac{K(\Theta)}{Z_b \cdot \Omega_f} \cdot \frac{1}{W(\Theta)} C', \quad \text{wo} \quad C' = \frac{a_1(1 + \alpha_2) + a_2(1 + \alpha_1)}{2 a_1 a_2}.$$

Oder wieder mit obiger Normierung:

$$\bar{\varepsilon}_{(f)} = \frac{K(\pi/2)}{Z_b \cdot \Omega_f} \cdot \frac{1}{1 + A/3} \cdot C'. \quad (6)$$

(Analoge Ausdrücke erhält man bei Vertauschung der Indices f und b .)

Diese Methode zur Bestimmung der Ansprechwahrscheinlichkeit ist um so besser, je kleiner die Differenzen zwischen ε_1 und ε_2 , oder

zwischen $a_1/(1 + \alpha_1)$ und $a_2/(1 + \alpha_2)$ sind. Einfach zu diskutieren sind die beiden folgenden Grenzfälle, 1. wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ist die Methode exakt, und 2. wenn $a_1/(1 + \alpha_1) = a_2/(1 + \alpha_2)$, stellt ε das harmonische Mittel von ε_1 und ε_2 dar, d. h. dann ist $\bar{\varepsilon} = (2 \varepsilon_1 \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Für einen bestimmten Szintillationskristall lässt sich die maximale Ansprechwahrscheinlichkeit theoretisch ermitteln. Wir haben dabei angenommen, dass nur der Comptoneffekt zur Zählung beiträgt. Dies ist für Anthracenkristalle im Energiebereich 0,1 bis über 2 MeV gerechtfertigt, da einerseits der Photoeffekt über 0,1 MeV keine Rolle mehr spielt, und andererseits die Paarzerzeugung unter 2 MeV noch nicht wesentlich auftritt. Für die in unseren Detektoren verwendeten Kristalle haben wir die theoretische Ansprechwahrscheinlichkeit mit Hilfe der Formel von KLEIN-NISHINA berechnet;

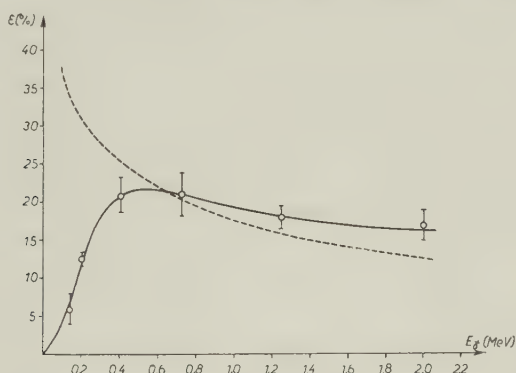


Fig. 6.

Ansprechwahrscheinlichkeit in Funktion der γ -Energie.

sie ist in Fig. 6 gestrichelt eingezeichnet. Die ausgezogene Kurve entspricht den gemessenen Werten. Die Grenze, wo die Ansprechwahrscheinlichkeit die theoretischen Werte erreicht, ist nur von apparativen Daten abhängig. Dass die gemessenen Werte teilweise über der berechneten Kurve liegen, hängt einerseits damit zusammen, dass im Plexiglaskörper (Lichtleiter) Quanten in den Kristall zurückgestreut werden oder dass Quanten durch Streuung am Bleimantel in den Kristall gelangen. Andererseits hat man auch mit entsprechenden β -Detektoren festgestellt, dass bei zunehmenden β -Energien die Ansprechwahrscheinlichkeit beträchtlich über 100% steigt. Es soll sich dabei entweder um verzögerte kleine Lichtblitze im Anthracen oder um eine Art Malter-Effekt an den Elektroden des Multipliers handeln³⁶⁾³⁷⁾. (Die registrierten zusätzlichen Impulse, die durch verzögerte Lichtblitze oder Malter-Effekte ent-

stehen, geben keinen Anlass zu Koinzidenzen, so dass man sie bei einer Quellenstärkebestimmung von den Einzelstosszahlen subtrahieren muss. Durch Hilfsmessungen kann man Auskunft bekommen über den Anteil des Überschusses, der bedingt ist durch die in den Kristall hineingestreuten Quanten. Der Rest des Überschusses ist dann der Anteil, den man von der Einzelstosszahl zu subtrahieren hat.)

Die Grösse der Ansprechwahrscheinlichkeit zeigt die Überlegenheit der Szintillationszähler bei Koinzidenzmessungen gegenüber den früher verwendeten Zählrohren. Da die Zahl der Koinzidenzen proportional dem Produkt der Ansprechwahrscheinlichkeit beider Zähler ist, wird die Leistung um einen Faktor gesteigert, der gleich dem Quadrate des Verhältnisses der Ansprechwahrscheinlichkeiten ist. Im Falle der hier untersuchten γ - γ -Kaskade des Cd^{111} beträgt die mittlere Ansprechwahrscheinlichkeit für unsere Szintillationszähler rund 12,5%, die von guten γ -Zählrohren 1% (BRADT et al.³⁸) und neuere unveröffentlichte Messungen aus unserem Institut). In gleichen Messzeiten zählen wir also rund 150mal mehr Koinzidenzen als bei Verwendung von Zählrohren. Da ferner Szintillationszähler bedeutend kleinere Totzeiten besitzen, können grössere Einzelstosszahlen zugelassen werden, wodurch die Statistik ebenfalls verbessert wird.

9. Zufällige Koinzidenzen, Koinzidenzverluste.

Das endliche Auflösungsvermögen des Koinzidenzverstärkers, das wir durch die Auflösungszeit τ_0 charakterisieren (vgl. Abschnitt 4), gibt einerseits Anlass zu zufälligen Koinzidenzen, andererseits zu Koinzidenzverlusten.

Die Zahl der zufälligen Koinzidenzen pro sec beträgt

$$K_{\text{zuf}} = 2 \tau_0 (Z_f + Z_{0f}) \cdot (Z_b + Z_{0b}),$$

wo Z die Einzelstosszahl und Z_0 den Nulleffekt pro sec bedeuten; τ_0 ist in sec gemessen.

Ausser den zufälligen Koinzidenzen hat man einen, zwar kleinen, aber immerhin feststellbaren Untergrund von den gemessenen Koinzidenzen zu subtrahieren. — Zur Bestimmung des stufenweise variierbaren Auflösungsvermögens des Koinzidenzverstärkers werden die Detektoren gegeneinander abgeschirmt und vor jeden eine Quelle gestellt. Da so nur zufällige Koinzidenzen gezählt werden, kann man aus obiger Formel direkt τ_0 berechnen.

Die zulässige Quellenstärke wird durch das Vorhandensein der zufälligen Koinzidenzen bestimmt, da das Verhältnis von zufälligen

zu wahren Koinzidenzen proportional ist zur Quellenstärke N . Wie gezeigt wurde, ist ja die Anzahl der wahren Koinzidenzen proportional zu N , die der zufälligen proportional zu N^2 . Bei kleinerer Auflösungszeit τ_0 wird zwar dieses Verhältnis vermindert, hingegen können physikalische Gründe, die schon im 2. Abschnitt besprochen wurden, grosse Werte von τ_0 verlangen. Mit genau gemessenem Auflösungsvermögen haben wir bis zu 40% zufällige Koinzidenzen zugelassen. Dadurch ist für jeden Wert von τ_0 die maximale Präparatstärke bestimmt. Die kleine Totzeit des Szintillationszählers kann so meistens nicht voll ausgenützt werden.

Koinzidenzverluste entstehen einerseits aus rein apparativen Gründen, vgl. HUMBEL³⁶⁾, andererseits kommen natürlich dann noch Verluste dazu, wenn die Lebensdauer des mittleren Zustandes der Kaskade vergleichbar ist mit der Auflösungszeit des Koinzidenzverstärkers. Die apparativ bedingten Verluste haben wir mit einer sehr schnellen Kaskade (Ni^{60}) gemessen, sie betragen beim besten Auflösungsvermögen ($\tau_0 \approx 10^{-7}$ sec) 4 bis 5%. Bei der Cd^{111} -Kaskade ($T_{1/2} = 0,86 \cdot 10^{-7}$ sec) stimmen die gemessenen Verluste gut überein mit den auf Grund der Verzögerung und der apparativen Verluste berechneten Werten für die verschiedenen Auflösungsvermögen. — Für die Berechnung von absoluten Quellenstärken und von Ansprechwahrscheinlichkeiten ist die Kenntnis der Koinzidenzverluste notwendig.

10. Streuquanten, Abschirmungsprobleme.

WALTER³⁵⁾ hat auf die verschiedenen Möglichkeiten hingewiesen, wie vorgetäuschte Koinzidenzen durch Streuung von γ -Quanten entstehen können. Der grösste Teil solcher störender Koinzidenzen wird dadurch erzeugt, dass ein Quant im Anthracenkristall des einen Detektors eine Comptonstreuung erfährt, damit registriert wird und als Streuquant in den andern Detektor gelangt, wo es ebenfalls registriert wird. In den Arbeiten von BRADY und DEUTSCH²⁰⁾ und von WALTER³⁵⁾ sind Methoden zur Verminderung und zu Kontrollmessungen solcher unerwünschten Koinzidenzen beschrieben. Wir haben grundsätzlich die gleichen Methoden verwendet. Über unsere eingehenden Untersuchungen dieser Streueffekte wird im folgenden kurz berichtet.

Je nach dem Winkel zwischen den Detektoren müssen die koinzidenzfähigen Streuquanten teilweise die Absorber an der Stirnfläche, teilweise diejenigen um die Mantelfläche des Anthracenkristalls passieren (vgl. Fig. 3), und zwar sowohl beim Austritt aus dem er-

sten, wie auch beim Eintritt in den andern Detektor. Die primären Quanten müssen hingegen nur einmal durch den Stirnabsorber gehen. Da ausserdem die gestreuten Quanten weicher sind als die primären, können jene durch diese Absorption grösstenteils unterdrückt werden. Je härter die primären sind, desto grösser wird die Energiedifferenz zwischen Primär- und Streuquanten und desto günstiger die Absorptionsverhältnisse. Im Falle der Cd^{111} -Kaskade hat man relativ kleine Primärenergien, so dass man die Absorptionsverhältnisse sorgfältig zu studieren hat. Da die wahren Koinzidenzen proportional zum Produkt der Absorptionsfaktoren sind, beschränkt man die Absorber im direkten Strahlengang auf das kleinstmögliche Mass. Auch die seitlichen Abschirmungen sollte man nicht unnötig gross dimensionieren, da sie als Streukörper wirken und so den sensiblen Raumwinkel unkontrollierbar vergrössern.

Die aus Blei bestehenden Stirn- und Seitenabsorber wurden folgendermassen dimensioniert: Für die beiden γ -Quanten werden die Winkelverteilungen der Energie und der Intensität der gestreuten Quanten nach dem Comptoneffekt berechnet (siehe z.B. HEITLER³⁹). Auf den verschiedenen Winkelpositionen wird als Streuwinkel ein Mittelwert verwendet. Die Absorptionsfaktoren werden aus den Absorptionskoeffizienten für die betreffenden Streuenergien und den vom Winkel abhängigen Schichtdecken berechnet. (Es wird nicht der totale Absorptionskoeffizient μ verwendet, sondern von diesem der Anteil der Klein-Nishina-Streuung subtrahiert, da die Absorber unmittelbar vor dem Kristall liegen und diese Streuquanten zu einem grossen Teil noch in den Kristall gelangen. Bei kleinen Energien macht ohnehin der Photoeffekt den Hauptanteil von μ aus. In der Wahl des den wirklichen Verhältnissen am besten angepassten Absorptionskoeffizienten liegt die grösste Unsicherheit der ganzen rechnerischen Abschätzung, da dieser exponentiell eingeht.) Ferner muss man die Ansprechwahrscheinlichkeit der Detektoren für die Streuquantenenergie und den sensiblen Raumwinkel für die Streuquanten kennen.

Diese rechnerischen Abschätzungen sind natürlich nicht genau, sie geben aber ein gutes Bild von der Grössenordnung der Streueffekte. Falls die Streukoinzidenzen einen merklichen Anteil ausmachen, darf man also die entsprechende Korrektur nicht nur auf diese rein rechnerischen Abschätzungen basieren, es sind dann Hilfsmessungen nötig. Besser ist es jedoch, unter Verwendung der skizzierten Abschätzung die Absorber so zu dimensionieren, dass gar keine Korrekturen mehr nötig sind (zulässige Streuungen 0,1 bis 1% der wahren Koinzidenzen). Dies haben wir für unsere Messungen an

den γ - γ -Kaskaden von Cd^{111} und Ni^{60} mit den in Tabelle I angeführten Absorbern erreicht.

Tabelle I.

Isotop der γ - γ -Kaskade	Mittlere γ -Energie	Stirnabsorber in mm Blei	Seitenabsorber in mm Blei
Cd^{111}	0,21 MeV	0,6	3,0
Ni^{60}	1,25 MeV	6,0	8,0

Die oben beschriebene Methode zur Berechnung der Streueffekte haben wir an diesen beiden Abschirmungen mit den γ -Strahlungen von Fe^{59} geprüft. Fe^{59} besitzt zwei gleich intensive γ -Strahlen von 1,1 und 1,3 MeV. Da diese Energien fast gleich gross sind wie diejenigen von Ni^{50} (1,17 und 1,33 MeV), eignet sich diese nicht koinzidenzfähige Strahlung von Fe^{59} vorzüglich zum Prüfen der für Ni^{60} berechneten Abschirmung. Wir prüften damit aber auch die Abschirmung für Cd^{111} , die natürlich für diese Energien bedeutend mehr Zustreuungen zulässt. Die Übereinstimmung von Abschätzung und Experiment ist befriedigend, die experimentell bestimmten Werte sind sogar meist kleiner als die berechneten. — Ferner haben wir mit der γ -Strahlung von Au^{198} Streumessungen vorgenommen. Nach CAVANAGH et al.⁴⁰⁾ kommen mit kleinen Intensitäten neben der 0,411-MeV-Strahlung noch solche von 0,67 und 1,09 MeV vor. In dieser Arbeit wird vermutet, dass es sich um eine Kaskade handelt, wobei die energiereichsten Quanten dem direkten Übergang vom obersten Niveau zum Grundzustand entsprechen sollen. Wir haben in der Tat gefunden, dass die beiden Übergänge kleinerer Energie koinzidenzfähig sind. Dies hat CAVANAGH⁴¹⁾ später selbst bestätigt. Mit seinen Angaben über die verschiedenen Intensitäten können wir auf die wahren Koinzidenzen schliessen und die Anteile an den Streukoinzidenzen für die verschiedenen Strahlungen berechnen. Auch hier stimmen Experiment und Abschätzung befriedigend überein.

Für die Cd^{111} -Kaskade ergibt die Abschätzung bei Verwendung der Absorber gemäss Tabelle I einen maximalen Anteil an Streukoinzidenzen von weniger als 0,3 %. Die Streuexperimente gestatten die Annahme, dass der wirklich vorhandene Anteil eher weniger ausmacht. Zwei weitere Prüfungen bestätigen diese Annahme: Erstens haben wir im Laufe der vielen Richtungskorrelationsmessungen an Cd die Feststellung gemacht, dass sich die Koinzidenzraten bei 60° und 120° nicht unterscheiden. Dies erwartet man wegen der Symmetrie von $W(\theta)$ bezüglich 90° , wenn keine Streukoinzidenzen auf-

treten. Zweitens haben Versuche mit zwischen den Detektoren eingeschobenen Absorbern gezeigt, dass keine merkbaren Streukoinzidenzen vorkommen. — Die weiteren von WALTER³⁵⁾ erwähnten Streumöglichkeiten treten seltener auf und zudem werden jene Streuquanten durch unsere Abschirmungen noch stärker absorbiert, da die Quanten nach einer zweiten Streuung noch weicher werden. Somit brauchen wir auf diese Streueffekte nicht einzugehen.

Die 2,05-MeV- β -Strahlung der In¹¹⁴-Aktivität (siehe Abschnitt 12) wird durch 2,4 mm Aluminium vor jedem Anthracenkristall absorbiert.

Schliesslich haben wir die Streuungen untersucht, die entstehen können, wenn sich die Quelle zwischen den Polschuhen des Magneten befindet (vgl. Fig. 4). Wir haben mit einigen Präparaten die Richtungskorrelation ohne und mit Magnet (ohne Magnetfeld) gemessen und keine merklichen Unterschiede gefunden. Somit können wir diese Streuungen ebenfalls vernachlässigen.

11. *Streuung von Quanten in quellennaher Materie.*

Bei den meisten unserer Quellen haben wir den Einfluss der Streuung von Quanten in der Quelle auf die gemessene Anisotropie zu berücksichtigen.

Das aktive Indium wird zusammen mit Silber im Doppelstrahlverfahren auf 0,005 mm Aluminiumfolie aufgedampft. Die entstehenden Schichten sind rund 0,015 mm dick. Die ganze Folie wird nachher aufgerollt und in ein dünnwandiges Aluminiumröhrchen gesteckt. In dieser verhältnismässig massiven Quelle wird ein nicht zu vernachlässigender Teil der emittierten Quanten gestreut, was eine Verminderung der gemessenen gegenüber der wahren Anisotropie zur Folge hat.

Für die gestreuten Quanten zeigt die Klein-Nishina-Formel, dass im Falle des Cd¹¹¹ meistens Streuungen unter Winkeln von ungefähr 20° bis 140° vorkommen und dass kleinere und grössere Winkel relativ selten auftreten. Man kann deshalb als gute Näherung annehmen, dass alle jene Quantenpaare, von denen mindestens ein Quant gestreut wurde, eine völlig isotrope Korrelation aufweisen. Eine genauere Rechnung dieses Streuproblems zeigt, dass diese Annahme im Gebiete von 0,2 MeV der Wirklichkeit tatsächlich sehr nahe kommt. Für höhere Quantenenergien trifft dies hingegen nicht mehr zu, da die kleinen Streuwinkel mehr bevorzugt werden. Dies hat zur Folge, dass die Anisotropie in kleinerem Masse verfälscht wird. Streuexperimente an der Ni⁶⁰-Kaskade haben unsere Berech-

nungen quantitativ bestätigt. Wir wollen im folgenden die einfache Rechnung für die Cd^{111} -Kaskade wiedergeben.

Die Zahlen w_1 und w_2 seien die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Quant des ersten bzw. zweiten Überganges *nicht* gestreut wird. Mit obiger Annahme kann man w_i einfach aus dem totalen Compton-Wirkungsquerschnitt für die mittleren Silber- und Aluminiumschichtdicken berechnen ($w_i = 1$ bedeutet also keine Streuung). Das Produkt $w_1 \cdot w_2$ ist dann der unveränderte Bruchteil der gesamten Strahlung mit wahrer Anisotropiekonstanten A . Der restliche Anteil, nämlich $1 - w_1 \cdot w_2$ hat isotrope Verteilung, so dass $W(\Theta) = 1 + A \cdot \cos^2 \Theta$ übergeht in

$$W'(\Theta) = w_1 w_2 (1 + A \cos^2 \Theta) + n (1 - w_1 w_2),$$

wobei n ein Normierungsfaktor ist, der bestimmt wird durch

$$\int W'(\Theta) d\Omega = \int W(\Theta) d\Omega = 1 + \frac{A}{3},$$

woraus $n = 1 + A/3$ folgt.

Die gestreuten Quanten sind jedoch weicher als die primären und werden damit im Stirnabsorber stärker absorbiert und zudem mit kleinerer Ansprechwahrscheinlichkeit gezählt. Um dies zu berücksichtigen, zerlegen wir den isotropen Anteil in Komponenten:

$$1 - w_1 w_2 \equiv (1 - w_1) + (1 - w_2) - (1 - w_1)(1 - w_2).$$

Die beiden Summanden $(1 - w_i)$ sind die Anteile jener Paare, von denen das i -Quant gestreut wurde, unabhängig davon, ob das andere Quant auch gestreut wurde oder nicht. Diese beiden Summanden zählen somit solche Paare, von denen beide Quanten gestreut wurden, zweimal; das dritte Glied subtrahiert eine dieser überschüssigen Komponenten. So erhält man für die gemessene Winkelverteilung $W'(\Theta)$

$$W'(\Theta) = w_1 w_2 (1 + A \cos^2 \Theta) + \left(1 + \frac{A}{3}\right) \times \\ \times \left[(1 - w_1) \frac{(\overline{\varepsilon_1 a_1})_s}{\varepsilon_1 a_1} + (1 - w_2) \frac{(\overline{\varepsilon_2 a_2})_s}{\varepsilon_2 a_2} - (1 - w_1)(1 - w_2) \frac{(\overline{\varepsilon_1 a_1})_s \cdot (\overline{\varepsilon_2 a_2})_s}{\varepsilon_1 a_1 \cdot \varepsilon_2 a_2} \right].$$

Dabei sind ε_i und a_i Ansprechwahrscheinlichkeiten und Absorptionsfaktoren der primären Quanten und $(\overline{\varepsilon_i a_i})_s$ das Produkt der analogen Größen für die gestreuten Quanten. Der Querstrich bedeutet Mittelung dieses Ausdruckes über die Winkelverteilung nach KLEIN-NISHINA:

$$(\overline{\varepsilon_i a_i})_s = \frac{\int \varepsilon_i(k(\Theta)) \cdot a_i(k(\Theta)) \cdot f(\Theta) \sin \Theta d\Theta}{\int f(\Theta) \sin \Theta d\Theta}.$$

Die Absorptionsfaktoren $a_i(k)$ werden aus den Absorptionskoeffizienten, die für die Pb- und Al-Absorber vor den Detektoren (vgl. Abschnitte 7 und 10) gültig sind, berechnet. Die numerischen Integrationen liefern

$$\frac{(\overline{\varepsilon_i a_i})_s}{\varepsilon_i a_i} = \begin{cases} 0,49 & \text{für die 247-keV-Strahlung} \\ 0,46 & \text{für die 173-keV-Strahlung.} \end{cases}$$

Wir vernachlässigen den Unterschied und setzen für beide Energien den Mittelwert 0,475. Damit wird

$$W'(\Theta) = w_1 w_2 (1 + A \cos^2 \Theta) + \left(1 + \frac{A}{3}\right) \times \\ \times [0,475 (2 - w_1 - w_2) - 0,225 (1 - w_1) (1 - w_2)],$$

oder $W'(\Theta) = 1 + B \cos^2 \Theta$, woraus A aus dem Verhältnis

$$A:B = \frac{w_1 w_2 + [0,475 (2 - w_1 - w_2) - 0,225 (1 - w_1) (1 - w_2)]}{w_1 w_2 - B/3 [0,475 (2 - w_1 - w_2) - 0,225 (1 - w_1) (1 - w_2)]}$$

folgt. — Der mittlere Wert dieses Verhältnisses für die verschiedenen Präparate beträgt rund 1,05. Somit ist die diskutierte Korrektur zwar klein, aber immerhin nicht zu vernachlässigen.

12. Störende Fremdaktivitäten.

Bei der Bestrahlung von Cd mit Protonen im Cyklotron entsteht neben In^{111} eine ganze Reihe anderer Isotope. Mit Ausnahme von In^{114} besitzen jedoch alle eine viel kleinere Halbwertszeit als In^{111} und können deshalb nach einer Wartezeit von rund 48 Stunden zwischen Bestrahlung und Messbeginn vollständig vernachlässigt werden. Das Intensitätsverhältnis In^{114} zu In^{111} lässt sich einerseits berechnen aus dem Häufigkeitsverhältnis der stabilen Isotope Cd^{114} und Cd^{111} , aus den Wirkungsquerschnitten dieser Isotope für die p - n -Reaktion⁴²⁾ und der Zerfallswahrscheinlichkeiten der aktiven Isotope In^{114} und In^{111} . Andererseits kann man das Verhältnis auch messen durch Verfolgung der Halbwertszeit des Gemisches In^{114} - In^{111} über eine längere Zeit. Vom zweiten bis ungefähr sechsten Tag nach der Bestrahlung, in der Zeit, während der man die Richtungskorrelationsmessung am Cd^{111} ausführt, beträgt der Anteil der Strahlung von In^{114} nur einige Prozente. — Die Anwesenheit dieser Strahlung, vgl. Fig. 7⁴³⁾, bedingt Korrekturen an den Einzelstosszahlen wie auch an den Koinzidenzen. Der stark konvertierte Übergang γ_1 und die zu 3% vorkommende γ_2 - γ_3 -Kaskade liefern Anteile zur Einzelstosszahl; die β -Strahlung wird absorbiert. Die genannte Kaskade

gibt Anlass zu Koinzidenzen, und zwar handelt es sich um eine sehr koinzidenzfähige Strahlung, da die γ -Energien im Gebiete maximaler Empfindlichkeit unserer Detektoren liegen (vgl. Fig. 6). Die nötigen Korrekturen wurden dadurch ermittelt, dass man einige Präparate in gewissen Zeitabständen in den verschiedenen Winkelpositionen gemessen hat. Die Anteile des In^{114} an der Einzelstosszahl und den Koinzidenzen können aus diesen Hilfsmessungen durch Extrapolation bestimmt werden.

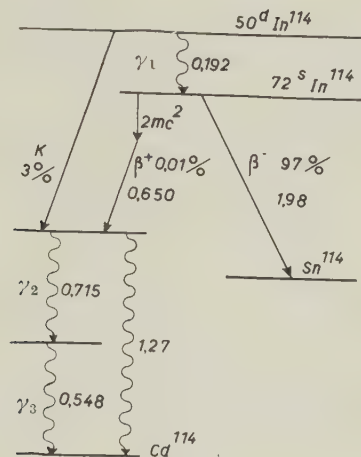


Fig. 7.
Zerfallsschema von In^{114} .

13. Berechnung der Anisotropie aus der gemessenen Winkelverteilung.

Da die sensiblen Raumwinkel und die Quelle nicht unendlich klein sind, misst man Mittelwerte von $W(\Theta)$ über gewisse Winkelintervalle. Dies hat zur Folge, dass die direkt gemessene Anisotropiekonstante $[W(\pi) - W(\pi/2)]/W(\pi/2)$ kleiner ist als die wahre. Diese Effekte hat WALTER³⁵⁾ eingehend untersucht und für einige spezielle Fälle Korrekturformeln angegeben. Wir haben diese Effekte, die im Maximum eine Korrektur von 14% bedingen, rechnerisch berücksichtigt*).

Dabei wurde eine reine $1 + A_2 \cdot \cos^2 \Theta$ -Verteilung angenommen; einen $\cos^4 \Theta$ -Term brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da er einen derart kleinen Koeffizienten hat²⁶⁾, dass man dieses Zusatz-

*) Für die explizite Berechnung der Korrekturformeln danken wir Herrn Dr. M. WALTER (Universität Zürich) bestens.

glied bei den Richtungskorrelationsmessungen gar nicht feststellen kann.

Für jede einzelne Messreihe wurde mit Hilfe dieser Korrekturformeln die wahre Anisotropiekonstante A_2 durch Ausgleichen der auf den verschiedenen Winkelpositionen gemessenen Werte der Koinzidenzrate bestimmt. (Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.)

Den Fehler der Anisotropiekonstanten A_2 berechnen wir aus den mittleren statistischen Fehlern der auf den einzelnen Winkelpositionen gemessenen Koinzidenzraten. Je nach den für die Messung gewählten Winkelpositionen führen wir diese Fehler mit entsprechenden Gewichten ein.

Bei der Messung der Richtungskorrelation in Funktion der magnetischen Feldstärke ist es bequemer, die Winkelverteilung in der Form $W(\Theta) = 1 + b_2 \cos 2\Theta$ zu schreiben. Der Koeffizient b_2 berechnet sich zu $b_2 = A_2/(2 + A_2)$ (vgl. Seite 343).

14. Korrektur auf endliches Auflösungsvermögen.

In Abschnitt 2 (Seite 343 und 344) wurde erwähnt, dass die Messung der Anisotropie b_2 in Funktion der Feldstärke H durch eine endliche Auflösungszeit τ_0 des Koinzidenzverstärkers verfälscht wird und dass deshalb eine Korrektur notwendig ist. Diese Korrektur wird durch Formel (10) (Kapitel I) gegeben:

$$b_2'' = b_2' \cdot \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G} = \frac{1 - e^{-\tau_0/\tau} [\cos(2\omega\tau_0) - 2\omega\tau \sin(2\omega\tau_0)]}{1 - e^{-\tau_0/\tau}}.$$

Dass diese Korrektur sehr grosse Werte annehmen kann, ist aus Fig. 8 ersichtlich. In dieser Figur ist der Korrekturfaktor \mathfrak{G} für drei verschiedene Auflösungszeiten τ_0 aufgezeichnet. Als Variable wurde dabei an Stelle von $\omega = (g\mu_K H)/\hbar$ das Produkt $g \cdot H$ verwendet.

Wie aus der Figur folgt, bleibt die Korrektur nur dann in erträglichen Grenzen, wenn das Auflösungsvermögen einigemal grösser ist als die Lebensdauer des mittleren Zustandes.

Dieser Korrekturfaktor \mathfrak{G} wurde mit verschiedenen Präparaten experimentell geprüft, indem bei einer bestimmten Feldstärke die Anisotropie in Funktion der Auflösungszeit τ_0 gemessen wurde. Wie Fig. 9 zeigt, ist die Übereinstimmung der theoretischen Kurve und der experimentellen Werte sehr befriedigend. Für die Berechnung der Korrektur \mathfrak{G} wurde als g -Faktor der Wert $g = -0,28$ angenommen (vgl. Abschnitt 15). — Aus den Figuren 8 und 9 entnimmt man ferner, dass sich der g -Faktor auch auf diese Weise bestimmen lassen würde.

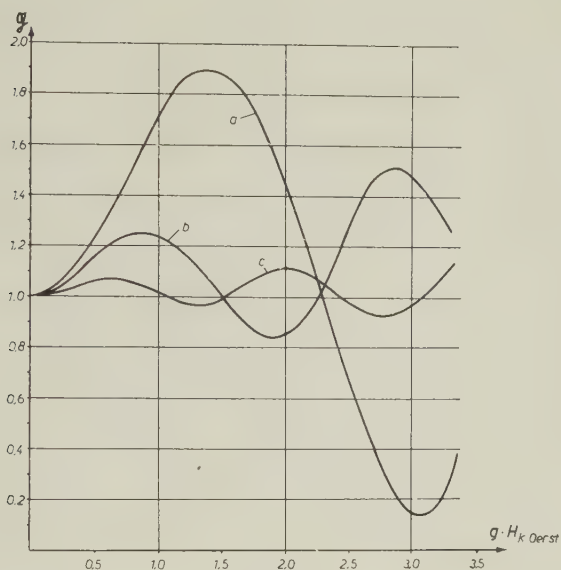


Fig. 8.

Korrektur \mathcal{G} in Funktion von $g \cdot H$ für verschiedene Auflösungszeiten.

a: $\tau_0 = 1,8 \cdot 10^{-7}$ sec; b: $\tau_0 = 2,9 \cdot 10^{-7}$ sec; c: $\tau_0 = 4,3 \cdot 10^{-7}$ sec.

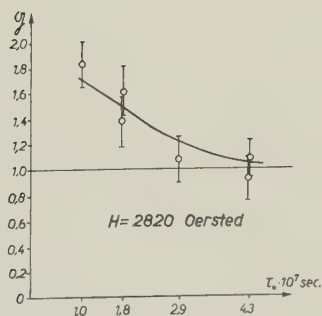


Fig. 9.

Korrektur \mathcal{G} in Funktion der Auflösungszeit τ_0 bei einer Feldstärke $H = 2820$ Oersted.

IV. Ergebnisse.

15. Bestimmung des g -Faktors.A. Der absolute Betrag von g .

Im 2. Abschnitt wurde die Theorie der Schwächung der Anisotropie durch ein äusseres Magnetfeld skizziert. Wie man der dort angegebenen Formel (9) entnimmt, kann man das Produkt $\omega\tau$ und damit bei bekannter Lebensdauer τ auch den g -Faktor, $g = \omega \hbar / \mu_k H$ schon durch Messung der Schwächung bei einem einzigen Wert der Feldstärke H bestimmen. Die experimentellen Ergebnisse lassen sich jedoch besser mit der Theorie vergleichen, wenn der ganze Verlauf der Schwächung als Funktion des angelegten Magnetfeldes bekannt ist. Wir haben deshalb die Schwächung für verschiedene Werte der Feldstärke zwischen 0 und 7350 Oersted gemessen. Dann lässt sich der g -Faktor durch Ausgleichen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen.

Tabelle II.

Operation	Ungefähre Grösse des Korrekturfaktors	Vgl. Abschnitt
1. Korrektur: zufällige Koinzidenzen	1,2	9
2. Korrektur: Nulleffekte	1,005	9
3. Korrektur: Subtraktion des In^{114} -Anteils . .	1,08	12
4. Bildung der Koinzidenzrate	—	7
5. Berechnung der Anisotropie durch Ausgleichen der Koinzidenzraten unter Berücksichtigung der Quellenausdehnungs- und Raumwinkelkorrektur	1,14	13
6. Korrektur: Streuung in der Quelle.	1,05	11
7. Korrektur: endliche Auflösungszeit (6). . .	1,1	14
8. Berechnung des g -Faktors durch Ausgleichen des Verlaufes $b_2'(H)$	—	2; 15
9. Iteration	—	15

In Tabelle II geben wir eine Übersicht über den Gang der Auswertung. Die verschiedenen Operationen, mit der ungefähren Grösse der entsprechenden Korrekturen, werden in der natürlichen Reihenfolge aufgezählt.

Die Operationen 1 bis 8 sind in den betreffenden Abschnitten näher beschrieben. Mit Iteration (Operation 9) bezeichnen wir das folgende Verfahren: Die Berechnung der Korrektur ⑤ (Operation 7) setzt die Kenntnis des g -Faktors voraus. Man nimmt nun für diesen Wert zunächst eine nullte Näherung an, berechnet die ⑤-Korrektur und bestimmt in Operation 8 den g -Faktor in erster Näherung. Mit diesem neuen Wert geht man wieder in Operation 7 ein und führt diese (konvergierende) Iteration fort, bis man eine hinreichende Genauigkeit für den g -Faktor erzielt hat.

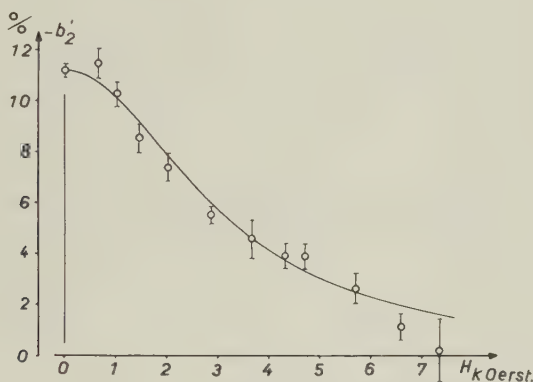


Fig. 10.

Anisotropie in Funktion der Feldstärke. (Die ausgezogene Kurve ist *nicht* an den Anisotropiewert bei $H = 0$ angepasst, sondern sie wurde durch Ausgleichen *aller* Messwerte erhalten.)

Das Resultat der Messungen ist in Fig. 10 dargestellt. Die Ausgleichen liefert für den Betrag des g -Faktors den Wert

$$|g| = 0,28 \pm 0,05.$$

Diskussion des Fehlers.

a) Die Gesamtheit der *Korrekturen* in Tabelle II scheint gross zu sein. Die einzelnen Korrekturen lassen sich aber alle relativ genau ermitteln, so dass sie nur wenig zum Fehler von $|g|$ beitragen. Insbesondere ist zu bemerken, dass eine Korrektur, die nur eine Multiplikation der Anisotropiekonstanten mit einem konstanten und von der Schwächung unabhängigen Faktor bedeutet, überhaupt keinen Einfluss auf den g -Faktor hat. Dies trifft in erster Näherung für die Operationen 1 und 6 zu (zufällige Koinzidenzen und Streuung in der Quelle).

b) Der Fehler der Feldstärke H geht direkt in $|g|$ ein. Mit unserer Messmethode haben wir H auf ungefähr 4% ermittelt. Damit trägt H etwa zu 20% zum Fehler von $|g|$ bei.

c) Auch der relative Fehler der Lebensdauer des mittleren Zustandes addiert sich zum relativen Fehler von $|g|$. Nach Angabe von STEFFEN³²⁾ und nach eigenen Messungen nehmen wir die Halbwertszeit zu

$$T_{1/2} = (8,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

an (vgl. Seite 346). Diese relativ grosse Ungenauigkeit macht rund 30% des Fehlers von $|g|$ aus.

d) Die in Fig. 10 eingezeichneten Fehler der einzelnen Messpunkte sind zusammengesetzt aus den statistischen Fehlern und den Fehlern der Korrekturen, wobei die ersteren etwa fünfmal grösser sind. Der Beitrag dieser Fehler macht etwa die Hälfte des Fehlers von $|g|$ aus.

e) Die Messpunkte in Fig. 10 liegen gruppenweise über und unter der theoretischen Kurve. Dieses Verhalten ist besser ersichtlich,

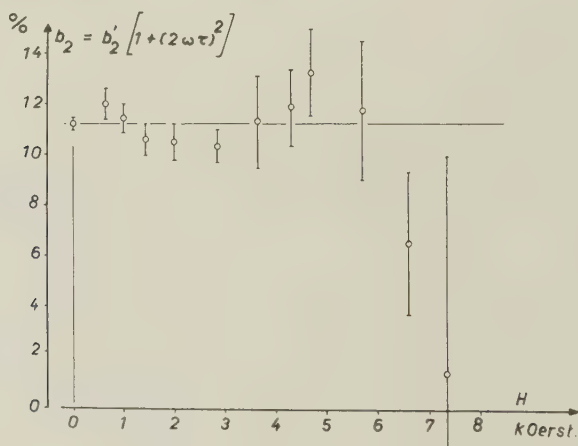


Fig. 11.

Anisotropie reduziert um die theoretische Schwächung.

wenn man die Messpunkte durch den theoretischen Wert der Schwächung dividiert, so dass die Messwerte im Mittel auf der horizontalen Geraden durch $b_2 = b_2' (H = 0)$ liegen (Fig. 11).

Eine eindeutige Abklärung der deutlich sichtbaren Welligkeit ist uns noch nicht gelungen. Obwohl die Möglichkeit nicht sehr gross ist, dass der Effekt durch statistische Schwankungen vorgetäuscht wird, kann sie doch nicht ausgeschlossen werden. Eine weitere Er-

klärung ist möglich durch die Wechselwirkung des Kernquadrupolmomentes mit inhomogenen elektrischen Kristallfeldern. Auf jeden Fall ist eine gründliche Untersuchung einer solchen „Feinstruktur“ der Schwächung experimentell sehr schwierig, da kleinste Differenzen in der Herstellung der Quellen sich sehr stark auswirken können. Ferner erfordert die Kleinheit des Effektes kleine statistische Fehler, also äusserst lange Messzeiten.

B. Vorzeichen des g -Faktors.

Wie im 2. Abschnitt gezeigt wurde, lässt sich mit Detektoren, die zwischen den zwei Quanten der Kaskade nicht unterscheiden können, nur eine Aussage über den Betrag, nicht aber über das Vorzeichen des g -Faktors machen. Der Energieunterschied zwischen den beiden Quanten der Cd^{111} -Kaskade erlaubt es aber, die Detektoren für diese Unterscheidung sensibel zu machen, indem man die Stirnabsorber ungleich wählt. (Die Summe der beiden Absorberdicken muss wegen der Zerstreuung ungefähr gleich bleiben. Im Falle des Cd^{111} zeigt eine rechnerische Abschätzung, dass der Differenzeffekt optimal wird, wenn man vor dem einen Zähler 1,2 mm, beim andern 0 mm Blei anbringt, zusätzlich je 2,4 mm Aluminium.) Zur Erläuterung dieses Effektes diskutieren wir den folgenden Idealfall: Der feste Zähler sei nur für das erste, der bewegliche nur für das zweite Quant empfindlich. Der g -Faktor sei negativ, so dass — in der halbklassischen Betrachtungsweise (vgl. Seite 344) — die Präzession im positiven Sinn um H erfolgt. Misst man für $H = 0$ das Maximum der Winkelverteilung bei 90° , so verschiebt sich dieses gegen grössere Winkel bei $H \neq 0$, wenn die Richtungen des ersten Quants, des zweiten Quants und des Magnetfeldes eine Rechtsschraube bilden. Vertauscht man die Empfindlichkeit der Zähler, so verschiebt sich das Maximum gegen einen Winkel, der kleiner ist als 90° . Das Umpolen des Magneten bewirkt denselben Effekt, wie das Vertauschen der Absorber.

Wir haben durch Messung der Differenz der Koinzidenzrate (bei $\Theta = 135^\circ$) durch Vertauschung der ungleichen Stirnabsorber und der Magnetfeldrichtung eindeutig festgestellt, dass

$$g < 0$$

ist. Der experimentell bestimmte Differenzeffekt stimmt dabei mit dem berechneten Effekt gut überein. Damit folgt für den g -Faktor des mittleren Zustandes der γ - γ -Kaskade von Cd^{111} :

$$g = -0,28 \pm 0,05.$$

16. Diskussion.

Aus dem g -Faktor lässt sich bei bekanntem Spin direkt das magnetische Moment des mittleren Zustandes angeben. McGINNIS²¹⁾ hat unter Annahme von Einteilchenzuständen das mittlere Niveau als $d_{5/2}$ -Term bezeichnet (vgl. Fig. 1). Nehmen wir an, dass mechanisches und magnetisches Moment hauptsächlich vom letzten, ungeraden Neutron herrühren, so bestätigt das von uns gemessene negative Vorzeichen des g -Faktors die Zuordnung $d_{5/2}$ (vgl. ²⁶⁾).

Damit folgt für das magnetische Moment dieses Zustandes:

$$\mu(d_{5/2}) = -(0,70 \pm 0,12) \mu_K.$$

Andererseits ist das magnetische Moment des Grundzustandes von Cd^{111} sehr gut bekannt⁴⁴⁾:

$$\mu(s_{1/2}) = -(0,59492 \pm 0,00008) \mu_K.$$

Im vorliegenden Fall ist also zum ersten Male das magnetische Moment eines Kernes in mehr als einem Zustand bekannt. In Fig. 12

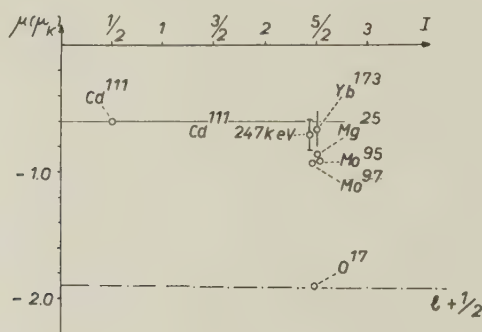


Fig. 12.

Schmidt-Diagramm für neutronen-ungerade Kerne.

haben wir diese beiden Momente, zusammen mit den andern bekannten $d_{5/2}$ -Zuständen für neutronen-ungerade Kerne, in ein Schmidt-Diagramm eingetragen.

Zwei Tatsachen lassen sich aus Fig. 12 sehr gut erkennen:

1. Das magnetische Moment des angeregten Zustandes passt sich gut ein in die Gruppe der übrigen Werte, welche $d_{5/2}$ -Grundzuständen entsprechen. Eine Ausnahme bildet nur der Kern O^{17} , der aus einem doppelt magischen Rumpf und einem zusätzlichen Neutron besteht.

2. Innerhalb der noch ziemlich grossen Fehlergrenze besitzt das Isotop Cd^{111} im Grundzustand und im tiefsten angeregten Zustand das gleiche magnetische Moment. Ob die magnetischen Momente genau gleich sind, oder ob die vorhandene Tendenz des angeregten Zustandes gegen die Schmidt-Linie $l + 1/2$ wirklich vorhanden ist, wird sich erst durch genauere Messungen der Halbwertszeit und der Schwächung entscheiden lassen.

Wir danken Herrn K. ALDER für die vielen wertvollen Diskussionen sowie den Herren Dr. J. P. BLASER und Dr. P. MARMIER für die zahlreichen Cyklotronbestrahlungen.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ T. SCHMIDT, Z. Phys. **106**, 358 (1937).
- ²⁾ W. ELSASSER, J. Phys. Radium **5**, 625 (1934).
- ³⁾ M. G. MAYER, Phys. Rev. **78**, 16 (1950).
- ⁴⁾ O. HAXEL, J. H. D. JENSEN und H. E. SUESS, Z. Phys. **128**, 295 (1950).
- ⁵⁾ E. FEENBERG und K. C. HAMMACK, Phys. Rev. **75**, 1877 (1949).
- ⁶⁾ L. W. NORDHELM, Phys. Rev. **75**, 1894 (1949).
- ⁷⁾ W. HEISENBERG, Theorie des Atomkerns, Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen (1951).
- ⁸⁾ R. BOUCHEZ, C. R. Acad. Sci., Paris **231**, 275 (1950).
- ⁹⁾ H. KOPFERMANN, Naturwissenschaften **38**, 29 (1951).
- ¹⁰⁾ H. MIYAZAWA, Progr. Theor. Phys. **6**, 263 (1951).
- ¹¹⁾ A. DE SHALIT, Helv. Phys. Acta **24**, 296 (1951).
- ¹²⁾ A. BOHR, Phys. Rev. **81**, 134 (1951).
- ¹³⁾ A. L. SCHAWLOW und C. H. TOWNES, Phys. Rev. **82**, 268 (1951).
- ¹⁴⁾ F. BLOCH, Phys. Rev. **83**, 839 (1951).
- ¹⁵⁾ L. L. FOLDY und F. J. MILFORD, Phys. Rev. **80**, 751 (1950).
- ¹⁶⁾ L. DAVIS, D. E. NAGLE und J. R. ZACHARIAS, Phys. Rev. **76**, 1068 (1949).
- ¹⁷⁾ D. R. HAMILTON, Phys. Rev. **58**, 122 (1940).
- ¹⁸⁾ E. L. BRADY und M. DEUTSCH, Phys. Rev. **72**, 870 (1947).
- ¹⁹⁾ G. GOERTZEL, Phys. Rev. **70**, 897 (1946).
- ²⁰⁾ E. L. BRADY und M. DEUTSCH, Phys. Rev. **78**, 558 (1950).
- ²¹⁾ C. L. MCGINNIS, Phys. Rev. **81**, 734 (1951).
- ²²⁾ F. BOEHM und M. WALTER, Helv. Phys. Acta **22**, 378 (1949).
- ²³⁾ D. M. ROBERTS und R. M. STEFFEN, Phys. Rev. **82**, 332 (1951).
- ²⁴⁾ H. FRAUENFELDER, Phys. Rev. **82**, 549 (1951).
- ²⁵⁾ H. AEPPLI, A. S. BISHOP, H. FRAUENFELDER, M. WALTER und W. ZÜNTI, Phys. Rev. **82**, 550 (1951).
- ²⁶⁾ H. AEPPLI, H. FRAUENFELDER und M. WALTER, Helv. Phys. Acta **24**, 335 (1951).
- ²⁷⁾ K. ALDER, Phys. Rev. **84**, 369 (1951).
- ²⁸⁾ K. ALDER, Helv. Phys. Acta **25**, 235 (1952).
- ²⁹⁾ H. AEPPLI, H. ALBERS-SCHÖNBERG, A. S. BISHOP, H. FRAUENFELDER und E. HEER, Phys. Rev. **84**, 370 (1951).
- ³⁰⁾ M. DEUTSCH und D. T. STEVENSON, Phys. Rev. **76**, 184 (1949).
- ³¹⁾ F. K. MCGOWAN, ORNL. **366**, 34 (1949).
- ³²⁾ R. M. STEFFEN, persönliche Mitteilung.

- ³³⁾ H. FRAUENFELDER, *Helv. Phys. Acta* **23**, 347 (1950).
- ³⁴⁾ J. KURSHAN, *Rev. Sci. Instr.* **18**, 647 (1947).
- ³⁵⁾ M. WALTER, O. HUBER und W. ZÜNTI, *Helv. Phys. Acta* **23**, 697 (1950).
- ³⁶⁾ O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und A. DE SHALIT, *Helv. Phys. Acta* **25**, 3 (1952).
- ³⁷⁾ T. N. K. GODFREY, F. B. HARRISON und J. W. KEUFFEL, *Phys. Rev.* **84**, 1248 (1951).
- ³⁸⁾ H. BRADT, P. C. GUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK und P. SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **19**, 77 (1946).
- ³⁹⁾ W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press (1944).
- ⁴⁰⁾ P. E. CAVANAGH, J. F. TURNER, D. V. BOOKER und H. J. DUNSTER, *Proc. Phys. Soc. [A]* **64**, 13 (1951).
- ⁴¹⁾ P. E. CAVANAGH, *Phys. Rev.* **82**, 791 (1951).
- ⁴²⁾ J. P. BLASER, F. BOEHM, P. MARMIER und P. SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **24**, 441 (1951).
- ⁴³⁾ R. M. STEFFEN, *Phys. Rev.* **83**, 161 (1951).
- ⁴⁴⁾ J. E. MACK, *Rev. Mod. Phys.* **22**, 64 (1950).

Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement

par Paul Lambossy.

Institut de Physiologie de l'Université de Fribourg (Suisse).

(1. II. 1952.)

Résumé. Le mouvement que prend, sous l'action de forces données, un liquide visqueux dans un tube est connu dès qu'on connaît à chaque instant t la vitesse d'un filet de liquide situé à la distance r de l'axe, soit la fonction $v(r, t)$. La première partie de ce travail a pour objet d'établir cette fonction, dans la supposition que la pression appliquée est une fonction harmonique du temps.

Il résulte de la formule trouvée que la *forme du profil des vitesses* dépend, outre du temps, seulement de la quantité z définie par

$$z = R \sqrt{\frac{\varrho \omega}{\eta}}.$$

Le résultat le plus intéressant est que les filets de liquide voisins de la paroi ont une avance de phase sur les filets centraux.

La seconde partie du travail a pour objet d'établir une formule pour la *force de frottement*, c'est-à-dire pour la réaction de l'unité d'aire de la paroi sur la colonne de liquide. Cette formule

$$F = - \frac{\varrho R \omega}{2 \alpha} U - \frac{\varrho R}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \frac{dU}{dt}$$

dans laquelle α et β sont des fonctions de z , et U la vitesse moyenne dans la section, est valable seulement pour le mouvement harmonique étudié.

1. Position du problème.

Le mouvement oscillatoire ou vibratoire longitudinal du fluide enfermé dans un tube pose un problème de mécanique qui intéresse à la fois le physicien et le physiologiste. Un tel mouvement s'observe en effet dans la propagation du son dans le gaz d'un tube rigide, et dans le fonctionnement du manomètre destiné à l'enregistrement des variations de la pression sanguine. C'est enfin le mécanisme du pouls, au moins approximativement, c'est-à-dire de la propagation d'une onde de pression dans le liquide d'un tube élastique.

Toutes ces questions ont été considérées très tôt par les praticiens, vu l'urgence qu'elles présentaient pour eux, plus tardivement par les théoriciens¹). Comme la multiplicité des facteurs rend les phénomènes complexes, et qu'on ne peut demander que des solutions approchées, on a cherché à obtenir des résultats utiles sans trop compliquer la théorie et on a réussi en général. Cependant il est un facteur qui semble avoir résisté à ces tentatives : la viscosité du liquide. Ou bien on tient compte de la viscosité correctement et on accepte les calculs compliqués qu'elle exige, ou bien on laisse ce facteur de côté complètement.

Il y a peut-être un moyen terme.

Quand on applique l'équation de la dynamique à un cylindre de liquide de longueur l et dont le rayon R est égal au rayon intérieur du tube, il y a lieu de compter parmi les forces extérieures la composante longitudinale de la réaction de la paroi. On peut poser, pour cette force,

$$2 \pi R l \cdot F,$$

F est la *force de frottement par unité d'aire*. On pourra écrire l'équation de la dynamique dès qu'on possèdera une expression de F .

Dans le cas des *oscillations harmoniques* d'une masse de liquide dans un tube, l'expression de F est de la forme

$$F = -f_1 U - f_2 \frac{dU}{dt}, \quad (1)$$

où U est vitesse moyenne dans la section, f_1 et f_2 deux grandeurs qui dépendent des constantes du tube et du liquide, ainsi que de la fréquence. Le présent travail a pour but d'établir cette formule qui constitue le moyen terme dont nous venons de parler.

Car, bien qu'elle soit établie pour un tube rigide, elle peut, au moins approximativement, s'appliquer au mouvement harmonique dans un tube élastique. C'est ainsi que le problème des ondes, dont nous nous occuperons dans un prochain article, peut être résolu en modifiant l'égèrement un exposé classique qui ignorait la viscosité.

Nos recherches ont été inspirées par une formule semblable à (1) établie par RAYLEIGH²), et valable pour une plaque oscillant parallèlement à une droite de son plan, et placée dans un liquide visqueux illimité.

2. Mouvement du liquide.

Le mouvement laminaire d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube cylindrique, rigide et horizontal, se fait par couches coaxiales, chacune d'elles ayant sa vitesse propre. Comme nous négligeons la pression hydrostatique, la pression est la même en tout point d'une même section.

En appliquant la loi de la dynamique à la masse de liquide comprise entre deux surfaces cylindriques de rayons r et $r + dr$, de longueur l , on obtient l'équation différentielle suivante, à laquelle obéit $v = v(r, t)$, la vitesse du liquide,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{p_1 - p_0}{\eta l} = \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2)$$

ρ densité, η coefficient de viscosité, $p_1 - p_0$ différence de pression entre les extrémités de la colonne de liquide.

Supposons maintenant qu'on entretienne artificiellement entre les deux extrémités une différence de pression variant dans le temps suivant la loi sinusoïdale, et posons

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho l} = A \cos \omega t; \quad (3)$$

l'équation différentielle deviendra

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\rho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (4)$$

La fonction $v(r, t)$ cherchée doit être telle que la condition aux limites

$$v(R, t) = 0, \text{ quel que soit } t, \quad (5)$$

soit satisfaite. Il n'y a pas de condition initiale, si nous étudions l'état de régime, une fois que l'état transitoire est passé.

En posant

$$v(r, t) = u(r, t) + \frac{A}{\omega} \sin \omega t \quad (6)$$

l'équation (4) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (7)$$

et la condition aux limites

$$u(R, t) = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t, \quad \text{quel que soit } t. \quad (8)$$

Enfin, si on introduit la variable τ proportionnelle à t ,

$$\tau = \frac{\eta t}{\varrho} \quad (9)$$

on aura l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (10)$$

En cherchant une solution particulière de (10) qui soit de la forme

$$u = \Phi(r) e^{-i\lambda\tau}, \quad (\lambda \text{ réel, positif})$$

on obtient pour $\Phi(r)$ la condition

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + i\lambda \Phi = 0.$$

C'est une équation de BESSEL d'ordre zéro. En désignant par $J_0(x)$ la solution de première espèce, qui est finie pour $x = 0$, de l'équation

$$J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) = 0,$$

on a

$$\Phi(r) = J_0(r \sqrt{\lambda i})$$

et par suite

$$u = J_0(r \sqrt{\lambda i}) e^{-i\lambda\tau}.$$

Afin d'avoir une solution plus générale, multiplions par une constante complexe K quelconque, et prenons la partie réelle de l'expression obtenue

$$u = \mathbf{R\acute{e}}[K J_0(r \sqrt{\lambda i}) e^{-i\lambda\tau}]. \quad (11)$$

En remplaçant $\tau = \eta t / \varrho$ d'après (9) et utilisant la condition aux limites (8), on obtient l'équation

$$\mathbf{R\acute{e}}\left[K J_0(R \sqrt{\lambda i}) \left(\cos \frac{\lambda \eta}{\varrho} t - i \sin \frac{\lambda \eta}{\varrho} t\right)\right] = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t. \quad (12)$$

Elle détermine tout d'abord λ , puisqu'on doit avoir

$$\frac{\lambda \eta}{\varrho} = \omega, \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{\varrho \omega}{\eta}. \quad (13)$$

Nous introduisons la grandeur z définie par

$$z = R \sqrt{\frac{\varrho \omega}{\eta}}, \quad (14)$$

de sorte que (12) pourra s'écrire

$$\mathbf{Ré}[K J_0(z \sqrt{i}) (\cos \omega t - i \sin \omega t)] = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t.$$

En faisant successivement $\omega t = 0$ et $\omega t = \pi/2$ dans cette identité en t , on obtient les équations

$$\mathbf{Ré}[K J_0(z \sqrt{i})] = 0$$

$$\mathbf{Ré}[i K J_0(z \sqrt{i})] = \frac{A}{\omega}$$

qui peuvent être cumulées en une seule, savoir

$$i K J_0(z \sqrt{i}) = \frac{A}{\omega}.$$

Cette dernière donnera deux équations réelles si on fait $K = B - iC$ et si on écrit symboliquement

$$J_0(z \sqrt{i}) = \mathbf{Ré} J_0(z \sqrt{i}) + i \mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i}). \quad (15)$$

On a donc, pour déterminer les constantes B et C , les deux équations

$$C \cdot \mathbf{Ré} J_0(z \sqrt{i}) - B \cdot \mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i}) = \frac{A}{\omega},$$

$$C \cdot \mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i}) + B \cdot \mathbf{Ré} J_0(z \sqrt{i}) = 0.$$

On déduit

$$B = -\frac{A}{\omega} \frac{\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})}{[\mathbf{Ré} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})]^2},$$

$$C = \frac{A}{\omega} \frac{\mathbf{Ré} J_0(z \sqrt{i})}{[\mathbf{Ré} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})]^2}. \quad (16)$$

La fonction $u(r, t)$ est donnée par (11) en remplaçant $K = B - iC$, en utilisant (13) et (14), et faisant usage de la décomposition (15); donc en prenant la partie réelle de l'expression

$$(B - iC) \left[\mathbf{Ré} J_0 \left(\frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) + i \mathbf{Jm} J_0 \left(\frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right] (\cos \omega t - i \sin \omega t).$$

Enfin $v(r, t)$ s'obtient, d'après (6), en ajoutant $A/\omega \sin \omega t$. Nous avons ainsi, pour la *vitesse*, la formule

$$\begin{aligned} v(r, t) = & \frac{A}{\omega} \sin \omega t \\ & + \cos \omega t \left[B \cdot \mathbf{Ré} J_0 \left(\frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) + C \cdot \mathbf{Jm} J_0 \left(\frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right] \\ & + \sin \omega t \left[B \cdot \mathbf{Jm} J_0 \left(\frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) - C \cdot \mathbf{Ré} J_0 \left(\frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Nous rappelons que B et C sont donnés par les formules (16). Les nouvelles fonctions introduites au moyen des symboles **Ré** et **Jm** sont aisément maniables, comme on le verra, d'autant plus qu'il existe des tables pour leurs valeurs numériques.

3. Profil des vitesses dans le tube.

A un instant donné t , la vitesse v devient une fonction de r seul, et la représentation graphique de cette fonction dans l'intervalle $-R \leq r \leq R$ donne le *profil des vitesses* à cet instant. Ce profil varie au cours d'une période.

De quoi dépend la *forme* de ce profil?

Si nous laissons le facteur de proportionnalité A/ω , qui est sans importance dans ce qui nous occupe, nous ne voyons figurer dans $v(r, t)$, à part les variables ωt et r/R , que le paramètre z . Ainsi la forme du profil dépend, outre du temps, seulement de la quantité

$$z = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}}.$$

Pour étudier toutes les formes possibles du profil, il suffit de faire varier z de zéro à l'infini.

Les calculs sont rendus plus simples lorsque z prend certaines valeurs déterminées; ce sont celles pour lesquelles l'une ou l'autre

des deux expressions $\mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i})$ et $\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})$ s'annule; car dans le premier cas on a $C = 0$, et dans le second, $B = 0$. Mais ce n'est pas à dire que les formes de profil correspondantes soient plus remarquables que les autres.

Prenons le premier de ces deux cas; alors $C = 0$, et z est une racine de l'équation $\mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i}) = 0$. Les tables de JAHNKE-EMDE (2. Aufl. 1933) donnent aux pages 296—298 et 308 les valeurs des fonctions $\mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i})$ et $\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})$ pour z réel. Il suffit de relever les valeurs de z pour lesquelles $\mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i}) = 0$. On en trouve deux; ce sont

$$z_1 = 2,849, \quad z_2 = 7,237. \quad (18)$$

Premier exemple. La première de ces racines, soit z_1 , implique que les constantes du tube, du liquide, et la fréquence sont telles que

$$R \sqrt{\frac{\varrho \omega}{\eta}} = 2,849.$$

On aurait ce cas en prenant $T = 2$ sec; $\omega = 2 \pi/T = 3,14$; $\varrho = 1,18$ (glycérine); $\eta = 0,27$; $R = 0,77$ cm. Comme on le voit, ce cas est très ordinaire parmi ceux qui peuvent se présenter.

La constante B , d'après (16), aura pour valeur

$$B = -\frac{A}{\omega} \frac{1}{\mathbf{Jm} J_0(z_1 \sqrt{i})}.$$

La table donne, pour $z_1 = 2,849$, $\mathbf{Jm} J_0(z_1 \sqrt{i}) = -1,80$. Donc

$$B = \frac{A}{1,8 \omega}.$$

La vitesse, d'après (17) et puisque $C = 0$, sera donnée par l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1,8 \omega}{A} v(r, t) &= \left[1,8 + \mathbf{Jm} J_0\left(\frac{r z_1}{R} \sqrt{i}\right) \right] \sin \omega t \\ &+ \mathbf{R\acute{e}} J_0\left(\frac{r z_1}{R} \sqrt{i}\right) \cdot \cos \omega t. \end{aligned}$$

Il suffira, pour avoir un profil des vitesses, de calculer le second membre pour diverses valeurs du rapport r/R , après avoir choisi une valeur de ωt . Pour ce calcul on utilise de nouveau les tables mentionnées.

La dernière colonne de ce tableau donne, pour différentes distances de l'axe du tube, des nombres proportionnels à la vitesse du liquide, qui permettent de construire le profil des vitesses pour l'instant de la période correspondant à la phase de 30° . On se procure

Tableau I.

Profil des vitesses pour $\omega t = \pi/6$.

$z_1 = 2,849$, $\sin \omega t = 0,5$, $\cos \omega t = 0,866$.

$\frac{r}{R}$	$\frac{r z_1}{R}$	$Re J_0\left(\frac{r z_1}{R} \sqrt{i}\right)$	$Im J_0\left(\frac{r z_1}{R} \sqrt{i}\right)$	$\frac{1,8 \omega}{A} v$
0	0	1	0	1,766
0,1	0,2849	0,9999	-0,0203	1,756
0,2	0,5698	0,9984	-0,0812	1,723
0,3	0,8547	0,9917	-0,1825	1,666
0,4	1,1396	0,9736	-0,3237	1,581
0,5	1,4245	0,9358	-0,5036	1,458
0,6	1,7094	0,8671	-0,7197	1,290
0,7	1,9943	0,7545	-0,9671	1,069
0,8	2,2792	0,5833	-1,2381	0,786
0,9	2,5641	0,3373	-1,5211	0,430
1,0	2,8490	0	-1,7995	0

aisément d'autres tableaux pour les phases 60° , 90° , ... et l'on peut ainsi suivre les variations du profil au cours d'une période (fig. 1).

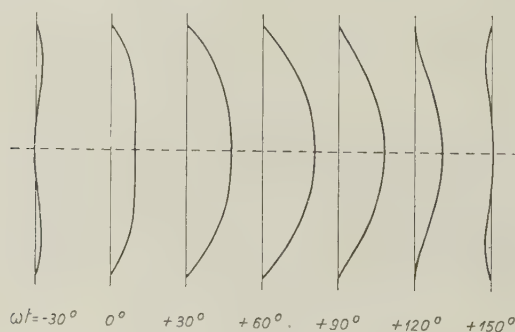


Fig. 1.

On remarquera que les filets de liquide voisins de la paroi ont par rapport à ceux qui sont voisins de l'axe une *avance de phase*, et c'est la raison pour laquelle le profil se modifie au cours de la période.

Deuxième exemple. La deuxième racine (18), soit z_2 , implique que les constantes sont telles que

$$R \sqrt{\frac{\varrho \omega}{\eta}} = 7,237.$$

Si l'on suppose le même tube et le même liquide, la fréquence doit être plus grande. Ce choix de z_2 simplifie de nouveau les calculs puisque $C = 0$. La table donne pour $z_2 = 7,237$, $\mathbf{Jm} J_0(z_2 \sqrt{i}) = 25,05$, de sorte que l'expression de la vitesse est

$$\frac{25,05 \omega}{A} v(r, t) = \left[25,05 - \mathbf{Jm} J_0 \left(\frac{r z_2}{R} \sqrt{i} \right) \right] \sin \omega t \\ - \mathbf{Re} J_0 \left(\frac{r z_2}{R} \sqrt{i} \right) \cdot \cos \omega t.$$

La fig. 2 donne le profil des vitesses au cours d'une demi-période.

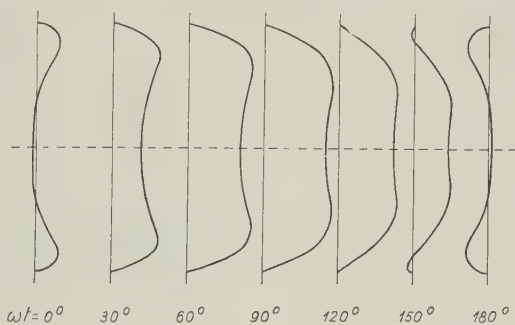


Fig. 2.

Ces exemples montrent que, dans le cas simple d'une pression sinusoïdale et dans les cas plus généraux, le profil des vitesses peut être une courbe compliquée. Il serait du plus haut intérêt de posséder des profils déterminés par voie expérimentale, car ils confirmeraient probablement les hypothèses qui servent de base à nos calculs. Mais, comme ces faits ont rarement retenu l'attention des physiciens et comme ces expériences sont difficiles, nous ne saurions citer des résultats expérimentaux correspondant exactement à la théorie exposée. Néanmoins nous présentons au lecteur, à titre d'illustration, des profils de vitesses déterminés par A. MÜLLER¹⁾ dans des conditions d'expérience que nous indiquons brièvement (fig. 3).

Une balle en caoutchouc pressait pendant un certain temps (systole) une certaine quantité de liquide (glycérine + eau) dans un

tube métallique de 1 cm de rayon et de 4 m de longueur, aboutissant à un réservoir. Puis on supprimait brusquement la pression à l'extérieur de la balle, ce qui avait pour effet d'établir une chute de pression négative le long du tube. La vitesse du liquide diminuait alors peu à peu jusqu'à une valeur nulle. Après ce temps (diastole), le phénomène recommençait et on obtenait ainsi un mouvement rythmique analogue à celui de la circulation du sang chez les animaux.

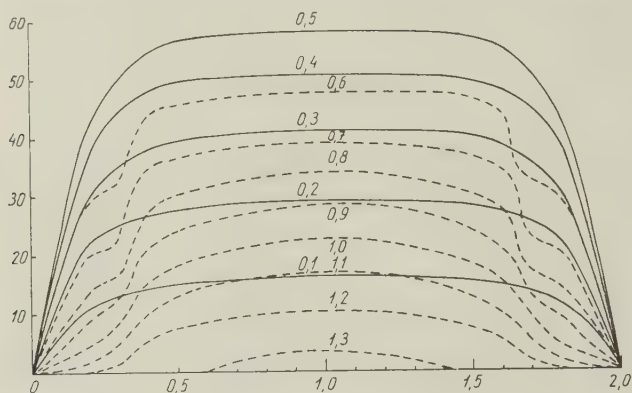


Fig. 3.

On reconnaît sur la fig. 3 l'avance de phase de la vitesse des couches extérieures et le profil aplati observé sur nos exemples. Toutefois nous ne pouvons suivre par le calcul ce phénomène, vu la forme compliquée de la courbe de la pression.

4. Calcul de la force de frottement.

La force de frottement par unité d'aire qui s'exerce sur la surface latérale d'un cylindre de liquide de rayon r est donnée par $\eta \partial v / \partial r$. Au voisinage immédiat de la paroi elle est

$$F = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (19)$$

La dérivée de $v(r, t)$ peut être calculée pourvu qu'on fasse usage de la propriété des fonctions de Bessel exprimée par l'équation

$$J_0'(x) = -J_1(x),$$

$J_1(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre 1. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} = \cos \omega t & \left[-B \frac{z}{R} \mathbf{R\acute{e}} \sqrt{i} J_1 \left(\frac{r z}{R} \sqrt{i} \right) - C \frac{z}{R} \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1 \left(\frac{r z}{R} \sqrt{i} \right) \right] \\ & + \sin \omega t \left[-B \frac{z}{R} \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1 \left(\frac{r z}{R} \sqrt{i} \right) + C \frac{z}{R} \mathbf{R\acute{e}} \sqrt{i} J_1 \left(\frac{r z}{R} \sqrt{i} \right) \right]. \end{aligned}$$

On fait $r = R$, puis on forme l'expression de F d'après (19) et on trouve

$$\begin{aligned} \frac{RF}{z\eta} = -\cos \omega t & [B \mathbf{R\acute{e}} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) + C \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})] \\ & - \sin \omega t [B \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) - C \mathbf{R\acute{e}} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})]. \end{aligned}$$

Enfin, après avoir remplacé B et C par leurs expressions (16) et tenu compte de $z^2 = R^2 \varrho \omega / \eta$, on obtient

$$\frac{2F}{\varrho R} = -p A \sin \omega t - q A \cos \omega t \quad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} p = -\frac{2}{z} & \frac{\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) + \mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{R\acute{e}} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})}{[\mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})]^2} \\ q = -\frac{2}{z} & \frac{\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{R\acute{e}} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) - \mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})}{[\mathbf{R\acute{e}} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})]^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Le calcul numérique montre que p et q sont toujours positifs. Nous aurions en (20) une expression de la force de frottement; mais elle n'est pas définitive.

Calcul de la vitesse moyenne. La vitesse moyenne dans la section est définie par

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r, t) 2\pi r dr.$$

Au lieu de faire ce calcul direct, il est plus simple de partir de l'équation différentielle (4), qui peut s'écrire

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\varrho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

On forme l'opération de la moyenne sur chacun des termes:

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr + \frac{\varrho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\varrho}{\eta} \frac{dU}{dt}.$$

Le premier terme, d'après (19), devient $2F/\eta R$; et cette équation peut s'écrire

$$\frac{2F}{\eta R} + \frac{\varrho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\varrho}{\eta} \frac{dU}{dt},$$

ou encore

$$\frac{dU}{dt} = \frac{2F}{\varrho R} + A \cos \omega t. \quad (22)$$

A l'aide de (20) cette équation peut s'écrire encore

$$\frac{dU}{dt} = -p A \sin \omega t + (1-q) A \cos \omega t.$$

On intègre, mais sans ajouter de constante arbitraire, car toutes les grandeurs sont des fonctions sinusoïdales du temps.

$$U = \frac{p}{\omega} A \cos \omega t + \frac{1-q}{\omega} A \sin \omega t. \quad (23)$$

Telle est l'expression de la *vitesse moyenne*. Les trois équations (20), (22) et (23) permettent l'élimination de $A \cos \omega t$ et $A \sin \omega t$. On obtient

$$\left(\frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right) \frac{2F}{\varrho R} = -\frac{\omega}{1-q} U - \left(\frac{q}{p} - \frac{p}{1-q} \right) \frac{dU}{dt}.$$

Cette équation peut s'écrire aussi

$$(1-q) \left(\frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right) \frac{2F}{\varrho R} = -\omega U - \left[\frac{1-q}{p} - (1-q) \left(\frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right) \right] \frac{dU}{dt}.$$

Introduisons les constantes γ et β définies par

$$\alpha = (1-q) \left(\frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right), \quad \beta = \frac{1-q}{p}, \quad (24)$$

Alors la *formule définitive de la force de frottement* est

$$F = -\frac{\varrho R \omega}{2\alpha} U - \frac{\varrho R}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \frac{dU}{dt}. \quad (25)$$

Nous rappelons que α et β qui figurent dans cette formule sont donnés par (24), et p et q par (21). Comme ces diverses grandeurs sont des fonctions de la seule variable z , on peut préparer des tables pour α et β , grâce auxquelles l'emploi de la formule (25) est facilité. Les valeurs numériques de toutes les fonctions que l'on voit dans les expressions de p et q , et qui figurent avec les symboles **Ré** et **Jm** sont données jusqu'à $z = 10$ dans les tables de JAHNKE-EMDE.

Tableau II.

Valeurs de α et de β pour différents z .

$$z = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}}.$$

z	α	β	z	α	β
0	0	0	5,0	2,3647	2,9633
0,2	0,0050	0,0067	5,2	2,4940	3,1098
0,4	0,0200	0,0267	5,4	2,6249	3,2527
0,6	0,0450	0,0602	5,6	2,7577	3,4003
0,8	0,0800	0,1069	5,8	2,8875	3,5429
1,0	0,1250	0,1669	6,0	3,0218	3,6851
1,2	0,1797	0,2396	6,2	3,1510	3,8240
1,4	0,2442	0,3256	6,4	3,2869	3,9697
1,6	0,3183	0,4238	6,6	3,4214	4,1172
1,8	0,4014	0,5345	6,8	3,5563	4,2590
2,0	0,4933	0,6560	7,0	3,6912	4,4047
2,2	0,5932	0,7878	7,2	3,8260	4,5439
2,4	0,7007	0,9293	7,4	3,9620	4,6887
2,6	0,8145	1,0774	7,6	4,0983	4,8328
2,8	0,9339	1,2337	7,8	4,2338	4,9751
3,0	1,0577	1,3917	8,0	4,3710	5,1182
3,2	1,1848	1,5549	8,2	4,5065	5,2585
3,4	1,3132	1,7166	8,4	4,6443	5,4004
3,6	1,4442	1,8805	8,6	4,7815	5,5470
3,8	1,5758	2,0412	8,8	4,9188	5,6864
4,0	1,7071	2,1999	9,0	5,0561	5,8318
4,2	1,8381	2,3566	9,2	5,1960	5,9724
4,4	1,9702	2,5130	9,4	5,3311	6,1136
4,6	2,1012	2,6665	9,6	5,4687	6,2571
4,8	2,2323	2,8150	9,8	5,6077	6,4016
			10,0	5,7450	6,5433

5. Deux cas limites.

Ces deux cas sont $z = 0$ et $z = \infty$. Occupons-nous d'abord du premier cas et demandons-nous sous quelles formes se présentent α et β , qui figurent dans (25), pour de *très petites valeurs de z* . Il faut pour cela recourir aux formules de p et q (21) et utiliser les développements en série suivants :

$$J_0(z \sqrt{i}) = 1 - \frac{z^2}{4} i - \frac{z^4}{64} + \frac{z^6}{2304} i + \dots$$

$$\sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) = \frac{z}{2} i + \frac{z^3}{16} - \frac{z^5}{384} i - \dots$$

On en déduit les diverses fonctions qui figurent dans les formules (21), par exemple

$$\text{Im } J_0(z\sqrt{i}) = -\frac{z^2}{4} + \frac{z^6}{2304} - \dots$$

On retient les termes principaux de ces développements et on introduit les expressions trouvées pour p et q dans les formules (24) de α et β . On obtient

$$\alpha = \frac{z^2}{8}, \quad \beta = \frac{z^2}{6},$$

ce qui signifie qu'on a les limites suivantes :

$$\lim_{z=0} \frac{z^2}{\alpha} = 8, \quad \lim_{z=0} \frac{z^2}{\beta} = 6, \quad \lim_{z=0} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3}. \quad (26)$$

Le cas $z = \infty$ présente un peu plus de difficultés ; nous indiquerons brièvement la méthode à suivre sans entrer dans les détails du calcul.

Il faut partir de la formule asymptotique suivante pour $J_0(x)$; elle est de plus en plus exacte à mesure que x est plus grand, et valable pour les valeurs réelles ou complexes de la variable⁴⁾ :

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}}.$$

Comme $J_1(x) = -J'_0(x)$, on a également

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}},$$

seulement on pourra constater, en effectuant la dérivation, qu'on a fait usage des formules d'approximation. On ne s'étonnera donc pas que les formules qui seront données pour p et q se réduisent à un seul terme.

A l'aide de ces formules approchées on formera les expressions $J_0(z\sqrt{i})$ et $\sqrt{i} J_1(z\sqrt{i})$. On transformera ensuite ces dernières à l'aide du calcul des imaginaires, et on séparera la partie réelle et la partie imaginaire, en ne retenant chaque fois que le terme principal. Ces résultats étant introduits dans les formules (21), celles-ci donneront

$$p = \frac{\sqrt{2}}{z}, \quad q = \frac{\sqrt{2}}{z}.$$

On obtiendra finalement, à l'aide de (24),

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{2}} - 2, \quad \beta = \frac{z}{\sqrt{2}} - 1. \quad (27)$$

Telles sont les valeurs de α et de β qui correspondent aux grandes valeurs de z .

6. Mouvement périodique général.

Lorsque la pression appliquée varie suivant une loi périodique quelconque, l'équation différentielle à résoudre, au lieu de (4), a la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\rho}{\eta} \Sigma A_i \sin(\omega_i t + \Phi_i) = \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (28)$$

Les fréquences circulaires ω_i sont les multiples de la fréquence fondamentale.

A chacun des termes de la série de FOURIER correspond une équation

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{\rho}{\eta} A_i \sin(\omega_i t + \Phi_i) = \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

Nous avons une formule toute prête pour la solution v_i qui satisfait à la condition aux limites (5); c'est la formule (17), dans laquelle cependant il faudra déplacer l'origine du temps. Mais ce détail est sans importance, car l'expression de la force de frottement (25) ne dépend pas de cette origine; elle est

$$F_i = -\frac{\rho R \omega_i}{2 \alpha_i} U_i - \frac{\rho R}{2} \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} - 1 \right) \frac{dU_i}{dt}.$$

La solution de l'équation (28) est

$$v = \Sigma v_i,$$

elle satisfait à la condition aux limites. Enfin, puisque

$$F = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = \Sigma \eta \frac{\partial v_i}{\partial r} \Big|_{r=R} = \Sigma F_i,$$

on reconnaît que la *force de frottement* dans le cas général est donnée par la formule suivante que nous présentons sous forme développée

$$\begin{aligned} F = & -\frac{\rho R \omega_1}{2 \alpha_1} U_1 - \frac{\rho R}{2} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - 1 \right) \frac{dU_1}{dt} \\ & - \frac{\rho R \omega_2}{2 \alpha_2} U_2 - \frac{\rho R}{2} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} - 1 \right) \frac{dU_2}{dt} \\ & - \text{etc.} \end{aligned} \quad (29)$$

On remarquera qu'elle n'est pas constituée par une somme de deux termes seulement, où figurerait la vitesse moyenne U .

Bien que la formule de la force de frottement présente déjà un intérêt pour elle-même, c'est surtout en vue de ses applications que nous l'avons établie. Le lecteur pourra, à ce sujet, consulter deux

études que nous venons d'achever. L'une concerne le passage d'une onde dans le fluide contenu dans un tube élastique, et paraîtra dans cette Revue. L'autre, qui intéresse plus particulièrement les physiologistes, concerne les manomètres destinés à l'enregistrement des variations de la pression sanguine; elle a paru dans les *Helvetica Physiologica Acta*.⁵⁾

Notes.

- ¹⁾ P. LAMBOSSY, Aperçu historique et critique sur le problème de la propagation des ondes dans un liquide compressible enfermé dans un tube élastique, *Helv. Physiol. Acta* **8**, 209—227 (1950) et **9**, 145—161 (1951).
 - ²⁾ RAYLEIGH, Theorie des Schalles, deutsche Ausgabe von Fr. Neesen, Bd. II, p. 369—373 (1880).
 - ³⁾ A. MÜLLER und P. LAMBOSSY, Über die bei rhythmischer Kontraktion eines Gummiballes entstehende Strömung in einem starrwandigen Leitungssystem, *Helv. Physiol. Acta* **7**, 170 (1949).
 - ⁴⁾ RIEMANN-WEBER, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4. Aufl., Bd. I, p. 185 (1900).
 - ⁵⁾ P. LAMBOSSY, *Helv. Physiol. Acta*, **10**, 138—160 (1952).
-

Investigations on the odd-odd isotopes Ga^{64} , Ga^{66} , Ga^{68} and the odd-even isotope Ga^{67}

by **Ambuj Mukerji** and **Peter Preiswerk**.

Swiss Federal Institute of Technology.

(4. II. 1952.)

Summary. Disintegrations of the odd-odd isotopes Ga^{64} , Ga^{66} and Ga^{68} have been investigated by spectrometer and coincidence measurements. The positron activity assigned in literature to Ga^{64} has to be attributed to some impurities. Disintegration schemes for Ga^{66} and Ga^{68} have been established. Spin assignments to ground states of Ga^{66} and Ga^{68} have been compared to those predicted by Nordheim's rules regarding odd-odd nuclei.

Some new γ -radiations observed during the course of disintegration of Ga^{67} are reported in the supplement and a disintegration scheme proposed. The findings are difficult to reconcile with the predictions from shell model in its simplest form.

1. Introduction.

It is well known that all the odd-odd nuclei with the exception of ${}^1_1\text{H}^2$, ${}^3_3\text{Li}^6$, ${}^5_5\text{B}^{10}$ and ${}^7_7\text{N}^{14}$ are unstable. They, therefore, disintegrate into the corresponding stable even-even isobars. The nuclear spins of the nuclei with odd mass numbers can be predicted with the help of the nuclear shell model¹⁻⁴⁾ in its simplest form of single particle picture. For the odd-odd nuclei NORDHEIM⁵⁾ has formulated an empirical rule about the manner in which the odd proton and the odd neutron combine together to give the total spin of a nucleus of this type in its ground state. But till now only relatively few instances are known to verify the validity of this rule and it seems to be too premature to draw conclusions from it. Otherwise also, it seems important to know more about the combinations of spins of the odd-odd nuclei, as it is hoped that valuable informations about the properties of bound states of nuclei may be obtained from such studies. The precise investigation of the disintegration schemes of radioactive isotopes is a good method for assigning spins of the nuclear energy levels.

The work reported here is a part of a bigger programme of investigations that is being carried out in this laboratory to study the modes of decay of odd-odd nuclei and consequently, the excited states of the even-even nuclei.

The element gallium has quite a number of unstable isotopes which have been produced by various means in different laboratories since the earliest days of artificial radioactivity. Their half-lives have been well determined and well assigned. On the other hand, prior to the beginning of the investigations reported here, for most of the isotopes the radiations emitted had been rather poorly studied and practically no proper attempts had been made to arrive at their disintegration schemes. It is the special purpose of this paper to work out the disintegration schemes of some of the odd-odd isotopes of gallium which can be produced by proton bombardment of zinc. As the effects due to the isotope Ga^{67} entered into all our measurements, a general investigation of it was done, although not in direct connection to the problem proposed.

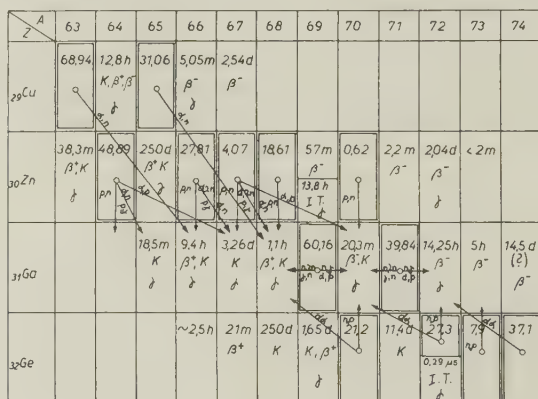


Fig. 1.
Relevant part of nuclear chart.

The relevant part of the nuclear chart is reproduced in Fig. 1 which provides a rapid orientation about the nuclear properties of the isotopes with which we are concerned here.

2. Method of Irradiation and Preparation of the Sample.

Irradiations necessary for all the experiments described in this paper were carried out in the following way. A thin layer of zinc was melted on a directly cooled copper probe target which was then bombarded by the 6.8 MeV internal proton beam of the E.T.H. cyclotron. The layer of activated zinc was then dissolved off the target by immersion in hot 6 N HCl. Gallium was chemically separated from zinc by extracting this solution with ether. On eva-

porating ether, carrier-free gallium remained behind and could be brought on a formvar or mica foil with the use of a few drops of water or dilute acid as the case may be. Our sincerest thanks are due to Dr. E. JACOBI who carried out the chemical separations for all the samples prepared during the course of these investigations.

3. The Isotope Ga^{64} .

By bombarding zinc with 6.3 MeV protons BUCK⁶⁾ observed a positron activity of 48 m half-life in the gallium fraction. The threshold of production was determined by him to be 4.1 MeV and from it the maximum energy of the positrons was deduced to be 2.3 MeV. He assigned the activity to Ga^{64} .

Since the energy of the proton-beam used by us exceeded 6.3 MeV, it should have been sufficient to produce this activity. However, we were unable to detect any trace of the same, both by measurements with *G-M* counters and beta-ray spectrometer. Hence, we are led to conclude that Buck's findings of an activity of 48 m half-life were due to some impurities present in the gallium sample used by him, probably Zn^{63} . The activity due to Ga^{64} must have either a very much shorter half-life or the threshold of production exceeds our proton energy.

4. The Isotope Ga^{66} .

a) *Summary of Previous Investigations.*

When these investigations were undertaken, of this isotope only the half-life of 9.4 h and the maximum energy of the positrons were known. A number of workers⁶⁻¹⁴⁾ have observed this activity from different reactions and hence the assignment of the same to the gallium isotope of mass number 66 may be considered as unique.

MANN⁸⁾ studied the positron spectrum in the cloud-chamber and also determined the maximum energy of the positrons by absorption in aluminium. This value is given in the literature¹⁵⁾ as 3.9 MeV. Simultaneously with the present authors¹⁶⁾ reporting their findings, MOFFAT and LANGER¹⁷⁾ announced the results of their investigations on this isotope and later they¹⁸⁾ published a detailed description. The results of our experiments lead us to different conclusions so that a report giving full particulars of the experiments was considered to be of some interest.

The main components of the disintegration are the high energy positron spectrum with an upper limit at 4.15 MeV and two intense

γ -lines of 2.75 and 1.05 MeV. By coincidence measurements we have established that these two γ -radiations are emitted in cascade and that the main part of the positrons are emitted without being in coincidence with a nuclear γ -line. We are thus led to conclude that the main positron spectrum goes over directly to the ground-level. The disintegration scheme of MOFFAT and LANGER¹⁸⁾ is in contradiction to the fact that the threshold for production by (p, n) reaction is less than 6.8 MeV. The recent determination of the threshold for (p, n) reaction in this laboratory¹⁹⁾ at 6.3 MeV confirmed our conclusion. The proposed disintegration scheme will be discussed in detail after having described the experimental investigations.

b) Positron-Spectrum and the Fermi-Kurie Plot.

The positron spectrum was measured with the lens spectrometer of the laboratory using a resolving power of 2.5%. The upper limit of the spectrum was found to be (4.15 ± 0.05) MeV. At the lower energy end the internal conversion lines due to Ga⁶⁷ of 78 h half-life were superimposed on the spectrum and their effects had to be corrected for. The Fermi-Kurie plot indicates a complex spectrum which can be decomposed into four partial spectra with the end-points at 4.15, 1.38, 0.90 and 0.40 MeV. Their relative intensities are given in Table I.

Table I.

	End Energies of the Partial Positron Spectra in MeV	Relative Intensities
1	4.15 ± 0.05	87.0
2	1.38 ± 0.05	4.2
3	0.90 ± 0.05	6.9
4	0.40 ± 0.05	1.8

The form of the main spectrum is that of an allowed transition. The results of the positron spectrum measurement are in excellent agreement with those of MOFFAT and LANGER¹⁸⁾. From the end points of the partial spectra we are able to conclude on the excited levels of Zn⁶⁶ at 2.75, 3.3 and 3.8 MeV.

c) γ -Radiations.

To look for the presence of nuclear γ -radiations besides the strong annihilation, measurements of Compton and photo-electrons in the lens spectrometer were undertaken. The high energy positrons were

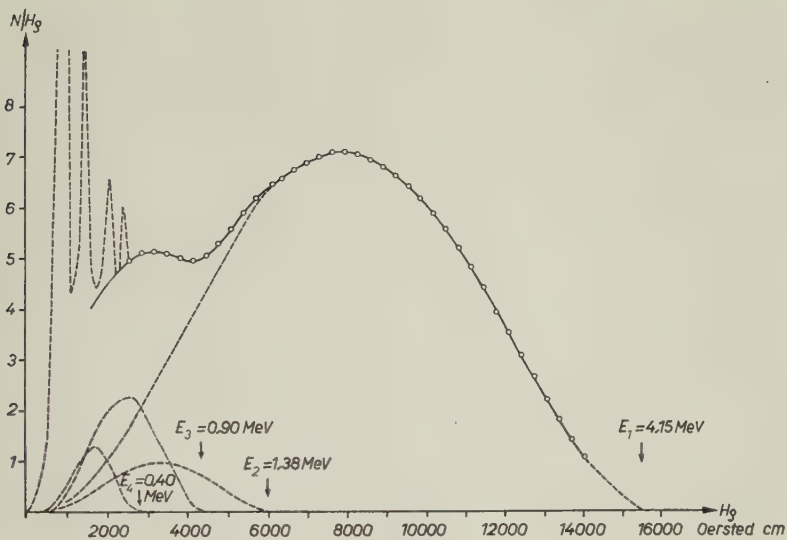


Fig. 2.
Positron spectrum of Ga^{66} .

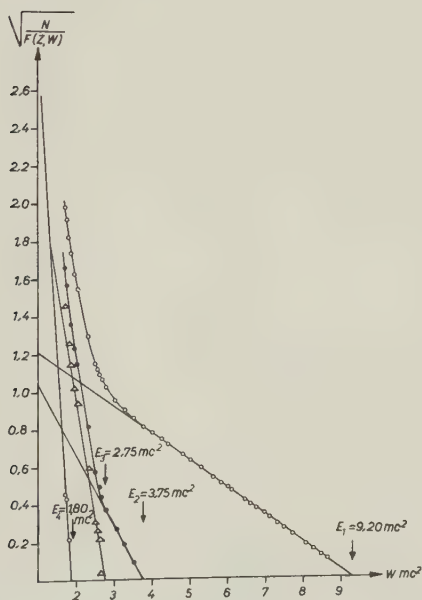


Fig. 3.
Fermi-Kurie plot of the positron spectrum of Ga^{66} .

absorbed in capsules of gold and brass and the Compton electrons were ejected from that of aluminium.

The Compton electron distribution curve indicates several components. Besides the annihilation, there are two very intense γ -rays of energies 1.05 and 2.75 MeV present. Calibration measurements undertaken for a check with Na²⁴ using identical geometry of the arrangement showed clearly that there are weaker components present with energies between these two. These could be resolved into two components of 1.7 and 2.2 MeV. Further, at the higher energy end the presence of a 3.3 MeV γ -component is apparent. The tail of the curve shows the presence of even higher energy γ -radiations which could not however be measured with our spectrometer. MOFFAT and LANGER¹⁸⁾ have observed a γ -line of 4.8 MeV. HOFSTADTER and MCINTYRE²⁰⁾ were able by the NaI scintillation counter method to resolve a γ -line at 4.27 MeV. The energies of the two principal γ -lines were determined more accurately by measuring the photo-electrons ejected from a lead radiator and was found to be

$$h\nu_1 = (1.05 \pm 0.02) \text{ MeV}$$

$$h\nu_2 = (2.75 \pm 0.02) \text{ MeV}$$

To determine the shapes of the Compton electron distribution curves as well as the efficiencies of the radiator used for the γ -ray energies with which we were concerned, calibration measurements were done with the 0.511 MeV γ -ray of C¹¹, the 1.17 and 1.33 MeV γ -rays of Co⁶⁰ and the 1.38 and 2.758 MeV γ -rays of Na²⁴. For these calibration measurements the geometry of the arrangements employed was identical as in the case of Ga⁶⁶. In the light of these measurements it was possible to resolve the Compton electron distribution curve into its various components and then to estimate their relative intensities. The values so obtained are given in Table II.

Table II.

	Energies of the γ -Radiations in MeV	Relative Intensities
1	0.511	12.0
2	1.05	3.7
3	1.7	0.3
4	2.2	0.5
5	2.75	2.9
6	3.3	0.5
7	4.25	0.2
8	4.8	0.2

From HORSTADTER and MCINTYRE'S²⁰⁾ measurements we estimate the relative intensities of the 4.25 and 4.8 MeV components to be approximately equal. The relative intensities of the low energy components might have been a little over-estimated on account of the

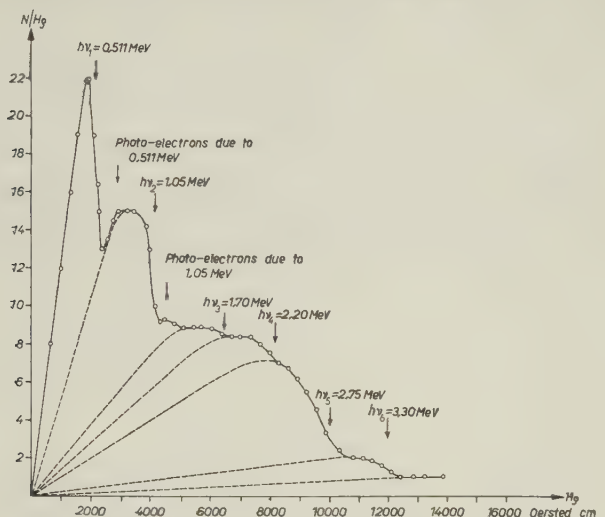


Fig. 4.

Compton electron distribution curve of Ga^{66} . The sample taken inside capsules of gold and brass and the Compton electrons ejected from that of aluminium.

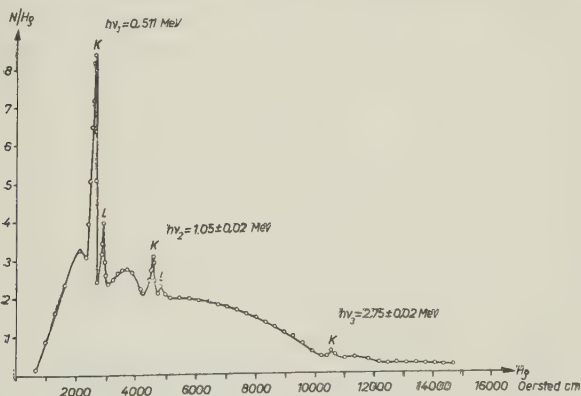


Fig. 5.

Photo- and Compton electron distribution curve of Ga^{66} .
17 μ -thick Pb foil used as radiator.

continuous spectrum of Bremsstrahlung and the hard annihilation radiation due to the stopping of the high energy positrons in the capsule (*vide* Investigations on Zn^{63})²¹⁾.

d) γ - γ -Coincidences.

γ - γ -coincidences may take place in the case under discussion besides those between annihilation radiations, between the annihilation radiation and the nuclear γ -rays or between any two nuclear γ -rays. To clear up the mode of disintegration process it was important to determine the energies of the γ -radiations which were in coincidence. For this purpose measurement of coincidence absorption curve was considered very helpful.

Two anthracene crystals together with photo-multipliers were used for registering the counts. They were so arranged that the two crystals subtended a right angle at the source. The source was taken inside a brass capsule round which sufficient lead foils were wrapped

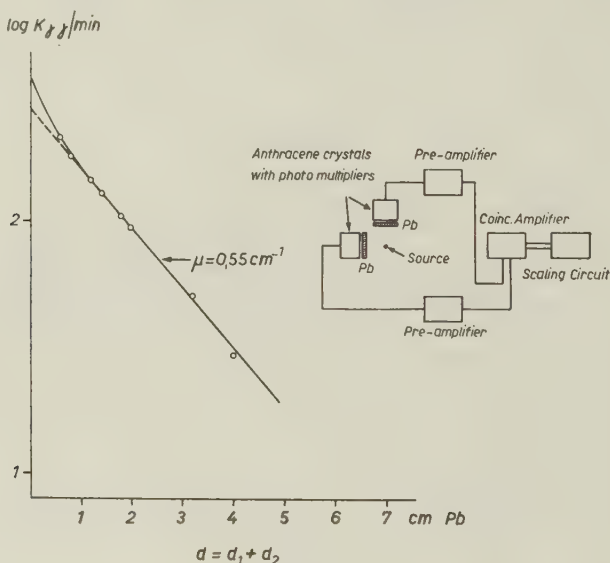


Fig. 6.

γ - γ coincidence absorption curve of Ga^{66} obtained using anthracene crystals together with photo-multipliers.

to completely absorb the extremely hard positrons due to this isotope. Fig. 6 shows the coincidence absorption curve in lead obtained by every time placing equal absorbers in front of each counter. When two γ -radiations are emitted in cascade, the number of recorded coincidences is given by

$$K = 2 N \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{-(\mu_1 + \mu_2) d} \omega^2$$

where N is the number of nuclei disintegrating per minute, ε_1 , ε_2

the efficiencies of the anthracene crystals for the energies of the γ -radiations in coincidence, μ_1 and μ_2 the absorption coefficients in lead for these γ -rays, ω the solid angle subtended and d the thickness of the absorber. The absorption curve plotted in logarithmic scale is mainly a straight line with an absorption coefficient $\mu = 0.55 \text{ cm}^{-1}$.

If we admit that the two most intense γ -lines 1.05 and 2.75 MeV are emitted in cascade, then the expected $\mu = 0.6 \text{ cm}^{-1}$. The experimentally determined value is in excellent agreement with this assumption taking into account the correction which has to be applied for the geometry of the arrangement.

It is apparent from the measured curve that some coincidences are also due to a softer component presumably the annihilation radiation being emitted in cascade with one of the principal nuclear γ -rays. But the intensity is much less than it would have been if the main positron spectrum were in coincidence with a γ -radiation as concluded by MOFFAT and LANGER¹⁸).

e) Transition Probabilities.

The ratio of disintegrations by K -captures to those by positron emissions has been experimentally determined by MOFFAT and LANGER¹⁸) by comparing the area of the measured curve of the Auger electrons to that of the positron spectrum. They found that 34% of all the nuclear disintegrations are due to K -captures.

The theoretical ratios for the probabilities of K -captures to positron emissions for all the partial transitions taking them to be allowed, have been calculated by us and are given in Table III.

Table III.

	Excited Energy Levels of Zn ⁶⁶ in MeV	End Energies of the β^+ -Spectra in MeV	Rel. Probabilities of K -Captures and β^+ -Emissions
1	0	4.15	8.7×10^{-3}
2	2.75	1.38	1.8×10^{-1}
3	3.30	0.90	1.1
4	3.80	0.40	24.0

The transitions to the levels indicated by 4.25 and 4.8 MeV γ -lines can only be possible by orbital electron-captures. These transitions may be taken as approximately 4% of the total disintegrations from the relative intensities of the following γ -lines to the positron spectrum.

f) Discussion of the Disintegration Scheme.

As has been mentioned before we came to the conclusion that the main part of the positron emissions leads directly to the ground level of Zn^{66} . Decomposition of the positron spectrum revealed excited levels at 2.75, 3.3 and 3.8 MeV. The conclusion that the de-excitation of the 2.75 MeV level takes place by the emission of the strong γ -radiation of the corresponding energy would be most natural. However, then the difficulty would be in fitting the 1.05 MeV γ -radiation to the scheme as it is the strongest component

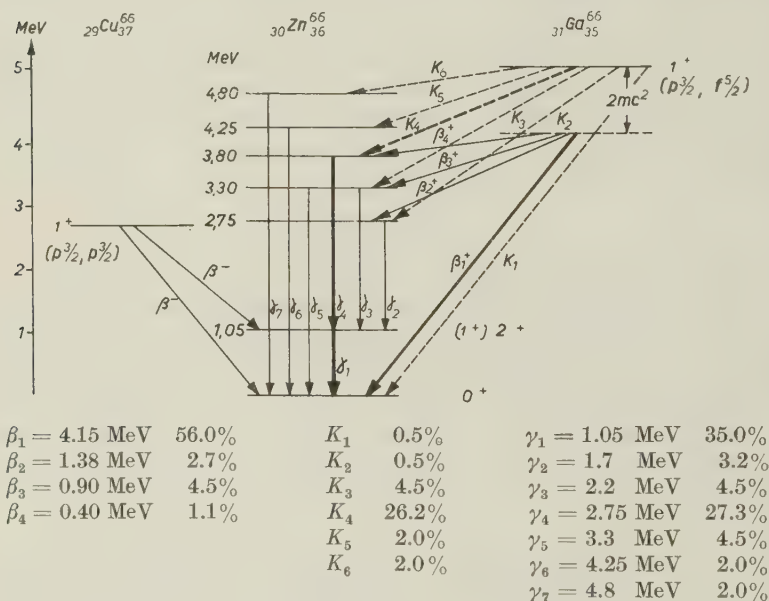


Fig. 7.

Proposed disintegration scheme of Ga^{66} .

and is emitted in coincidence with the 2.75 MeV one. This difficulty might be solved by assuming that the 1.05 MeV component consists really of two γ -radiations of nearly the same energy and only one of them precedes the 2.75 MeV. This interpretation would be rather artificial as no splitting of the 1.05 MeV line has been observed.

This problem can be cleared up when we take into account the other weaker γ -components and the excited energy level of Zn^{66} at 1.05 MeV revealed by the beta-decay of Cu^{66} which has recently

been found out by MEYERHOF et al.²²⁾* and MAEDER and PREISWERK²³⁾. The energy of the γ -radiation in the case of Ga^{66} is the same and therefore most probably emanates from this lowest excited level. The 2.75 MeV radiation which is in cascade with this radiation then originates from the 3.8 MeV excited level revealed by the Fermi-Kurie plot of the positron spectrum. The de-excitation of the 2.75 MeV level takes place by the emission of the weak 1.7 MeV γ -ray also in cascade with the 1.05 MeV line. The 2.2 MeV component too can be easily fitted into this scheme. The higher energy components are to be taken as leading directly to the ground level. The total disintegration energy would not allow of any other conclusions. The disintegration scheme so arrived at is reproduced in Fig. 7. The assumed scheme explains fully the relative intensities of the γ -lines (cf. Tables I, II and III).

We are now in a position to calculate the ft values for the different transitions which are given in Table IV.

Table IV.

	Excited Energy Levels of Zn^{66} in MeV	Transition Energies in MeV	$\log ft$
1	0	$4.15 + 2 \text{ mc}^2$	7.8
2	2.75	$1.37 + 2 \text{ mc}^2$	7.1
3	3.30	$0.90 + 2 \text{ mc}^2$	5.9
4	3.80	$0.40 + 2 \text{ mc}^2$	4.9
5	4.25	0.92	5.7
6	4.80	0.37	4.9

In attempting to assign spins to the excited levels we take into consideration the disintegration of ${}_{29}\text{Cu}^{66}_{37}$. According to the shell model in the region of 29 to 37 nucleons, the orbits $f_{5/2}$ and $p_{3/2}$ are filled up. From the data on odd-even nuclei, we know that the orbits $f_{5/2}$ and $p_{3/2}$ have approximately the same energy but the orbit $f_{5/2}$ is preferentially filled up in pairs. Between N or $Z = 29$ to 37 inclusive, spins of $3/2$ have been measured for every odd number, with the exception of ${}_{37}\text{Rb}^{85}_{48}$ and ${}_{30}\text{Zn}^{67}_{37}$ which show $f_{5/2}$ orbits. The transitions from Cu^{66} to Zn^{66} are of zero order according to the ft values evaluated. Hence, for ${}_{29}\text{Cu}^{66}_{37}$ a configuration $(p_{3/2}, p_{3/2})$ or $(f_{5/2}, f_{5/2})$ may be assumed. We admit the first configuration as

*) The authors wish to express their thanks to Prof. W. E. MEYERHOF for private communications on the subject of Cu^{66} .

the spins of odd-even copper nuclei are $3/2$. This gives for the filling up of the outer proton and neutron orbits in ${}_{30}\text{Zn}^{66}_{36}$

$$\begin{aligned} P & (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^0 (p_{3/2})^2 \\ N & (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^2 \end{aligned}$$

For ${}_{29}\text{Cu}^{66}_{37}$ NORDHEIM²⁴⁾ has assigned a configuration $(p_{3/2}, f_{5/2})$ which was based on the results of old measurements. The beta transitions were supposed to lead to an excited state of ${}_{30}\text{Zn}^{66}_{36}$. In the configuration assumed by us a resultant spin greater than 1 of the nucleus would be expected following NORDHEIM's⁵⁾ rule. But it seems unreasonable to assume a configuration $(p_{3/2}, p_{1/2})$ just to fit this rule.

A spin of 1^+ or 2^+ is to be assigned to the excited level at 1.05 MeV taking into consideration the ft value of the transition according to $G-T$ selection rules. A spin assignment of 2^+ is however more probable according to GOLDHABER and SUNYAR's²⁵⁾ classification that the first excited states of the majority of till now investigated even-even nuclei have spins 2^+ .

The transition from ${}_{31}\text{Ga}^{66}_{35}$ to the ground level of ${}_{30}\text{Zn}^{66}_{36}$ is characterised by an allowed form of the positron spectrum coupled with exceptionally high ft value, $\log ft = 7.8$. Such transitions following NORDHEIM⁵⁾ are of the type $\Delta L = 2, \Delta I = 1$. We conclude, therefore, for ${}_{31}\text{Ga}^{66}_{35}$ a configuration $(p_{3/2}, f_{5/2})$ with a total spin of 1 and even parity. For the other excited levels no definite spin assignments can be made. Spins of 1^+ or 2^+ only, are possible for the excited levels at 4.8, 4.25 and 3.3 MeV which de-excite directly to the ground from a consideration of the ft values.

Measurements of the angular correlation of the γ -rays made in this laboratory (M. RÜETSCH, unpublished) show that it depends on a small negative $\cos^2\theta$ term [$W(\theta) = 1 + A \cos^2\theta$, $A = -0.06 \pm 0.03$]. A conclusive spin assignment for the levels involved in the principal cascade transition cannot be made till the contributions to the coincidences due to the weaker components can be eliminated.

The disintegration scheme shows an interesting point, the missing transition from Ga^{66} to the 1.05 MeV level. In the case of Cu^{66} there are transitions of the same order to both this level and the ground by β^- -decay. It seems that to explain this fact, a further assumption has got to be introduced. The following is an attempt to explain it.

The resultant state is assumed as a mixture of several configurations, one out of which is given below as an example:

	$^{66}_{29}\text{Cu}_{37}$	$^{66}_{30}\text{Zn}_{36}$	$^{66}_{31}\text{Ga}_{35}$
P	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^0 (p_{3/2})^1$	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^0 (p_{3/2})^2$	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^0 (p_{3/2})^3$
N	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^3$	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^2$	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^5 (p_{3/2})^2$

It can now be presumed that the excited level at 1.05 MeV is due to the excitations of the two protons or two neutrons in the unfilled $p_{3/2}$ sub-shells or to a mixture of both. During the disintegration of Cu⁶⁶, the transition takes place between two nucleons of the unfilled sub-shells and may be therefore excited. In the case of Ga⁶⁶ on the other hand, the transition is to a sub-shell which is filled up by the process and therefore, only the living proton shell can be excited. If the 1.05 MeV level is owing to the mixture excitations of both the unfilled proton and neutron sub-shells, the probability of transitions to this level is reduced. This idea is put forward with reservations and only as an attempt to explain the missing transition. It has to be looked for if other similar cases can be found.

5. The Isotope Ga⁶⁸.

a) Summary of Previous Investigations.

A positron activity with 68 m half-life assigned uniquely to Ga⁶⁸ is known since a very long time and a large number of investigators (6-8) (10) (13) (27-38) have produced it by various means.

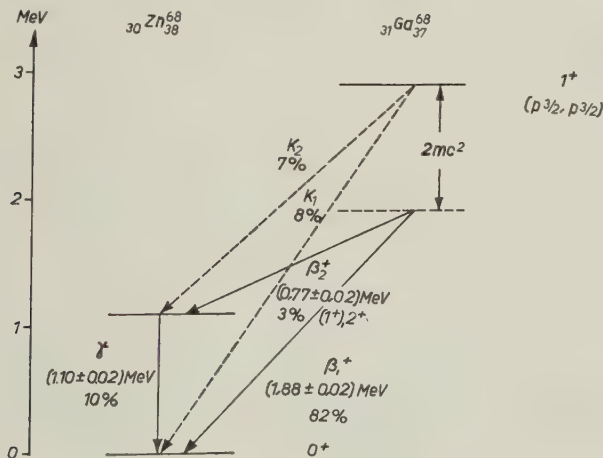


Fig. 8.

Proposed disintegration scheme of Ga⁶⁸.

MANN⁸⁾¹⁵⁾ and RIDENOUR and HENDERSON¹⁰⁾ determined the maximum energy of the positrons by absorption in aluminium as 1.9 MeV. Further, MANN⁸⁾ and SAGANE and MIYAMOTO³³⁾ investigated the positron spectrum with the help of cloud chambers.

We studied the mode of decay of Ga⁶⁸ more thoroughly and arrived at the disintegration scheme given in Fig. 8. The results of measurements performed, details of which follow, support the scheme.

b) Positron Spectrum and Fermi-Kurie Plot.

Investigations on the positron spectrum were made with the lens spectrometer employing the same procedure as described in the case of Ga⁶⁶. To avoid any disturbances due to the shorter period isotopes Ga⁶⁵ and Ga⁷⁰, the samples were allowed to age for sufficient long time before the measurements were started. Effects due to Ga⁶⁶ had to be subtracted. The spectrum obtained in this way and the corresponding Fermi-Kurie plot are reproduced in Figs. 9 and 10. The straight line form of the Fermi-Kurie plot in the higher energy region indicates a transition of zero order. The extrapolation of this straight line gives the upper limit of the positron spectrum as

$$E_1 = (1.88 \pm 0.02) \text{ MeV.}$$

The deviation from the straight line form of the Fermi-Kurie plot starting at 2.5 mc² indicates a second partial spectrum with an upper limit of

$$E_2 = (0.77 \pm 0.02) \text{ MeV.}$$

The second deviation must be taken as due to back scattering from the source and its mounting. The relative intensities of the two spectra were obtained by comparing their areas after decomposing the Fermi-Kurie plot following the theoretical forms and are given in Table V.

Table V.

	End Energies of the Partial Positron Spectra in MeV	Relative Intensities
1	1.88 ± 0.02	26
2	0.77 ± 0.02	1

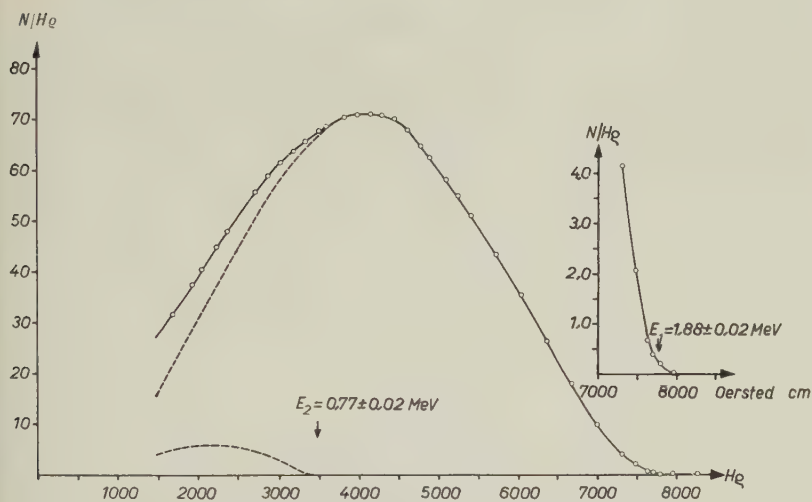


Fig. 9.
Positron spectrum of Ga^{68} .

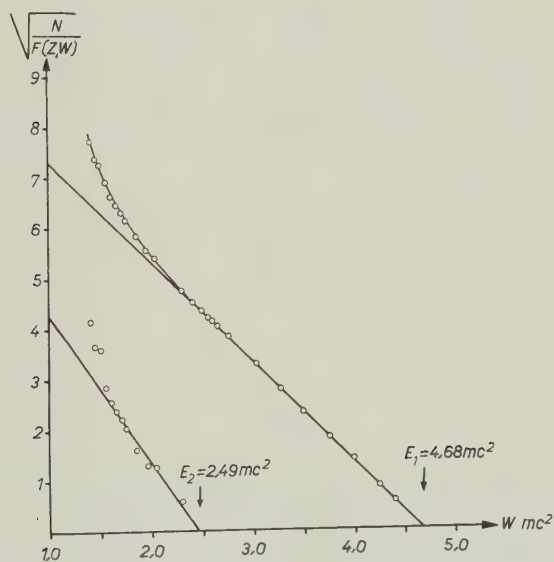


Fig. 10.
Fermi-Kurie plot of the positron spectrum of Ga^{68} .

c) γ -Radiations.

Search was made for the presence of internal conversion lines. Groups of electrons at $H_0 = 295, 312$ and 321 Oersted cm were observed (Fig. 11) which correspond to Auger electrons emitted following K orbital electron captures.

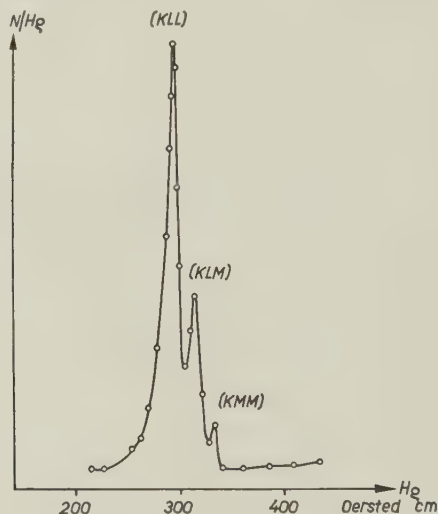


Fig. 11.

Auger electrons emitted following K -orbital electron captures during the process of disintegration of Ga^{68} .

To look for higher energy γ -radiations measurements of Compton and photo-electrons were undertaken with the same arrangements as described in the case of Ga^{66} . Besides the intense annihilation radiation, a higher energy component of 1.10 MeV is revealed in the Compton electron distribution curve (Fig. 12). The more accurate value of

$$h\nu = (1.10 \pm 0.02) \text{ MeV}$$

was obtained from photo-electron measurement (Fig. 13). The photo-electron peak of this line was rather broad when measured after an interval of about an hour after bombardment. The time decay of the peak was followed. Gradually instead of one, two peaks were clearly discernible. The second peak decayed with a half-life much longer than 68 m and as has been shown earlier belongs to Ga^{66} .

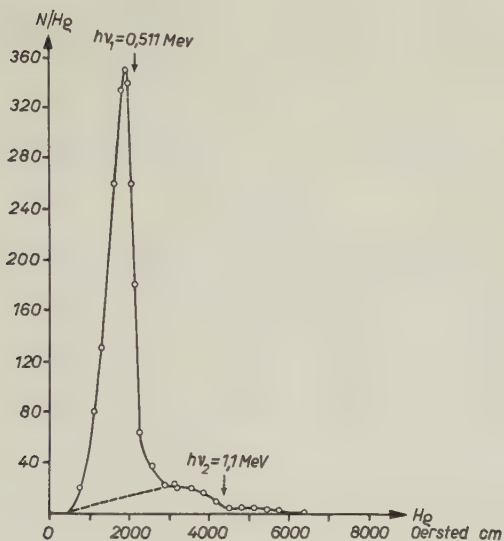


Fig. 12.

Compton electron distribution curve of Ga^{68} . The sample taken inside capsules of gold and brass and the secondary electrons ejected from that of aluminium.

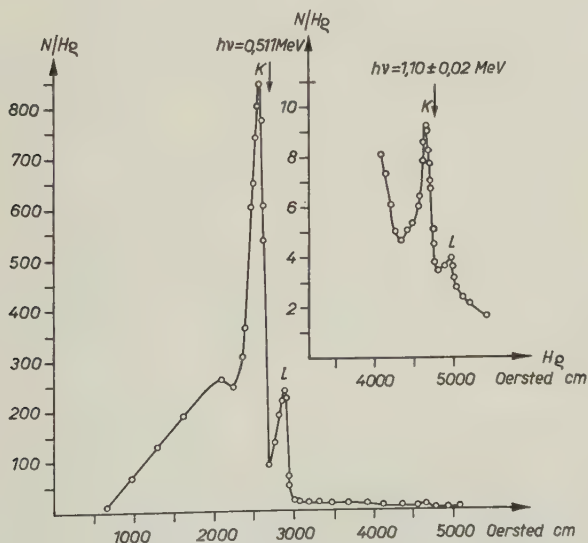


Fig. 13.

Photo- and Compton electron distribution curve of Ga^{68} .
17 μ -thick Pb foil used as radiator.

The intensity of the 1.10 MeV γ -line relative to the annihilation radiation was obtained by comparing the heights of the photo-electron peaks in the light of previous calibration measurements performed with 0.511 MeV annihilation radiation of C^{11} and 1.17 and 1.33 MeV γ -radiations of Co^{60} . The results are given in Table VI.

Table VI.

	Energies of the γ -Radiations in MeV	Relative Intensities
1	0.511	17.6
2	1.10	1.0

d) *Transition Probabilities.*

It has been shown above that the positron decay is complex consisting of two partial spectra with $E_1 = 1.88$ MeV and $E_2 = 0.77$ MeV. The second spectrum leads to an excited level at 1.10 MeV which is revealed also by the γ -line of the corresponding energy. The theoretical ratios for the probabilities of transitions by orbital electron captures and positron emissions have been calculated and are given in Table VII.

Table VII.

	Excited Energy Levels of Zn^{68} in MeV	End Energies of the Partial Positron Spectra in MeV	Rel. Probabilities of K -Captures to β^+ -Emissions	$\log ft$
1	0	1.88	0.1	5.1
2	1.1	0.77	2.2	4.8

The ft values for both the transitions are of the same order and correspond to zero order transitions as have been revealed by the forms of the spectra.

e) *Discussion of the Disintegration Scheme.*

From the fact that the spin of the even-even nucleus ${}_{30}\text{Zn}_{38}^{68}$ is obviously 0^+ and that the form of the main positron spectrum is that of an allowed transition we are to assign a spin of 1^+ to the disintegrating nucleus ${}_{31}\text{Ga}_{37}^{68}$ in its ground state according to $G-T$ selection rules.

The following is the one chosen out of the possible configurations which may be assigned to the nuclei ${}_{31}\text{Ga}_{37}^{68}$ and ${}_{30}\text{Zn}_{38}^{68}$ on the shell model:

	${}_{31}\text{Ga}_{37}^{68}$	${}_{30}\text{Zn}_{38}^{68}$
<i>P</i>	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^0 (p_{3/2})^3$	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^0 (p_{3/2})^2$
<i>N</i>	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^3$	$(f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^4$

The transition to the ground state of ${}_{30}\text{Zn}_{38}^{68}$ would be of the type $\Delta L = 0$ and $\Delta I = 1$ which is normal allowed according to NORDHEIM⁵⁾ and the experimental value of $\log ft$ is compatible to it. It must however be pointed out that for such a configuration for ${}_{31}\text{Ga}_{37}^{68}$, the total spin according to NORDHEIM's⁵⁾ rule should be high which as has been mentioned above does not agree with the measured form of the positron spectrum. If we assume a configuration $(p_{3/2}, f_{5/2})$ for ${}_{31}\text{Ga}_{37}^{68}$, as has been done by NORDHEIM²²⁾, the transition to the ground level of ${}_{30}\text{Zn}_{38}^{68}$ would be of the type $\Delta L = 2, \Delta I = 1$. Such a transition would have an exceptionally high ft value which again is not compatible to our experimental results. The parallel case is that of ${}_{29}\text{Cu}_{37}^{66}$ which has been discussed along with Ga⁶⁶.

Following $G-T$ selection rules a spin assignment of 1^+ or 2^+ to the excited level of ${}_{30}\text{Zn}_{38}^{68}$ is possible. However, a spin 2^+ would agree with the general characteristics of even-even nuclei²⁵⁾. The configuration of this level may be taken as that of the ground level, the spins of the last two $(p_{3/2})$ protons have combined to a spin 2^+ .

6. Supplement: The Isotope Ga⁶⁷.

a) Summary of Previous Investigations.

Effects due to the long period isotope of gallium, ${}_{31}\text{Ga}_{36}^{67}$ had to be taken into account for all the measurements during the course of our investigations on the odd-odd isotopes of gallium. As we obtained by this occasion some new results, we are presenting them here as a supplement.

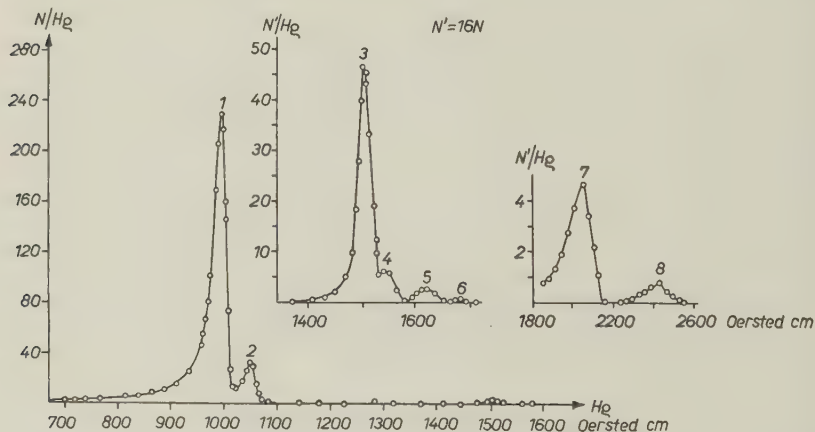
The long life activity uniquely assigned to Ga⁶⁷ has been the subject of study of a large number of workers^{13) 37) 39-42)}. According to the latest determinations by McCOWN, WOODWARD and POOL⁴³⁾ the half-life is given as $3.26 \pm 0.02 d$. The radiations emitted have been studied with great care by ALVAREZ⁴⁴⁾ whose work on this isotope established for the first time the occurrence of orbital electron captures and the consequent emission of corresponding x-rays

in course of nuclear disintegrations. The γ -transitions have been investigated further by VALLEY and McCREARY³⁶), HELMHOLZ⁴⁵), GUTHRIE⁴⁶) and CORK et al⁹).

The mode of decay seems to be much more complicated than was thought till these investigations were undertaken. A number of new γ -components have been found out by us which lead to the conclusion of new energy levels.

b) Measurement of Internal Conversion Lines.

For measuring the internal conversion lines samples were prepared by evaporating a drop of the active solution on a 0.4 mgr/cm² thick and 3 mm dia. gold-foil mounted on a thin formvar foil. The window of the G - M counter used in the lens spectrometer



- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 K line due to 92 KeV transition. | 5 K line due to 205 KeV transition. |
| 2 L line due to 92 KeV transition. | 6 L line due to 205 KeV transition. |
| 3 K line due to 182 KeV transition. | 7 K line due to 298 KeV transition. |
| 4 L line due to 182 KeV transition. | 8 K line due to 388 KeV transition. |

Fig. 14.

Internal conversion lines of Ga^{67} .

Extended source and slit system used for the measurement of the weaker lines.

was a formvar-zaponlack foil and was 0.188 mgr/cm² thick. The resolving power of the spectrometer was set at 1.4% for the measurement of the stronger lines and for the weaker components an extended source was employed which increased the luminosity at the cost of resolving power. These measurements were started after the effects due to shorter period isotopes had died down to negligible intensities. By applying a steady potential of 6 KV to the source,

search was made for the presence of low energy electron lines till zero KeV. In this region, only the groups of Auger electrons were observed. Thanks are due to Dr. H. SCHNEIDER for help with this measurement.

The energies of the internal conversion lines corresponding to five transitions which have been observed are given in Table VIII.

Table VIII.

	Energies of the Electron Lines observed in KeV	Interpretations KeV
1	82 ± 1	<i>K</i> int. conv. line of $h\nu = 92$
2	91 ± 1	<i>L</i> int. conv. line of $h\nu = 92$
3	172 ± 2	<i>K</i> int. conv. line of $h\nu = 182$
4	181 ± 2	<i>L</i> int. conv. line of $h\nu = 182$
5	195 ± 2	<i>K</i> int. conv. line of $h\nu = 205$
6	205 ± 2	<i>L</i> int. conv. line of $h\nu = 205$
7	288 ± 3	<i>K</i> int. conv. line of $h\nu = 298$
8	378 ± 5	<i>K</i> int. conv. line of $h\nu = 388$

93, 180 and 297 KeV lines have been previously reported by HELMHOLZ⁴⁵), CORK et al.⁹) reported later a further γ -transition of 174 KeV which was not observed by us.

c) Measurement of the Unconverted Parts of the γ -Transitions.

To investigate the unconverted parts of the γ -transitions measurement of the photo-electrons were undertaken with the lens spectrometer. The radiator consisted of a thin gold foil of 5 mgr/cm² thickness. The hardest of the converted electrons were completely absorbed by taking the sample inside an aluminium capsule of 3 mm wall thickness. The measured electron distribution curve is reproduced in Fig. 15. The energies of the lines observed with the corresponding interpretations are tabulated below.

To determine the relative intensities of the lines the heights of the photo-electron peaks were compared employing the coefficients given by GRAY⁴⁷). Corrections for the effects of the absorptions of the soft electrons involved, in the radiator itself were made by taking help of some previous calibration measurements performed under identical geometrical arrangements (*vide* PREISWERK and STÄHELIN⁴⁸)).

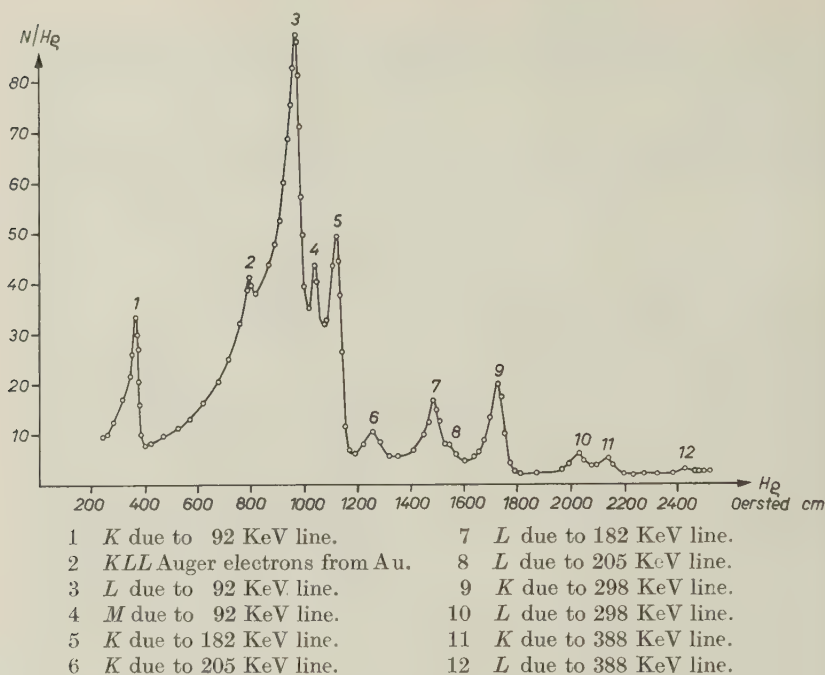


Fig. 15.

Photo-electron lines of Ga^{67} . 5 mgr./ cm^2 gold foil used as radiator.

Table IX.

Energies of the Photo-Electron	Interpretations		Relative Intensities of the Total
		KeV	
11.3	<i>K</i> photo-electrons from Au $h\nu = 92$		62
51.9	<i>KLL</i> Auger electrons from Au		
77.6	<i>L</i> photo-electrons from Au $h\nu = 92$		
88.6	<i>M</i> photo-electrons from Au $h\nu = 92$		
101.3	<i>K</i> photo-electrons from Au $h\nu = 182$		21
124.3	<i>K</i> photo-electrons from Au $h\nu = 205$		
168	<i>L</i> photo-electrons from Au $h\nu = 182$		2
191	<i>L</i> photo-electrons from Au $h\nu = 205$		
218	<i>K</i> photo-electrons from Au $h\nu = 298$		12
284	<i>L</i> photo-electrons from Au $h\nu = 298$		
307	<i>K</i> photo-electrons from Au $h\nu = 388$		3
374	<i>L</i> photo-electrons from Au $h\nu = 388$		

d) *The Internal Conversion Coefficients and the Multipole Orders of the γ -Transitions.*

The internal conversion coefficients for the different γ -components can be determined from the relative intensities of the converted and the unconverted parts when the absolute number of quantas emitted from both the samples used for these measurements are known. These values were obtained in our case by measuring the number of counts from the samples with a special gold cathode counter placed at a fixed distance, the efficiencies of the counter for the different γ -components being already known⁴⁹). Corrections were made for the absorptions of the various components in the walls of the counter.

The values of the internal conversion coefficients deduced in this manner are compared with the theoretical values for different multipole orders in Table X. The theoretical values were calculated from the tables recently published by ROSE et al.⁵⁰). For γ -energies less than 150 KeV, the values computed using the approximate formulas of HEBB and UHLENBECK⁵¹) and DANCOFF and MORRISON⁵²) were corrected by factors obtained by comparing the values from these formulas with those from ROSE et al.'s⁵⁰) tables for higher energy γ -rays.

Table X.

E in KeV	K/L exp.	Electrical 2 ¹ -pole Radiation			Magnetic 2 ¹ -pole Radiation			Exptl.
		1 = 1	1 = 2	1 = 3	1 = 1	1 = 2	1 = 3	
92	6.5	6.8×10^{-2}	7.5×10^{-1}	7.0	5.5×10^{-2}	6.6×10^{-1}	6.7	2.8×10^{-1}
182	9	8.8×10^{-3}	6.0×10^{-2}	3.9×10^{-1}	1.1×10^{-2}	7.3×10^{-2}	4.1×10^{-1}	9.1×10^{-3}
205		6.5×10^{-3}	3.6×10^{-2}	2.3×10^{-1}	8.1×10^{-3}	4.9×10^{-2}	2.6×10^{-1}	5.5×10^{-3}
298		2.1×10^{-3}	9.5×10^{-3}	3.8×10^{-2}	3.3×10^{-3}	1.5×10^{-2}	6.0×10^{-2}	2.5×10^{-3}
388		1.0×10^{-3}	3.9×10^{-3}	1.4×10^{-2}	1.8×10^{-3}	6.7×10^{-3}	2.4×10^{-2}	1.7×10^{-3}

The 182, 205, 298 and 388 KeV transitions can either be electrical or magnetic dipole radiations as the differences between the conversion coefficients for these two types of radiations in this region are not big enough to decide conclusively. Determination of K/L conversion ratio was only possible for the 92 and the 182 KeV radiations. For the former a ratio of 6.5 ± 0.5 and for the latter 9 ± 1 were found. From the empirical values given by GOLDHABER and SUNYAR²⁵), in the case of 92 KeV radiation this ratio would be 5 for an electrical quadrupole and 8 for a magnetic dipole. Considering this radiation to be a mixture of magnetic dipole and

electrical quadrupole would fit with our experimental results. In the case of 182 KeV radiation theoretical non-relativistic values of K/L conversion ratio according to HEBB and NELSON or TRALLI and LOWEN⁵¹⁾ differ widely from the experimental, both for electrical and magnetic dipoles. But these values are known to differ in other cases also. Extrapolation of the empirical curves of GOLDHABER and SUNYAR shows that the experimental value is compatible to a magnetic dipole radiation.

e) β - γ Coincidence Measurement.

In order to arrive at a disintegration scheme supplementary indications had to be obtained from coincidence measurement. β - γ coincidence absorption curve was obtained by registering the electrons with a window type (mica foil of 2.5 mgr/cm²) counter and the gammas with a 40 μ -thick gold cathode $G-M$ counter. A 0.22 mm

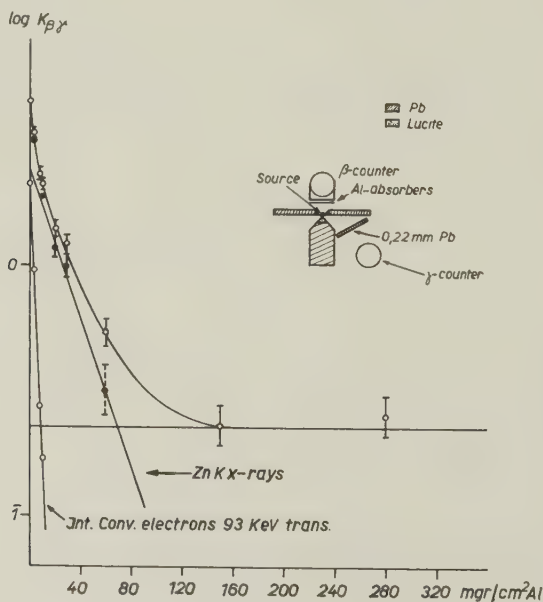


Fig. 16.

β - γ -coincidence absorption curve of Ga⁶⁷.

lead foil was placed in front of the γ -counter to absorb the x-rays and the hardest electrons. Schematic sketches of the geometrical arrangement used for this purpose is given in Fig. 16 along with the measured curve. To get the curve variable absorbers of alu-

minium were placed in front of the window type counter. The decomposition of the absorption curve shows that the K x-rays of zinc are emitted in coincidence with some γ -rays and further, that the 92 KeV transition is also emitted in cascade with a harder component or components.

f) *Ratio of X-Rays to γ -Radiations.*

Since Ga^{67} is known to have no continuous beta spectrum and decays only by orbital electron captures and γ -transitions, it was considered important to know the ratio of x-rays to γ -radiations emitted, for deciding whether there were any direct transitions from the ground state of Ga^{67} to that of Zn^{67} .

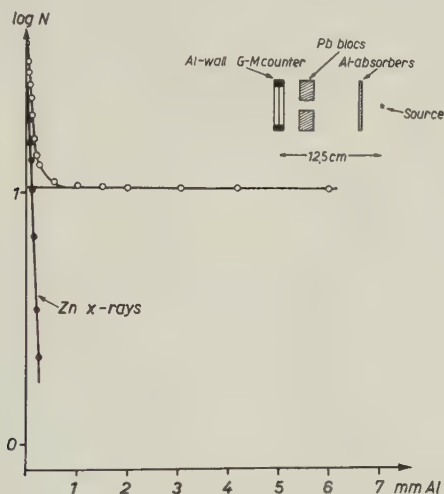


Fig. 17.

Absorption of the x-rays of Ga^{67} measured in a magnetic field.

A schematic sketch of the arrangement used is given in Fig. 17 along with the measured curve. This arrangement was placed in a magnetic field of sufficient strength to deviate all the electrons from reaching the counters. For recording the x-rays a calibrated aluminium G — M counter (*vide* SAURER⁵³) and for the gammas a gold cathode one were used.

Admitting the disintegration scheme given in Fig. 18 the total number of K x-quantas emitted may be evaluated taking into account those due to K -captures as well as internal conversions in

the K -shells. This value has got to be corrected for the fluorescence yield. The total γ -transitions are also known from the disintegration scheme and the internal conversion coefficients of the different components have been determined. Hence, the theoretical ratio between γ -quantas and x -quantas emitted can be calculated and has been found to be

$$N_{\gamma}/N_x = 2.9.$$

Experimentally this ratio has been determined and is given below

$$N_{\gamma}/N_x = 2.8 \pm 0.2.$$

The accuracy of the measurement does not permit to conclude that no direct transitions to the ground level occur. But these results show that if there are any such transitions, they cannot be in an appreciable amount and cannot certainly be of zero order in which case a ratio

$$N_{\gamma}/N_x = 1.1$$

should have been expected.

g) Discussion of the Disintegration Scheme.

From the relative intensities of the different transitions as given in Table IX, it is obvious that the conclusion reached by HELMHOLTZ⁴⁵⁾ viz. the three principal γ -transitions were in threefold cascade and the 298 KeV transition followed the 182 KeV, cannot be correct. As the energy of the 388 KeV γ -transition fits well with the energy of a cross-over transition when the 298 KeV and 92 KeV transitions and the 205 KeV and 182 KeV transitions are in cascade, we propose the scheme in Fig. 18. The relative intensities of the γ -transitions indicate that there are direct transitions by orbital electron captures to all the three excited levels of Zn⁶⁷. It is evident that most of the transitions by this process are to the 92 KeV level. Therefore, assuming these to be normal allowed ($\log ft = 5$), the total disintegration energy can be estimated thereby fixing the position of the energy level of Ga⁶⁷ in its ground state. The assumption of forbidden transition is ruled out as in that case the energy difference would allow of positron emission. The ft values for the transitions to the two other energy levels come out to be of the same order.

Possible spin assignments to the energy levels have been made taking into account the internal conversion coefficients of the γ -transitions and the K -capture probabilities. The fact that the intensity of the 298 KeV transition is much greater than that of the 388 KeV, although they seem to be of the same multipole order, is not considered as a big obstacle.

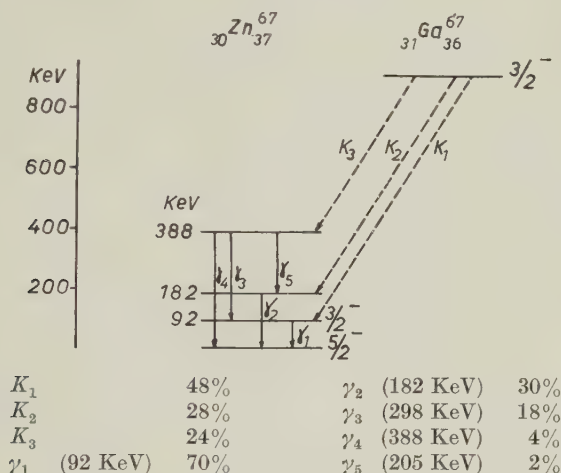


Fig. 18.

--- Proposed disintegration scheme of Ga^{67} .

We now discuss the disintegration scheme following the shell model. The spin of $_{30}\text{Zn}_{37}^{67}$ in its ground state is known to be $5/2$. We have pointed out before that this nucleus is one of the two exceptions in the region of N or $Z = 29$ to 37 inclusive, which have spins $5/2$ and all the other nuclei have spins $3/2$. This indicates that the pairing energy is not enough to make the $3/2$ level lower. Therefore, we expect the following configuration

$$\begin{aligned}
 &_{30}\text{Zn}_{37}^{67} \\
 P & (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^2 (p_{3/2})^0 \\
 N & (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^5 (p_{3/2})^4
 \end{aligned}$$

For $_{31}\text{Ga}_{36}^{67}$ in its ground state we assume a spin of $3/2$ as the stable gallium nuclei are known to have this spin. Therefore, we can ascribe a configuration

$$\begin{aligned}
 &_{31}\text{Ga}_{36}^{67} \\
 P & (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^2 (p_{3/2})^1 \\
 N & (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^2
 \end{aligned}$$

From these configurations it is obvious that no allowed transition can take place to the ground level of Zn^{67} from Ga^{67} .

A spin of $3/2$ may be assigned to the lowest excited level at 92 KeV as the transitions by K -captures to this level are of zero order and the corresponding γ -transition from this level is a mixture of magnetic dipole and electrical quadrupole radiations. A level of this type following single particle model is expected to have a configuration

$$\begin{array}{l} P \quad (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^2 (p_{3/2})^0 \\ N \quad (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^3 \end{array}$$

An allowed transition from the ground level of Ga^{67} can take place to a level having the configuration

$$\begin{array}{l} P \quad (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^2 (p_{3/2})^0 \\ N \quad (f_{7/2})^8 (f_{5/2})^6 (p_{3/2})^2 (p_{1/2})^1 \end{array}$$

But then no direct transition from such a level with spin $1/2$ to the level with spin $5/2$ should occur as such a transition involves interchanges of orbits of two particles.

Our experimental findings show that three transitions of zero order occur to the low lying excited states of Zn^{67} . It follows that two of these states at least have same values of spins. This is a very interesting case as this fact is not compatible to the single particle picture of shell model. One cannot avoid taking into consideration other excitations than that of a single particle. A three-particle state of neutrons is however ruled out in the case of Zn^{67} . In extending the single particle model a plausible assumption seems to be that in the other excited states the two protons in the outermost unfilled orbit ($f_{5/2}$) take part.

Our sincerest thanks are due to Prof. Dr. P. SCHERRER for the continued interest that he has taken in this work. One of us (A. M.) is also deeply indebted to him for being given the opportunity of working in this laboratory.

Bibliography.

- ¹⁾ M. G. MAYER, Phys. Rev. **75**, 1969 (1949); Phys. Rev. **78**, 16 (1950).
- ²⁾ E. FEENBERG and K. C. HAMMACK, Phys. Rev. **75**, 1877 (1949).
- ³⁾ L. W. NORDHEIM, Phys. Rev. **75**, 1894 (1949).
- ⁴⁾ O. HAXEL, J. H. D. JENSEN and H. E. SUESS, Naturwissensch. **35**, 376 (1948); Naturwissensch. **36**, 155 (1949).
- ⁵⁾ L. W. NORDHEIM, Phys. Rev. **78**, 294 (1950).
- ⁶⁾ J. H. BUCK, Phys. Rev. **54**, 1025 (1938).
- ⁷⁾ W. J. HENDERSON and L. N. RIDENOUR, Phys. Rev. **52**, 40 (1937).
- ⁸⁾ W. B. MANN, Phys. Rev. **52**, 405 (1937).
- ⁹⁾ J. M. CORK, L. N. HADLEY jr. and C. V. KENT, Phys. Rev. **61**, 389 (1942).
- ¹⁰⁾ L. N. RIDENOUR and W. J. HENDERSON, Phys. Rev. **52**, 889 (1937).
- ¹¹⁾ D. R. CORSON, K. R. MCKENZIE and E. SEGRÈ, Phys. Rev. **58**, 672 (1940).
- ¹²⁾ L. D. P. KING and W. J. HENDERSON, Phys. Rev. **56**, 1169 (1939); Phys. Rev. **57**, 71 (1940).
- ¹³⁾ H. H. HOPKINS jr. and B. B. CUNNINGHAM, Phys. Rev. **73**, 1406 (1948).
- ¹⁴⁾ G. T. SEABORG and M. L. PERLMAN, Rev. of Mod. Phys. **20**, 585 (1948).
- ¹⁵⁾ E. BLEULER and W. ZÜNTI, Helv. Phys. Acta **19**, 375 (1946).
- ¹⁶⁾ A. MUKERJI and P. PREISWERK, Helv. Phys. Acta **23**, 516 (1950).
- ¹⁷⁾ R. D. MOFFAT and L. M. LANGER, Bull. A.P.S. **25**, 46 (1950).
- ¹⁸⁾ R. D. MOFFAT and L. M. LANGER, Phys. Rev. **80**, 651 (1950).
- ¹⁹⁾ P. MARMIER, J. P. BLASER, F. BOEHM and D. C. PEASLEE, Helv. Phys. Acta **24**, 2 (1951).
- ²⁰⁾ R. HOFSTADTER and J. A. MCINTYRE, Phys. Rev. **80**, 636 (1950).
- ²¹⁾ O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK and R. STEFFEN, Helv. Phys. Acta **20**, 495 (1947).
- ²²⁾ H. RODERICK, W. E. MEYERHOF and L. G. MANN, Private Communication.
- ²³⁾ D. MAEDER and P. PREISWERK, Reported in the Autumn Meeting of Swiss Physical Society, 1951.
- ²⁴⁾ L. W. NORDHEIM, Tables for β -decay Systematics, Privately circulated.
- ²⁵⁾ M. GOLDBABER and A. W. SUNYAR, Phys. Rev. **83**, 906 (1951).
- ²⁶⁾ W. BOTHE and W. GENTNER, Naturwissensch. **25**, 191 (1937).
- ²⁷⁾ W. BOTHE and W. GENTNER, Zeitschr. f. Physik **106**, 236 (1937).
- ²⁸⁾ W. BOTHE and W. GENTNER, Zeitschr. f. Physik **112**, 46 (1939).
- ²⁹⁾ W. V. CHANG, M. GOLDBABER and R. SAGANE, Nature **139**, 962 (1937).
- ³⁰⁾ M. L. PERLMAN and G. FRIEDLANDER, Phys. Rev. **74**, 442 (1948).
- ³¹⁾ R. SAGANE, Phys. Rev. **53**, 212 (1938).
- ³²⁾ R. SAGANE, Phys. Rev. **55**, 31 (1939).
- ³³⁾ R. SAGANE, S. KOJIMA and G. MIYAMOTO, Proc. Physico-math. Soc. Japan (3) **21**, 728 (1939).
- ³⁴⁾ M. L. POOL, J. M. CORK and R. L. THORNTON, Phys. Rev. **52**, 239 (1937).
- ³⁵⁾ D. C. GRAHAME and G. T. SEABORG, Phys. Rev. **54**, 240 (1938).
- ³⁶⁾ G. E. VALLEY and R. L. MCCREARY, Phys. Rev. **56**, 863 (1939).
- ³⁷⁾ L. A. DUBRIDGE, S. W. BARNES, J. H. BUCK and C. V. STRAIN, Phys. Rev. **53**, 447 (1938).
- ³⁸⁾ V. F. WEISSKOPF and D. H. EVING, Phys. **57**, 472 (1940).
- ³⁹⁾ J. J. LIVINGOOD, Phys. Rev. **50**, 425 (1936).
- ⁴⁰⁾ R. L. THORNTON, Phys. Rev. **53**, 326 (1938).
- ⁴¹⁾ W. B. MANN, Phys. Rev. **53**, 212 (1938).
- ⁴²⁾ W. B. MANN, Phys. Rev. **54**, 649 (1938).
- ⁴³⁾ D. A. MCCOWN, L. L. WOODWARD and M. L. POOL, Phys. Rev. **74**, 1311 (1948).

- ⁴⁴⁾ L. A. ALVAREZ, Phys. Rev. **54**, 486 (1938).
 - ⁴⁵⁾ A. C. HELMHOLZ, Phys. Rev. **60**, 415 (1941).
 - ⁴⁶⁾ A. GUTHRIE, Phys. Rev. **60**, 746 (1941).
 - ⁴⁷⁾ L. GRAY, Proc. Camb. Phil. Soc. **27**, 103 (1931).
 - ⁴⁸⁾ P. PREISWERK and P. STÄHELIN, To be published in H.P.A.
 - ⁴⁹⁾ H. BRADT, P. C. GUGELOT, O. HUBER, H. MEDICUS, P. PREISWERK and P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **19**, 77 (1946).
 - ⁵⁰⁾ M. E. ROSE, G. H. GOERTZEL, B. I. SPINRAD, J. HARR and P. STRONG, Phys. Rev. **83**, 79 (1951).
 - ⁵¹⁾ M. H. HEBB and G. E. UHLENBECK, Physica **5**, 605 (1938); see also M. H. HEBB and E. NELSON, Phys. Rev. **58**, 486 (1940); N. TRALLI and I. S. LOWEN, Phys. Rev. **76**, 1541 (1949).
 - ⁵²⁾ S. M. DANCOFF and P. MORRISON, Phys. Rev. **55**, 122 (1939).
 - ⁵³⁾ H. SAURER, Helv. Phys. Acta **23**, 381 (1950).
-

On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics

by Gunnar Källén.*)

Swiss Federal Institute of Technology, Zürich.

(14. II. 1952.)

Summary. A formulation of quantum electrodynamics in terms of the renormalized Heisenberg operators and the experimental mass and charge of the electron is given. The renormalization constants are implicitly defined and expressed as integrals over finite functions in momentum space. No discussion of the convergence of these integrals or of the existence of rigorous solutions is given.

Introduction.

The renormalization method in quantum electrodynamics has been investigated by many authors, and it has been proved by DYSON¹⁾ that every term in a formal expansion in powers of the coupling constant of various expressions is a finite quantity. No serious attempt at a discussion of the convergence of the series has been published, and the definition of the renormalization constants is always given as a formal series where every coefficient is infinite. It is the aim of the present paper to give a formulation of quantum electrodynamics where only the renormalized operators (in the Heisenberg representation) will appear and where the renormalization constants are defined in terms of these operators and the experimental mass and charge of the electron. There thus exists a possibility of studying the renormalized quantities directly without the aid of a power series expansion and especially to decide if they are really finite and not only a divergent sum of finite terms. No discussion of this point, however, will be given in this paper, only the formulation of the theory.

*) On leave of absence from Department of Mechanics and Mathematical Physics, University of Lund, Sweden.

¹⁾ F. J. DYSON, Phys. Rev. **83**, 608; 1207 (1951) and earlier papers.

The starting point of our analysis is the following formal Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{N^2}{4} \left[\bar{\psi}(x), \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + m \right) \psi(x) \right] - \frac{N^2}{4} \left[-\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_\nu} \gamma_\nu + m \bar{\psi}(x), \psi(x) \right] + \\ & + \frac{K}{2} \cdot N^2 [\bar{\psi}(x), \psi(x)] - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} - \\ & - \frac{1-L}{4} \left(\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \right) + \\ & + \frac{ie}{4} \cdot N^2 \{ A_\mu(x), [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] \}. \end{aligned} \quad (1)$$

In this expression $A_\mu(x)$ is the renormalized vector-potential of the electromagnetic field, $\psi(x)$ the renormalized Dirac-operator of the electron-positron field, m and e the experimental mass and charge of the electron, and K , L and N three universal constants, the definition of which will be given later. The three quantities K , N^{-1} and $(1-L)^{-1}$ might be infinite but in spite of that, we will adopt the convention that the usual algebraic operations can be performed with them. K and L describe respectively the mass- and the charge-renormalization, and N is a normalization constant for the ψ -field. The other notations are nowadays standard symbols in quantum field theory.

From the above Lagrangian we obtain without difficulty the following equations of motion for the field operators in the Heisenberg representation

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + m \right) \psi(x) = \frac{ie}{2} \{ A_\nu(x), \gamma_\nu \psi(x) \} + K \psi(x) \equiv f(x) \quad (2)$$

$$\square A_\mu(x) = \frac{-ie}{2} N^2 [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] + L \left(\square A_\mu(x) - \frac{\partial^2 A_\nu(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) \equiv -j_\mu(x). \quad (3)$$

In Eq. (2) and (3) $f(x)$ and $j_\mu(x)$ are only to be considered as abbreviations for the right-hand sides.

From our Lagrangian we can also obtain the commutators for the electromagnetic operators and their time-derivatives in two points, the distance of which is space-like, and the corresponding anticommutators for the electron field. As the terms with K and L contain the time-derivatives of $A_\mu(x)$ but not of $\psi(x)$, the canonical commutators involving the electromagnetic potentials will be rather complicated and really meaningless if $L = 1$, but the anticommutators of the matter-field will have the simple form

$$\{ \bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x') \} = (\gamma_4)_{\beta\alpha} \cdot N^{-2} \cdot \delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad \text{for } x_0 = x'_0 \quad (4)$$

$$\delta(\bar{x}) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (4a)$$

For the electromagnetic potentials we get for $(x - x')^2 > 0$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = 0 \quad (5)$$

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial t}, A_\nu(x') \right] = -i \delta(\bar{x} - \bar{x}') \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{1-L} - \frac{L}{1-L} \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} \right] \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial t}, \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial t'} \right] = \frac{L}{1-L} \left(\delta_{\mu 4} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \delta_{\nu 4} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \delta(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (7)$$

Besides, every component A_μ will commute with every component of ψ on a space-like surface.

General Properties of the Operators.

The two equations of motion are formally integrated with the help of the retarded singular functions and the operators for the free fields

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) \cdot N^{-1} - \int S_R(x-x') f(x') dx' \quad (8)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int D_R(x-x') j_\mu(x') dx' \quad (9)$$

$$S_R(x-x') = \bar{S}(x-x') - \frac{1}{2} S(x-x') \quad (10)$$

$$D_R(x-x') = \bar{D}(x-x') - \frac{1}{2} D(x-x'). \quad (11)$$

The integral equations (8) and (9) have the same solutions as the differential equations (2) and (3) but contain also the boundary conditions for $t = -\infty$. The operators $\psi^{(0)}(x)$ fulfill the following formulae

$$\{\bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x), \psi_\beta^{(0)}(x')\} = -i S_{\beta\alpha}(x' - x) \quad (12)$$

$$\langle 0 | [\bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x), \psi_\beta^{(0)}(x')] | 0 \rangle = S_{\beta\alpha}^{(1)}(x' - x). \quad (13)$$

The properties of the operators $A_\mu^{(0)}(x)$ are a little more delicate. In practical calculations, we want to use the formulae

$$[A_\mu^{(0)}(x), A_\nu^{(0)}(x')] = -i \delta_{\mu\nu} D(x' - x) \quad (14)$$

$$\langle 0 | \{A_\mu^{(0)}(x), A_\nu^{(0)}(x')\} | 0 \rangle = \delta_{\mu\nu} D^{(1)}(x' - x) \quad (15)$$

but it is well-known that these formulae are inconsistent with the Lorentz-condition

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} | \psi \rangle = \frac{\partial A_\mu^{(0)}(x)}{\partial x_\mu} | \psi \rangle = 0. \quad (16)$$

On the other hand, it can be shown that this inconsistency is of no importance if only gauge-invariant expressions are calculated²⁾. However, in what follows we will not only be interested in gauge-invariant quantities and are thus forced to discuss Eq. (14) and (15) in more detail. For our purpose, the most convenient way to do this will be to adopt the indefinite metric of GUPTA³⁾ and BLEULER⁴⁾. In this formalism the Lorentz-condition (16) is replaced by the weaker condition

$$\frac{\partial A_{\mu}^{(0)(+)}(x)}{\partial x_{\mu}} | \psi \rangle = 0 \quad (17)$$

and as a consequence of this, equation (14) can be fulfilled. ($F^{(+)}(x)$ means the positive-frequency part of the operator $F(x)$.) Further, if the vacuum is suitably defined (no scalar, transversal or longitudinal photons present) Eq. (15) follows from the formalism, but it must be understood that this is a non-gauge-invariant convention. The special gauge chosen corresponds to

$$\langle 0 | A_{\mu}(x) | 0 \rangle = \langle 0 | A_{\mu}^{(0)}(x) | 0 \rangle = 0. \quad (18)$$

In what follows we will, when necessary, use this gauge.

From our Lagrangian we can construct an energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ and from this one a displacement operator P_{μ} fulfilling

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (19)$$

$$[P_{\mu}, F(x)] = i \frac{\partial F(x)}{\partial x_{\mu}}. \quad (20)$$

In Eq. (20) $F(x)$ is an arbitrary operator depending on the point x . Eq. (19) thus expresses the fact that the P_{μ} 's are constants of motion. As all the operators P_{μ} commute with each other, we can use a representation in the Hilbert space where every state vector is an eigenvector of all the P_{μ} 's with the eigenvalues p_{μ} . In this representation Eq. (20) reads

$$\begin{aligned} \langle a | [P_{\mu}, F(x)] | b \rangle &= (p_{\mu}^{(a)} - p_{\mu}^{(b)}) \langle a | F(x) | b \rangle = \\ &= i \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \langle a | F(x) | b \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Hence

$$\langle a | F(x) | b \rangle = \langle a | F | b \rangle e^{i(p^{(b)} - p^{(a)})x}. \quad (22)$$

²⁾ Cf. e. g. S. T. MA, Phys. Rev. **80**, 729 (1950) and other papers quoted by him.

³⁾ S. N. GUPTA, Proc. Phys. Soc. London **63**, 681 (1950).

⁴⁾ K. BLEULER, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).

Here $p_\mu^{(a)}$ and $p_\mu^{(b)}$ are the eigenvalues of P_μ in the states $|a\rangle$ and $|b\rangle$. In this representation, the x -dependence of an arbitrary operator is thus given by Eq. (22). The detailed form of the operators P_μ is of very little interest for the present investigation, and we will not write them down explicitly but make the following assumptions concerning the eigenvalues p_μ :

a) Every vector p_μ is time-like.

b) There exists a state with a smallest eigenvalue of the time-component p_0 . This state by definition will be called the vacuum and, with a suitable renormalization of the energy, this eigenvalue of p_0 can be put equal to zero.

It is supposed that the above definition of the vacuum is not in contradiction with Eq. (18).

Definition of the Constant L .

We are now able to turn to the main problem of this paper, *i. e.* the definition of the universal constants K , L and N in the Lagrangian (1). We begin with the definition of L that describes the charge-renormalization. This is conveniently stated in terms of the matrix elements of the operators $A_\mu(x)$ between the vacuum state and a state where only one photon is present. (As we are working in the Heisenberg representation some care is necessary when we are speaking of a state with a given number of particles present. If, however, it is understood that we hereby always specify the system for $t = -\infty$, no ambiguities will arise. The occupation-number operators are then constructed from the special operators $A_\mu^{(0)}$ and $\psi^{(0)}$ introduced in Eq. (8) and (9).) At the first moment it would seem natural to introduce the following condition for the matrix elements

$$\langle 0 | A_\mu(x) | k \rangle = \langle 0 | A_\mu^{(0)}(x) | k \rangle \quad (23)$$

where $|k\rangle$ describes a state with only one photon with energy-momentum vector k , but as the calculation below shows, this can only be fulfilled for the transversal photons. If also the longitudinal and scalar photons are considered, the correct condition for $\langle 0 | A_\mu(x) | k \rangle$ is

$$\langle 0 | A_\mu(x) | k \rangle = \left(\delta_{\mu\nu} + M \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) \langle 0 | A_\nu^{(0)}(x) | k \rangle \quad (24)$$

where M is another universal constant (*i. e.* independent of x and k). Eq. (24), together with the commutators (5), (6) and (7) and

the equation of motion (9), determines the two constants L and M uniquely in terms of the matrix elements of the current operator in Eq. (3). As this contains the constant L explicitly and the other constants implicitly, the definitions of L and M are only implicit.

We now compute the vacuum expectation value of the commutator between the electromagnetic potentials and obtain

$$\begin{aligned} \langle 0 | [A_\mu(x), A_\nu(x')] | 0 \rangle &= \langle 0 | [A_\mu^{(0)}(x), A_\nu^{(0)}(x')] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | [A_\mu(x) - A_\mu^{(0)}(x), A_\nu^{(0)}(x')] | 0 \rangle + \langle 0 | [A_\mu^{(0)}(x), A_\nu(x') - A_\nu^{(0)}(x')] | 0 \rangle + \\ &+ \int \int dx'' dx''' D_R(x - x'') D_R(x' - x''') \langle 0 | [j_\mu(x''), j_\nu(x''')] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

It is here convenient to introduce a special notation for the vacuum expectation value of the current commutator. Considering the definition of a matrix product and Eq. (22), we obtain

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(x')] | 0 \rangle &= \sum_z \langle 0 | j_\mu | z \rangle \langle z | j_\nu | 0 \rangle e^{-i p^{(z)}(x' - x)} - \\ &- \sum_z \langle 0 | j_\nu | z \rangle \langle z | j_\mu | 0 \rangle e^{i p^{(z)}(x' - x)} \rightarrow \frac{-1}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{p_0 > 0} d^3 p e^{i p(x' - x)} \pi_{\mu\nu}^{(+)}(p) - \right. \\ &\left. - \int_{p_0 < 0} d^3 p e^{i p(x' - x)} \pi_{\mu\nu}^{(-)}(p) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\pi_{\mu\nu}^{(+)}(p) \rightarrow V \sum_{p^{(z)}=p} \langle 0 | j_\nu | z \rangle \langle z | j_\mu | 0 \rangle \quad (26a)$$

$$\pi_{\mu\nu}^{(-)}(p) \rightarrow V \sum_{p^{(z)}=-p} \langle 0 | j_\mu | z \rangle \langle z | j_\nu | 0 \rangle. \quad (26b)$$

In Eq. (26a) and (26b) V is a large volume in which the fields are supposed to be enclosed, and summation over states and integration in p -space are freely interchanged. Due to the equation

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad (27)$$

(which is easily verified from Eq. (3)) we must have

$$p_\mu \pi_{\mu\nu}^{(+)} = \pi_{\mu\nu}^{(+)} p_\nu = p_\mu \pi_{\mu\nu}^{(-)} = \pi_{\mu\nu}^{(-)} p_\nu = 0. \quad (28)$$

From reasons of invariance, on the other hand, $\pi_{\mu\nu}^{(\pm)}$ must have the form

$$\pi_{\mu\nu}^{(\pm)}(p) = \delta_{\mu\nu} A^{(\pm)}(p^2) + p_\mu p_\nu B^{(\pm)}(p^2). \quad (29)$$

Combining (28) and (29) we get

$$\pi_{\mu\nu}^{(\pm)}(p) = (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \pi^{(\pm)}(p^2) \quad (30)$$

with

$$\pi^{(+)}(p^2) = \frac{V}{-3p^2} \sum_{p^{(z)}=p} \langle 0 | j_\nu | z \rangle \langle z | j_\nu | 0 \rangle = \pi^{(-)}(p^2). \quad (31)$$

We thus have

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(x')] | 0 \rangle = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d p e^{i p(x'-x)} \varepsilon(p) (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \pi(p^2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\pi(p^2) \rightarrow \frac{V}{-3p^2} \sum_{p^{(z)}=p} \langle 0 | j_\nu | z \rangle \langle z | j_\nu | 0 \rangle. \quad (32a)$$

Here it can be observed that if we compute the vacuum expectation value of the anticommutator instead of the commutator we get

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d p e^{i p(x'-x)} (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \pi(p^2) \end{aligned} \quad (33)$$

with the same function $\pi(p^2)$ in (33) as in (32). This follows immediately from the analysis above. Noting that $\pi(p^2) = 0$ unless $p^2 < 0$ (this follows from Eq. (32a) and (24)) we can further write

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(x')] | 0 \rangle = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d p e^{i p(x'-x)} \varepsilon(p) \int_0^\infty d a \delta(p^2 + a) (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \pi(-a) = \\ &= -i \int_0^\infty d a \left(\square \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) \Delta(x' - x, a) \pi(-a). \end{aligned} \quad (34)$$

Here $\Delta(x' - x, a)$ is the usual singular function constructed with the "mass" \sqrt{a} . Thus we also have

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \varepsilon(x' - x) \langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(x')] | 0 \rangle = \\ &= \int_0^\infty d a \left(\square \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) \bar{\Delta}(x' - x, a) \pi(-a) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d p e^{i p(x'-x)} (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \bar{\pi}(p^2) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\bar{\pi}(p^2) = P \int_0^\infty \frac{\pi(-a)}{p^2 + a} d a. \quad (35a^*)$$

*) The letter P in Eq. (35a) indicates that the principal value of the integral has to be taken in the point $a = -p^2$.

Returning to Eq. (25) we get with the aid of (24) and (32)

$$\begin{aligned} \langle 0 | [A_\mu(x), A_\nu(x')] | 0 \rangle = \\ = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ip(x'-x)} \varepsilon(p) \int_0^\infty da \delta(p^2+a) F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = \delta(a) (\delta_{\mu\nu} - 2M p_\mu p_\nu) + \frac{\pi(-a)}{a} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{a} \right) = \\ = \delta_{\mu\nu} \left(\delta(a) + \frac{\pi(-a)}{a} \right) + p_\mu p_\nu \left(\frac{\pi(-a)}{a^2} - 2M \delta(a) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Putting $x_0' = x_0$ in (36) it follows from (5) that we must have

$$M = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\pi(-a)}{a^2} da. \quad (38)$$

The integral in (38) may diverge both for $a \rightarrow 0$ and for $a = \infty$. The first divergency is of a kind usually classified as "infrared". It can always be avoided if we introduce a small photon mass μ . The function π will then vanish for $a < 9\mu^2$, and the denominator is zero only for $a = \mu^2$. We will not investigate this point further. The convergence of the integral at infinity will be discussed later in this paragraph.

Performing a differentiation with respect to the time t in (36) and putting the two times equal afterwards, we obtain

$$\begin{aligned} \left\langle 0 \left| \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial t}, A_\nu(x') \right] \right| 0 \right\rangle_{x_0=x_0'} = -i \delta_{\mu\nu} \delta(\bar{x} - \bar{x}') (1 + \bar{\pi}(0)) - \\ - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ip(\bar{x}' - \bar{x})} \int_0^\infty da p_0 p_\mu p_\nu \varepsilon(p) \delta(p^2+a) \left[\frac{\pi(-a)}{a^2} - 2M \delta(a) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

If μ and ν are both equal to 1, 2 or 3, the last integral in (39) is zero due to Eq. (38). If they are both equal to 4, we get

$$\begin{aligned} \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ip(\bar{x}' - \bar{x})} \int_0^\infty da (-\bar{p}^2 - a) \left(\frac{\pi(-a)}{a^2} - 2M \delta(a) \right) = \\ = i \delta(\bar{x}' - \bar{x}) \bar{\pi}(0). \end{aligned}$$

If only one of the indices μ and ν is equal to 4, the integral will vanish due to reasons of symmetry. We thus have

$$\begin{aligned} \left\langle 0 \left| \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial t}, A_\nu(x') \right] \right| 0 \right\rangle_{x_0=x_0'} = \\ = -i \delta(\bar{x}' - \bar{x}) [\delta_{\mu\nu} (1 + \bar{\pi}(0)) - \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} \bar{\pi}(0)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Equations (40) and (6) are identical if

$$1 + \bar{\pi}(0) = \frac{1}{1-L} \quad (41)$$

which is our formula for L^5). It now only remains to verify that Eq. (7) is consistent with the formulae (38) and (41). With the same method as used above we find from Eq. (36)

$$\langle 0 | \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial t}, \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial t'} \right] | 0 \rangle = \bar{\pi}(0) \left[\delta_{\mu 4} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \delta_{\nu 4} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right] \delta(\bar{x}' - \bar{x}) \quad (42)$$

which is in fact identical with (7) due to (41).

If we consider the definition of the function $\pi(p^2)$ in Eq. (32a), we observe that it is defined as a sum over only a finite number of terms or rather as an integral over a finite domain in p -space. (The two surfaces $p^2 = 0$ and $p^2 = -m^2$, where in fact an infinite number of states exist, are of no importance, as the first kind of matrix elements will vanish in view of Eq. (24) and the second kind will vanish as a consequence of the charge-invariance.) If a solution to our equations exists at all, $\pi(p^2)$ is thus a finite quantity for all values of p^2 . The question if L , M and $\bar{\pi}(p^2)$ are finite or not is thus answered, if we know the behaviour of $\pi(p^2)$ for large values of $-p^2$. The assumption of the renormalization method is that although $\bar{\pi}(0)$ might be infinite (and hence $L = 1$) the difference $\bar{\pi}(p^2) - \bar{\pi}(0)$ (and thus also M) is finite. This means that $\pi(p^2)$ is *not* allowed to increase as strongly as $-p^2$ for large values of $-p^2$.

Concerning the general behaviour of the function $\pi(p^2)$, we will here only mention that it must be positive. This follows *e. g.* from the formula

$$V \sum_{p^{(z)}=p} \langle 0 | j_\nu | z \rangle \langle z | j_\mu | 0 \rangle = (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \pi(p^2) \quad (43)$$

if we here put $\mu = \nu = 1$. As the x -component of the current operator is self-adjoint (not Hermitian, in view of the indefinite metric!) we have

$$\langle z | j_x | 0 \rangle = (\langle 0 | j_x | z \rangle)^* (-1)^{N_4^{(z)}}. \quad (44)$$

In Eq. (44) $N_4^{(z)}$ means the number of scalar photons in the state $|z\rangle$. To obtain (44) we have made use of the explicit form of the

⁵⁾ A similar formula for the charge-renormalization but in terms of the unrenormalized current operator has been given by UMEZAWA and KAMEFUCHI, Prog. Theor. Phys. **6**, 543 (1951).

metric operator as given by GUPTA³⁾ and BLEULER⁴⁾. Eq. (43) and (44) now give

$$\pi(p^2) = \frac{V}{p_x^2 - p^2} \sum_{p^{(z)}=p} |\langle 0 | j_x | z \rangle|^2 (-1)^{N_4^{(z)}}. \quad (45)$$

The negative contribution to the sum in (45) from a state with a scalar photon will exactly cancel with the contribution from a similar state with a longitudinal photon, if we observe that the current is a gauge-invariant operator, and hence that we can write

$$\langle 0 | j_\mu | z, k \rangle = F_{\mu\lambda} \langle 0 | A_\lambda^{(0)} | k \rangle \quad (46)$$

with

$$F_{\mu\lambda} k_\lambda = 0. \quad (47)$$

In (46) $|z, k\rangle$ means a state with one photon with energy-momentum k and other particles present, some of which may also be photons. The quantity $F_{\mu\lambda}$ then depends on the vector k (but not on the polarization vector of the photon) and on the annihilation operators of the other particles. The only surviving terms in (45) will then be the contributions from the transversal photons and these terms are all positive. It thus follows

$$\pi(p^2) \geq 0 \quad (48)$$

$$\bar{\pi}(0) = \int_0^\infty \frac{\pi(-x)}{x} dx > 0 \quad (49)$$

$$0 < \frac{\bar{\pi}(0)}{1 + \bar{\pi}(0)} = L \leq 1. \quad (50)$$

This property of the charge-renormalization has earlier been proved by SCHWINGER (unpublished) in a somewhat different way. I am indebted to professor PAULI for information concerning SCHWINGER's proof.

Definition of the Constant K .

The definition of K (the mass-renormalization) can be carried out in a way similar to that of the definition of L . Here we state the renormalization in terms of the matrix elements of the operators ψ between the vacuum state and a state $|q\rangle$ with only one electron present

$$\langle 0 | \psi(x) | q \rangle = \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle \quad (51)$$

or

$$\langle 0 | f(x) | q \rangle = 0. \quad (52)$$

To investigate the last condition we compute the vacuum expectation value of the anticommutator between $f(x)$ and $\bar{\psi}^{(0)}(x')$.

$$\begin{aligned} \langle 0 | \{ \bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x'), f_\beta(x) \} | 0 \rangle &= \sum_q (\langle 0 | \bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x') | q \rangle \langle q | f_\beta(x) | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | f_\beta(x) | q \rangle \langle q | \bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x') | 0 \rangle). \end{aligned} \quad (53)$$

With the aid of the formula

$$N^{-1} \cdot \bar{\psi}^{(0)}(x') = \int_{-\infty}^{x_0''=x_0} f(x'') S(x''-x') dx'' - i \int_{x_0''=x_0}^x \bar{\psi}(x'') \gamma_4 S(x''-x') d^3 x'' \quad (54)$$

(Eq. (54) follows from the equation of motion (8) — or rather its adjoint — and some well-known properties of the S -function) we can write

$$\begin{aligned} N^{-1} \cdot \langle 0 | \{ \bar{\psi}^{(0)}(x'), f(x) \} | 0 \rangle &= \int_{-\infty}^x \langle 0 | \{ f(x''), f(x) \} | 0 \rangle S(x''-x') dx'' - \\ &- i \int_{x_0''=x_0}^x \langle 0 | \{ \bar{\psi}(x''), f(x) \} | 0 \rangle \gamma_4 S(x''-x') d^3 x''. \end{aligned} \quad (55)$$

The three-dimensional integral in (55) contains the anticommutator of operators for equal times and can thus be calculated with the aid of (4). In view of the definition of $f(x)$ in Eq.(2) we get

$$\{ \bar{\psi}(x''), f(x) \}_{x_0=x_0''} = (i e \gamma A(x) + K) \gamma_4 \delta(\bar{x} - \bar{x}'') \cdot N^{-2} \quad (56)$$

$$\langle 0 | \{ \bar{\psi}(x''), f(x) \} | 0 \rangle_{x_0=x_0''} = K' \gamma_4 \delta(\bar{x} - \bar{x}'') \quad (57)$$

(in view of Eq. (18))

$$\begin{aligned} N^{-1} \langle 0 | \{ \bar{\psi}^{(0)}(x'), f(x) \} | 0 \rangle &= \int_{-\infty}^x \langle 0 | \{ f(x''), f(x) \} | 0 \rangle S(x''-x') dx'' - \\ &- i K' S(x-x'); \quad (K' = K \cdot N^{-2}). \end{aligned} \quad (58)$$

Here again it is convenient to introduce a special notation for the anticommutator in (58). In analogy with (26) we write

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \{ \bar{f}_\alpha(x''), f_\beta(x) \} | 0 \rangle = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \left(\int_{p_0>0} dp e^{i p(x-x'')} \{ \sum_1^{(-)}(p^2) + (i \gamma p + m) \sum_2^{(+)}(p^2) \}_{\beta\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{p_0<0} dp e^{i p(x-x'')} \{ \sum_1^{(-)}(p^2) + (i \gamma p + m) \sum_2^{(-)}(p^2) \}_{\beta\alpha} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

$$(\sum_1^{(+)}(p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2^{(+)}(p^2))_{\beta\alpha} = -V \sum_{p^{(z)}=p} \langle 0 | f_\beta | z \rangle \langle z | \bar{f}_\alpha | 0 \rangle \quad (59a)$$

$$(\sum_1^{(-)}(p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2^{(-)}(p^2))_{\beta\alpha} = -V \sum_{p^{(z)}=-p} \langle 0 | \bar{f}_\alpha | z \rangle \langle z | f_\beta | 0 \rangle. \quad (59b)$$

In view of the charge-invariance of the theory, we must have

$$\begin{aligned} & -V \sum_{p^{(z)}=-p} \langle 0 | (C^{-1}f)_\alpha | z \rangle \langle z | (C\bar{f})_\beta | 0 \rangle = \\ & = \sum_1^{(-)}(p^2) \delta_{\beta\alpha} + (i\gamma p + m)_{\beta\alpha} \sum_2^{(-)}(p^2) \end{aligned} \quad (60)$$

where C is the charge-conjugation matrix of SCHWINGER⁶), which has the following properties

$$C^T = -C \quad (61)$$

$$-C^{-1} \gamma_\mu C = \gamma_\mu^T. \quad (62)$$

If we compare (60) and (59a) we get, considering (61) and (62)

$$\sum_1^{(-)}(p^2) = -\sum_1^{(+)}(p^2) \quad (63)$$

$$\sum_2^{(-)}(p^2) = -\sum_2^{(+)}(p^2). \quad (63a)$$

We thus have

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \{ \bar{f}_\alpha(x''), f_\beta(x) \} | 0 \rangle = \\ & = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d p e^{i p(x-x'')} \varepsilon(p) \{ \sum_1^{(+)}(p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2^{(+)}(p^2) \}_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (64)$$

As on page 423 we also have

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [\bar{f}_\alpha(x''), f_\beta(x)] | 0 \rangle = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d p e^{i p(x-x'')} \{ \sum_1^{(+)}(p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2^{(+)}(p^2) \}_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (65)$$

and

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \varepsilon(x-x'') \langle 0 | \{ \bar{f}_\alpha(x''), f_\beta(x) \} | 0 \rangle = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d p e^{i p(x-x'')} \{ \bar{\sum}_1^{(+)}(p^2) + (i\gamma p + m) \bar{\sum}_2^{(+)}(p^2) \}_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (66)$$

$$\bar{\sum}_i(p^2) = P \int_{m^2}^{\infty} \frac{\sum_i(-a)}{p^2+a} da; \quad (i=1,2). \quad (67)$$

⁶) J. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948).

With these notations we can write Eq. (58) as

$$\begin{aligned}
 & N^{-1} \langle 0 | \{ \bar{\psi}^{(0)}(x'), f(x) \} | 0 \rangle = \\
 & = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int dx'' \int dp e^{ip(x-x'')} \frac{\varepsilon(p)}{2} \{ \sum_1(p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2(p^2) \} S(x'' - x') + \\
 & + \frac{i}{(2\pi)^4} \int dx'' \int dp e^{ip(x-x'')} \{ \bar{\sum}_1(p^2) + (i\gamma p + m) \bar{\sum}_2(p^2) \} S(x'' - x') - \\
 & - i K' S(x - x'). \quad (68)
 \end{aligned}$$

As

$$S(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int dp e^{ipx} \varepsilon(p) (i\gamma p - m) \delta(p^2 + m^2)$$

Eq. (68) can also be written

$$\begin{aligned}
 & N^{-1} \cdot \langle 0 | \{ \bar{\psi}^{(0)}(x'), f(x) \} | 0 \rangle = \\
 & = -i [K' - \bar{\sum}_1(-m^2) - i\pi \varepsilon(p) \sum_1(-m^2)] S(x - x'). \quad (69)
 \end{aligned}$$

From Eq. (52), however, it follows that the right-hand side of (69) must vanish and, as $\sum_1(-m^2) = 0$ in view of *e. g.* (59a), this means

$$K' = \bar{\sum}_1(-m^2) = \int_{m^2}^{\infty} \frac{\sum_1(-a)}{a - m^2} da = K \cdot N^{-2}. \quad (70)$$

Eq. (70) gives the formula for K . Returning now to Eq. (51), we can write the matrix element of ψ between the vacuum and an one-electron state

$$\langle 0 | \psi(x) | q \rangle = \frac{1}{N} \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle. \quad (71)$$

The normalization constant N can be determined from the anti-commutator of $\bar{\psi}$ and ψ for equal times. Computing the vacuum expectation value of this quantity, we get in analogy with Eq. (25)

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | \{ \bar{\psi}(x), \psi(x') \} | 0 \rangle = \frac{-i}{N^2} S(x' - x) [1 + 2(N - 1)] + \\
 & + \int \int dx'' dx''' S_R(x' - x'') \langle 0 | \{ f(x''), \bar{f}(x''') \} | 0 \rangle S_A(x''' - x) = \\
 & = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int dp e^{ip(x' - x)} \varepsilon(p) \left[\delta(p^2 + m^2) \frac{1 + 2(N - 1)}{N^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{i\gamma p - m}{(p^2 + m^2)^2} \{ \sum_1(p^2) + (i\gamma p + m) \sum_2(p^2) \} \right] (i\gamma p - m). \quad (72)
 \end{aligned}$$

As

$$\begin{aligned}
 & \frac{i\gamma p - m}{p^2 + m^2} (\sum_1 + (i\gamma p + m) \sum_2) \frac{i\gamma p - m}{p^2 + m^2} = \\
 & = (i\gamma p - m) \left[\frac{-\sum_2}{p^2 + m^2} - \frac{2m \sum_1}{(p^2 + m^2)^2} \right] - \frac{\sum_1}{p^2 + m^2} \quad (73)
 \end{aligned}$$

we get for equal times with the aid of (4)

$$N^{-2} \gamma_4 \delta(\bar{x} - \bar{x}') = \gamma_4 \delta(\bar{x} - \bar{x}') \left[\frac{1 + 2(N-1)}{N^2} - \int_{m^2}^{\infty} da \left\{ \frac{-\Sigma_2(-a)}{a - m^2} + \frac{2m \Sigma_1(-a)}{(a - m^2)^2} \right\} \right] \quad (74)$$

and hence

$$\frac{N-1}{N^2} = \frac{-1}{2} (\bar{\Sigma}_2(-m^2) + 2m \bar{\Sigma}_1'(-m^2)) \quad (75)$$

$$\bar{\Sigma}_1'(-m^2) = - \int_{m^2}^{\infty} \frac{\Sigma_1(-a) da}{(a - m^2)^2} = \frac{d \bar{\Sigma}_1(p^2)}{d p^2} \Big|_{p^2 = -m^2}. \quad (76)$$

As was the case with the function $\bar{\pi}(p^2)$, it is necessary if the renormalization method is consistent that the difference

$$\Sigma_i(p^2) - \bar{\Sigma}_i(-m^2) \quad (i = 1, 2)$$

is finite, or that the integrals

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{\Sigma_i(-a) da}{(p^2 + a)(a - m^2)}$$

will converge. The last term in (75) is thus a finite quantity (apart from an infrared divergency for $a = m^2$) but the first integral might be infinite. This is, however, not serious, as the normalization constant itself is not observable. As a matter of fact, it has been shown by WARD⁷⁾ that, for an observable quantity, all infinities of this kind will disappear from the coefficients in an expansion in powers of the charge.

We will end this paragraph with the observation that if one considers Eq. (68) as an identity in x' , one concludes e, g .

$$\begin{aligned} \langle 0 | f(x) | q \rangle &= \frac{N}{(2\pi)^4} \int dx'' \int dp e^{ip(x-x'')} \times \\ &\times [K' - \bar{\Sigma}_1(p^2) - i\pi \varepsilon(p) \Sigma_1(p^2) - \\ &- (i\gamma p + m) (\bar{\Sigma}_2(p^2) + i\pi \varepsilon(p) \Sigma_2(p^2))] \langle 0 | \psi^{(0)}(x'') | q \rangle \end{aligned} \quad (77)$$

where the equation of motion for $\psi^{(0)}$ has *not* been used. One could

⁷⁾ J. C. WARD, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).

then try to compute the normalization constant N from (77) in the following way

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{N}\right) \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle = - \int S_R(x-x') \langle 0 | f(x') | q \rangle dx' = \\ & = \frac{N}{(2\pi)^4} \int dx'' \int dp \left[\frac{\bar{\Sigma}_1(p^2) - K'}{p^2 + m^2} (i\gamma p - m) + i\pi\varepsilon(p) \frac{\Sigma_1(p^2)}{p^2 + m^2} (i\gamma p - m) - \right. \\ & \quad \left. - \bar{\Sigma}_2(p^2) - i\pi\varepsilon(p) \Sigma_2(p^2) \right] \langle 0 | \psi^{(0)}(x'') | q \rangle e^{ip(x-x'')} = \\ & = N \left\{ - \Sigma_2(-m^2) - 2m \lim_{p^2+m^2 \rightarrow 0} \frac{\bar{\Sigma}_1(p^2) - \bar{\Sigma}_1(-m^2)}{p^2 + m^2} \right\} \langle 0 | \psi^{(0)}(x) | q \rangle. \quad (78) \end{aligned}$$

In Eq. (78) the equation of motion for $\psi^{(0)}$ and the fact that $\Sigma_i(p^2)$ vanishes for $-p^2 < (m + \mu)^2$ has been used in the *last* step of the computation. (μ is the small photon mass introduced to avoid infrared divergencies.) The value obtained in this way for N is, however, not the correct value in Eq. (75). This error comes from the way in which we have ambiguously put

$$- \int S_R(x-x') \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} + m \right) \psi^{(0)}(x') dx' = \psi^{(0)}(x). \quad (79)$$

The left-hand side of (79) is not a well-defined mathematical symbol, and the example above shows that a formula of the kind of Eq. (79) is not always to be trusted. Similar observations have been made in the past by many authors⁸).

I want to express my deep gratitude to professor W. PAULI for his kind interest and valuable criticism and to the *Swedish Atomic Committee* for financial support.

Appendix.

The physical meaning of the functions $\pi(p^2)$ and $\bar{\pi}(p^2)$ can be made clearer if we consider a system with an external electromagnetic field. The influence of such a field can be taken into account if we add the following two terms to the Lagrangian (1)

$$-\frac{ieN^2}{2} A_\mu^{(e)}(x) [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi] + L A_\mu^{(i)} j_\mu^{(e)}(x). \quad (\text{A. 1})$$

⁸) Cf. e. g. R. KARPLUS-N. M. KROLL, Phys. Rev. **77**, 542 (1950); F. J. DYSON, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949) and G. KÄLLÉN, Ark. f. Fys. **2**, 371 (1950).

We then get the following equations of motion

$$\left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + m\right) \psi(x) = \frac{ie}{2} \{A_\nu^{(i)}(x), \gamma_\nu \psi(x)\} + ie A_\nu^{(e)}(x) \gamma_\nu \psi(x) + K \psi(x) \quad (\text{A. 2})$$

$$\begin{aligned} \square A_\mu^{(i)}(x) = & -\frac{ieN^2}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] + L \left(\square A_\mu^{(i)}(x) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 A_\nu^{(i)}(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - j_\mu^{(e)}(x) \right). \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

In the formulae above, $A_\mu^{(e)}(x)$ is the external field and $A_\mu^{(i)}(x)$ the induced field. The former is a c -number and the latter an operator. The external current $j_\mu^{(e)}(x)$ is given by

$$j_\mu^{(e)}(x) = - \left(\square A_\mu^{(e)}(x) - \frac{\partial^2 A_\nu^{(e)}(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right). \quad (\text{A. 4})$$

If we suppose that we know the solution ($\psi(x)$ and $\mathbf{A}_\mu(x)$) when the external field is zero, and that we have a situation where the external field is very weak, we can expand the operators above in a power series of the *external field*. It can be verified without difficulty that the first two terms in such an expansion are respectively

$$\psi(x) = \psi(x) - i \int_{-\infty}^x [\mathbf{j}_\nu(x'), \psi(x)] A_\nu^{(e)}(x') dx' \quad (\text{A. 5})$$

and

$$\begin{aligned} A_\mu^{(i)}(x) = & \mathbf{A}_\mu(x) - i \int_{-\infty}^x [\mathbf{j}_\nu(x'), \mathbf{A}_\mu(x)] A_\nu^{(e)}(x') dx' + \\ & + \frac{L}{1-L} (\delta_{\mu\nu} - \delta_{4\mu} \delta_{4\nu}) A_\nu^{(e)}(x). \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

Substituting *e. g.* Eq. (A. 6) into the left-hand side of Eq. (A. 3) we obtain

$$\begin{aligned} \square A_\mu^{(i)}(x) = & -\mathbf{j}_\mu(x) - \frac{eN^2}{2(1-L)} \int_{-\infty}^x [[\mathbf{j}_\nu(x'), \bar{\psi}(x)], \gamma_\mu \psi(x)] A_\nu^{(e)}(x') dx' - \\ & - \frac{eN^2}{2(1-L)} \int_{-\infty}^x [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu, [\mathbf{j}_\nu(x'), \psi(x)]] A_\nu^{(e)}(x') dx' + \\ & + i \int_{x_0=x_0'}^x d^3x' \left([\mathbf{j}_\nu(x'), \mathbf{A}_\mu(x)] \frac{\partial A_\nu^{(e)}(x')}{\partial t'} + \left[\mathbf{j}_\nu(x'), \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial t} \right] A_\nu^{(e)}(x') \right) + \\ & + \frac{iL}{1-L} \int_{-\infty}^x \left[\mathbf{j}_\nu(x'), \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\lambda(x)}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \right] A_\nu^{(e)}(x') dx' + \frac{L}{1-L} (\delta_{\mu\nu} - \delta_{4\mu} \delta_{4\nu}) \square A_\nu^{(e)}(x). \end{aligned} \quad (\text{A. 7})$$

Using Eq. (A. 5), (A. 6) and the formulae

$$\begin{aligned} i \int_{x_0=x_0'} d^3 x' \left([\mathbf{j}_\nu(x'), \mathbf{A}_\mu(x)] \frac{\partial A_\nu^{(e)}(x')}{\partial t'} + \left[\mathbf{j}_\nu(x'), \frac{\partial \mathbf{A}_\mu(x)}{\partial t} \right] A_\nu^{(e)}(x') \right) = \\ = \frac{-L}{1-L} \frac{\partial^2 A_\nu^{(e)}(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{L}{1-L} \delta_{\mu 4} \square A_4^{(e)}(x) \end{aligned} \quad (\text{A. 8})$$

and

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \left[\mathbf{j}_\nu(x'), \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\lambda(x)}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \right] A_\nu^{(e)}(x') dx' = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \int_{-\infty}^x [\mathbf{j}_\nu(x'), \mathbf{A}_\lambda(x)] A_\nu^{(e)}(x') dx' + \\ + \frac{iL}{1-L} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k^{(e)}(x)}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{A. 9})$$

we can simplify the right-hand side of (A. 7) to

$$\begin{aligned} \frac{-ieN^2}{2(1-L)} \left([\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] - [\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(x), \gamma_\mu (\psi(x) - \psi(x))] \right) - \\ - \frac{L}{1-L} \left(\frac{\partial^2 A_\nu^{(i)}(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + j_\mu^{(e)}(x) \right). \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

This expression differs from the correct current only in terms which are of second order in $A_\mu^{(e)}(x)$. The verification of (A. 5) can be performed along similar lines and will not be given explicitly.

If we now compute the vacuum-expectation value of the current operator, we obtain from (A. 6) with the aid of (A. 8)

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_\mu^{(i)}(x) | 0 \rangle = \frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \varepsilon(x - x')) \langle 0 | [\mathbf{j}_\nu(x'), \mathbf{j}_\mu(x)] | 0 \rangle A_\nu^{(e)}(x') dx' + \\ + \frac{L}{1-L} j_\mu^{(e)}(x) \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

or

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_\mu^{(i)}(x) | 0 \rangle = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d p e^{i p x} (-\bar{\pi}(p^2) + \bar{\pi}(0) - i\pi \varepsilon(p) \pi(p^2)) j_\mu^{(e)}(p) \end{aligned} \quad (\text{A. 12})$$

where

$$j_\mu^{(e)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d p e^{i p x} j_\mu^{(e)}(p). \quad (\text{A. 13})$$

The vacuum thus behaves as a medium with the complex dielectric-constant

$$\varepsilon(p^2) = 1 - \bar{\pi}(p^2) + \bar{\pi}(0) - i\pi \varepsilon(p) \pi(p^2). \quad (\text{A. 14})$$

The connection between the real and the imaginary part of $\varepsilon(p^2)$,

which is expressed in Eq. (35a), is very similar to a formula that has been given by KRAMERS⁹⁾ for a dielectricum.

The expectation value of the energy which is transferred per unit time from the external field to the system of particles is given by

$$\int d^3x \langle 0 | \frac{\partial L}{\partial t} | 0 \rangle = \int d^3x \left(\frac{\partial A_v^{(e)}(x)}{\partial t} \langle 0 | j_v^{(i)}(x) | 0 \rangle + \right. \\ \left. + L \left[\langle 0 | A_v^{(i)}(x) | 0 \rangle \frac{\partial j_v^{(e)}(x)}{\partial t} - \langle 0 | j_v^{(i)}(x) | 0 \rangle \frac{\partial A_v^{(e)}(x)}{\partial t} - j_v^{(e)}(x) \frac{\partial A_v^{(e)}(x)}{\partial t} \right] \right). \quad (\text{A.15})$$

The time average of the terms proportional to L is zero, and the average of the first term is equal to

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int dp \pi(p^2) \frac{|p_0|}{-p^2} \frac{1}{2} j_v^{(e)}(p) j_v^{(e)}(-p) \quad (\text{A. 16})$$

which is thus the energy of the real particles (photons and electron pairs) which are created per unit time by the external field.

⁹⁾ M. H. A. KRAMERS, Cong. Int. d. Fisici, Como, Settembre 1927.

Winkelverteilung von gestreuten Neutronen an He^4

von P. Huber und E. Baldinger, Basel.

(21. VI. 1952.)

Zusammenfassung. Im Energiegebiet von 3–4,14 MeV wurde die Winkelverteilung der elastisch an He^4 gestreuten Neutronen gemessen. Eine Phasenanalyse, wozu auch die Messresultate von ADAIR im Energiegebiet von 0,4–2,7 MeV benutzt werden, liefert als tiefsten Zustand ein $P_{3/2}$ -Niveau und 1,76 MeV höher ein $P_{1/2}$ -Niveau.

Einleitung.

In der Arbeit „Streuung von schnellen Neutronen an Sauerstoff“¹⁾ wurde gezeigt, dass aus dem relativen differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma(\Theta)$, zusammen mit dem totalen Querschnitt σ_t , die Phasen der auftretenden Streuwellen berechnet werden können. Aus dem Phasenverlauf lässt sich sowohl die Energie der Niveaus als auch der totale und der Bahn-Drehimpuls bestimmen. Zur Diskussion der Spin-Bahnkopplung ist es wünschenswert, die Aufspaltung der Niveaus bei leichten Kernen zu wissen.

Für das Experiment leicht zugänglich ist die Streuung von monochromatischen Neutronen an He^4 . Aus der Analyse solcher Experimente können die Niveaus im Zwischenkern He^5 bestimmt werden. Es liegen bereits eine grosse Reihe von Streumessungen²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾ vor. Als erste haben BALDINGER, HUBER und STAUB bei 2,6 MeV Neutronenenergie Messungen an He^4 ausgeführt. STAUB und TATEL konnten durch Bestimmung der Rückwärtsstreuung zeigen, dass der P -Zustand aufgespalten sein muss. Die Grösse der Aufspaltung war aber nur qualitativ angebbbar. ADAIR⁶⁾ kommt auf Grund einer Extrapolation der (p-He)-Streuung zu einer Aufspaltung der $P_{3/2}$ und $P_{1/2}$ -Zustände von 5 MeV.

1) E. BALDINGER, P. HUBER & W. A. PROCTOR, *Helv. Phys. Acta*, **25**, 142, 1952.

2) E. BALDINGER, P. HUBER & H. STAUB, *Helv. Phys. Acta*, **11**, 245 (1938).

3) H. H. BARSCHALL & M. H. KANNER, *Phys. Rev.* **58**, 590 (1940).

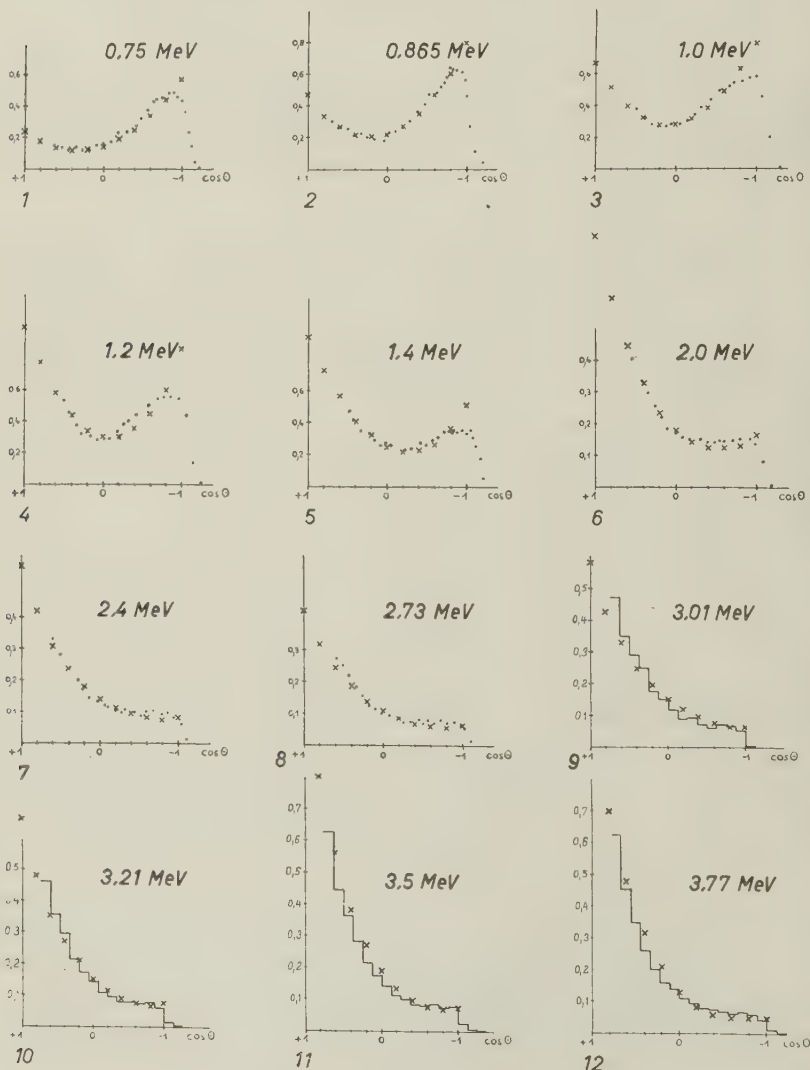
4) H. STAUB & H. TATEL, *Phys. Rev.* **57**, 936 (1940).

5) T. A. HALL & P. A. KOONTZ, *Phys. Rev.* **72**, 196 (1947).

6) R. K. ADAIR, *Phys. Rev.* **86**, 155 (1952).

Apparatur und Messmethode.

Als Neutronenquelle diente uns die dd -Reaktion. Die Deuteronen konnten bis zu maximal 1 MeV beschleunigt werden. Streuungen wurden im Energiebereich 3,01—4,14 MeV ausgeführt. Apparatur und Messmethode sind in einer früheren Arbeit beschrieben¹⁾. Die Ionisationskammer besteht aus 2 parallelen Platten mit 1 cm Distanz und 4 cm Durchmesser der Auffänger-Elektrode.



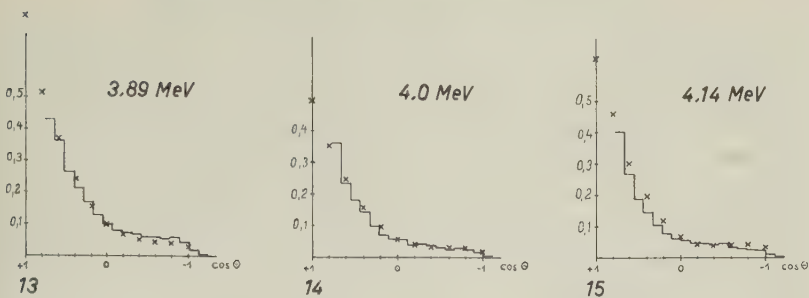


Fig. 1—15.

Relative differentielle Querschnitte für die $n\text{-He}^4$ -Streuung. Die in Fig. 1—8 dargestellten Messwerte (\cdot) sind von ADAIR, die Stufenkurven von uns gemessen. Die Kreuze geben die aus den Phasen berechneten Werte. Als Abszisse ist der Cosinus des Streuwinkels Θ , als Ordinate ein rel. Mass des differentiellen Querschnittes aufgetragen.

Die Neutronen wurden parallel den Platten eingestrahlt. Die Kammer ist mit 16 ata Helium gefüllt. Die Reichweite der Rückstosskerne bei 4 MeV-Neutronenenergie beträgt 7 mm.

Ergebnisse.

Die von uns neu gemessenen, relativen, differentiellen Streuquerschnitte sind in den Fig. 9—15 dargestellt. Die Fig. 1—8 zeigen die von ADAIR gemessenen differentiellen Querschnitte. Als totalen Querschnitt benutzen wir die Messungen von BASHKIN, MOORING und PETREE⁷⁾ (Fig. 16).

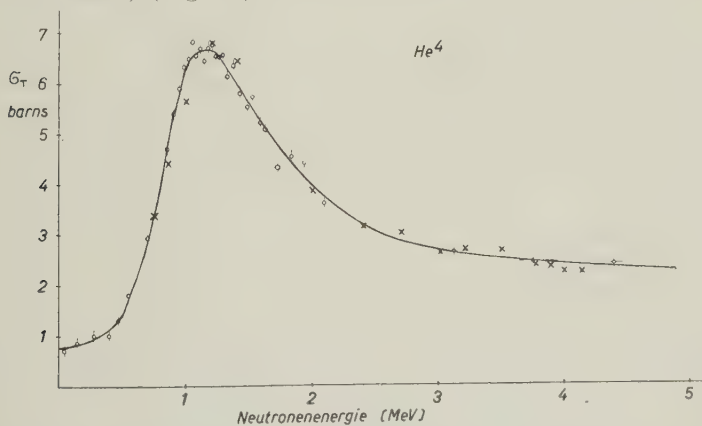


Fig. 16.

Totaler Querschnitt für die $(n\text{-He}^4)$ -Streuung nach BASHKIN u. a. Die Kreuze (x) geben die aus den Phasen (Fig. 17) berechneten Werte.

⁷⁾ BASHKIN, MOORING & PETREE, Phys. Rev. **82**, 378 (1951).

Die Theorie des Streuprozesses mit Spin-Bahnkopplung und Spin 0 des Streukernes wurde von BLOCH⁸⁾ und anderen gegeben. Der differentielle Wirkungsquerschnitt der gestreuten Neutronen lässt sich durch die Phasen der einzelnen (l, j) -Streuwellen beschreiben. (l Bahndrehimpuls, $j = l \pm \frac{1}{2}$ totaler Drehimpuls):

$$k^2 \sigma(\Theta) = \sum_l (2l+1)^{-1} \left[(l+1) e^{i\eta_{l+\frac{1}{2}}} \sin \eta_{l+\frac{1}{2}} + l e^{i\eta_{l-\frac{1}{2}}} \sin \eta_{l-\frac{1}{2}} \right] Y_l^0 \Big|^2 + \left| \sum_l \left(\frac{l(l+1)}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} [e^{i(\eta_{l+\frac{1}{2}} + \eta_{l-\frac{1}{2}})} \sin(\eta_{l+\frac{1}{2}} - \eta_{l-\frac{1}{2}})] Y_l^1 \right|^2.$$

Es bedeuten: k Wellenzahl der gestreuten Neutronen

Θ Streuwinkel des Neutrons im Schwerpunktssystem

$j = l \pm \frac{1}{2}$ Phase der auslaufenden Streuwelle mit dem totalen Drehimpuls j

Y_l^0 und Y_l^1 normierte und zugeordnete Kugelfunktion 1. Art.

Integriert man den differentiellen Querschnitt über den ganzen Winkelraum, so bekommt man den totalen Streuquerschnitt:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l [(l+1) \sin^2 \eta_{l+\frac{1}{2}} + l \sin^2 \eta_{l-\frac{1}{2}}].$$

Zur Phasenanalyse benutzten wir Streuwellen bis $l = 2$. Analysiert wurde mit einem Analogie-Rechengerät⁹⁾. Mit diesem Gerät war es möglich, ca. 10–20 Kurven pro Stunde auszurechnen. Die Phasenwerte wurden so ausgewählt, dass zunächst der totale Querschnitt stimmte, und dann unter Einhaltung dieser Bedingung so geändert, dass auch der differentielle Querschnittsverlauf möglichst gut beschrieben werden konnte. Der Phasenverlauf der die experimentellen Resultate am besten wiedergibt, ist in Fig. 17 aufgezeichnet. Wie gut die Messwerte dadurch dargestellt sind, zeigen die Kreuze (x) in den Fig. 1–15. Die Wiedergabe des experimentellen Materials durch diese Phasen ist recht befriedigend. Dass die experimentellen Kurven keine Spitzen enthalten, ist durch den Untergrund der Messanordnung bedingt.

Der Phasenverlauf gibt im vermessenen Energiebereich zwei breite Niveaus. Das tiefere entspricht einem $P_{3/2}$, das höhere einem $P_{1/2}$ -Zustand. Das $P_{1/2}$ -Niveau ist wesentlich unschärfer als das $P_{3/2}$ -Niveau. Als Niveau-Energie wollen wir die Energie ansehen, bei der die Phase den Wert 90° annimmt. Im totalen Streuquerschnitt besitzt bei $\eta_{l,j} = 90^\circ$ der Anteil der (l, j) -Streuwellen den

⁸⁾ F. BLOCH, Phys. Rev. **58**, 829 (1940).

⁹⁾ E. BALDINGER, Helv. Phys. Acta (im Druck).

maximalen Wirkungsquerschnitt. Mit dieser Festsetzung der Niveau-Energie liegt der $P_{3/2}$ -Zustand bei $\frac{4}{5} \cdot 1,3 = 1,04$ MeV, das $P_{1/2}$ -Niveau bei 2,8 MeV. Im Schwerpunktsystem ergibt sich daraus eine Aufspaltung des P-Niveaus von 1,76 MeV.

Der Phasenverlauf der $P_{3/2}$ -Streuwellen zeigt im Energiegebiet 2,2–3 MeV eine kleine Einsattelung. Mit unserer Messgenauigkeit können wir nicht feststellen, ob diese Einsattelung reell ist. Die Phasen der D-Wellen mussten in die Rechnung einbezogen werden, um die experimentellen Kurven der differentiellen Querschnitte gut wiedergeben zu können.

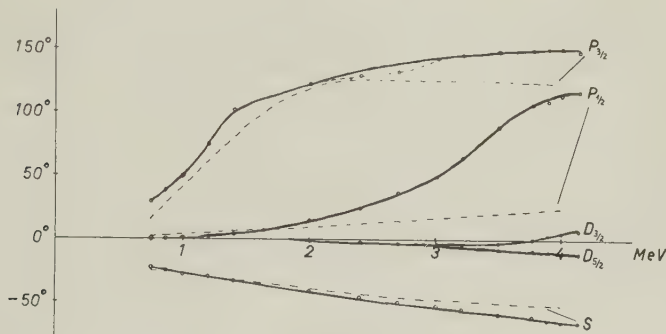


Fig. 17.

Phasenverlauf. Die gestrichelten Kurven stellen die von BÜRGEL berechneten Phasenwerte dar.

Diskussion.

B. BÜRGEL¹⁰⁾ hat für ein Kastenpotential und Spin-Bahnkoppelung den Phasengang für die $n\text{-He}^4$ -Streuung berechnet. Als Potential benützte er folgenden Ansatz:

$$[A (\vec{l}, \vec{\sigma}) + B] V(r)$$

$$A = -3,41 \text{ MeV}$$

$$V(r) = 0 \text{ für } r > 2,55 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

$$B = -33,0 \text{ MeV}$$

$$= 1 \text{ für } r \leq 2,55 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

Seine berechneten Phasenwerte sind in Fig. 17 eingetragen. Die D-Phasen sind sehr klein (~ 0). Bis zu 2 MeV Neutronenenergie stimmen diese Phasen einigermaßen mit den experimentell gefundenen überein. Für höhere Energien dagegen ist auch keine angenäherte Übereinstimmung vorhanden. Vor allem die $P_{1/2}$ -Phasen besitzen ganz verschiedene Werte.

¹⁰⁾ B. BÜRGEL, mündliche Mitteilung.

Bei dem flachen Anstieg der P -Phasen wird, sofern man überhaupt noch von einem Niveau sprechen kann, dasselbe sehr breit und seine Lebensdauer ist nur noch ca. 10^3 mal kürzer als die Zeit, die das Neutron braucht, um den Kern zu durchqueren. Die Festlegung einer Niveau-Energie, wie wir das im vorigen Abschnitt getan haben, ist daher recht problematisch. Unsere Festlegung war so, dass bei dieser Energie der Querschnitt der entsprechenden (l, j) -Streuwellen maximal ist. Ein Vergleich mit anderen Untersuchungen ist nicht ohne weitere Kenntnisse möglich, da im allgemeinen andere Grössen für die Festlegung der Niveauenergien herangezogen werden. ADAIR⁶⁾ hat auf Grund von p -He⁴-Streuungen¹¹⁾ und eigenen n -He⁴-Streuungen die Aufspaltung des P -Niveaus zu 5 MeV bestimmt, wobei über ein weites Energiegebiet extrapoliert werden musste. Wenn man die gleiche Festlegung der Niveauenergie, wie in dieser Arbeit, annimmt, so kommt man im Vergleich zu unserer Messung dennoch zu einer erheblich höheren Aufspaltung (ca. 4–5 MeV). Es scheint uns, dass eine Extrapolation bei diesem breiten Niveau kaum mehr zulässig ist. LELAND und AGNEW¹²⁾ haben bei der (T, T) -Reaktion zwei Neutronengruppen gefunden, die sie als Zerfallsneutronen des He⁶ Zwischenkernes deuten. Danach hätte der He⁵-Endkern, der nachträglich weiter zerfällt, zwei virtuelle Zustände mit einer Aufspaltung von 2,6 MeV. Der tiefere Zustand wäre dem $P_{3/2}$, der höhere dem $P_{1/2}$ -Niveau zuzuordnen.

Herrn Dr. W. PROCTOR danken wir für die Hilfe bei den Messungen. Die Herren Prof. M. FIERZ und Dr. K. BLEULER haben uns durch wertvolle Diskussionen unterstützt.

¹¹⁾ FREIER, LAMPI, SLEATOR & WILLIAMS, Phys. Rev. **75**, 1345 (1949).

¹²⁾ W. J. LELAND & H. M. AGNEW, Phys. Rev. **82**, 558 (1951).

Compte rendu de la réunion de la Société Suisse de Physique

à Baden, le 3 mai 1952.

Président: Prof. Dr. A. MERCIER (Berne),
Vice-président: Prof. Dr. P. HUBER (Bâle),
Secrétaire: Dr. P. DINICHERT (Neuchâtel).

Partie administrative.

Sont reçus comme membres ordinaires: Mme. G. KIND-SCHAAD (Zurich); MM. C. ALLEMAND (Neuchâtel), P. BAER (Bâle), M. BECK (Zurich), C. BURCKHARDT (Küsnacht), B. CHAIN (Zurich), G. DÄT-WYLER (Zurich), H. FLURY (Berne), H. H. GLÄTTLI (Küsnacht), R. GREGORIG (Zurich), P. DE HALLER (Winterthur), H. HUBER (Ragaz), G. HULL (Berne), R. HÜRLIMANN (Zurich), K. ISERLAND (Zurich), E. JAQUET (Bâle), R. LACROIX (Genève), P. LERCH (Lausanne), W. MAUDERLI (Zurich), R. MEIER (Wettingen), G. de MONTMOLLIN (Zurich), Z. PLASKOWSKI (Winterthur), F. SALZMANN (Zurich), M. SEMPET (Zurich), H. SPRENGER (Zurich), C. ZANGGER (Neuchâtel), H. ZIEGLER (Rüschlikon).

La S.S.P. compte actuellement 385 membres.

Le rapport de gestion, les comptes et le rapport des vérificateurs sont présentés et acceptés.

Le rapport de la Commission de rédaction des *Helvetica Physica Acta*, établi par le professeur M. FIERZ, est approuvé avec remerciements.

Le professeur A. PERRIER donne un aperçu sur l'activité du Comité national suisse de Physique.

Le président de la S.S.P. renseigne l'assemblée sur les travaux pour la création du Laboratoire européen de recherches nucléaires. Puis il explique, conjointement avec le professeur J. ACKERET, le projet de faire une place plus grande à la Physique et aux Mathématiques appliquées au sein de la S.S.P. Une longue discussion s'ensuit, au cours de laquelle la parole est donnée notamment au professeur E. STIEFEL, délégué de la Société Suisse de Mathématiques.

La proposition est adoptée, toutefois sans modification des statuts de la S.S.P. On ne fera pas de distinction de principe entre la Physique pure et la Physique et les Mathématiques appliquées. Le Comité veillera à ce que les conditions d'admission dans la Société soient respectées. Les travaux traitant d'applications seront présentés dans des séances spéciales à l'occasion des réunions de la S.S.P.

Monsieur P. de HALLER (Winterthur) est désigné comme secrétaire-adjoint pour les questions de Physique et de Mathématiques appliquées.

La prochaine séance de la S.S.P. aura lieu à l'occasion de la 132e réunion annuelle de la Société Helvétique des Sciences Naturelles à Berne.

Partie scientifique.

Les travaux de Physique et de Mathématiques appliquées paraissent dans la «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik».

Anregungsfunktion der Kernreaktion $N^{14}(p, \alpha) C^{11}$

von J.-P. BLASER, P. MARMIER und M. SEMPFT (ETH., Zürich).

Die Reaktion $N^{14}(p, \alpha) C^{11}$ ist für Protonen von ca. 6-MeV-Energie die einzige (p, α) -Reaktion, die auf eine gut messbare Aktivität führt [$C^{11}(\beta^+) B^{11}$, $T = 20,4$ min.]. Man ist also in der Lage, die Anregungsfunktion dieser Reaktion mittels der Folienmethode zu messen*).

In der früher beschriebenen Anordnung¹⁾ wurde ein Paket stickstoffhaltiger Folien mit dem ausgelenkten monochromatischen Protonenstrahl des Cyklotrons bestrahlt. Die Herstellung der Folien erfolgte durch Sedimentation von NH_4Cl -Nebel auf dünnes Aluminium. Die so erhaltenen Schichten (Dicke einige Zehntel μ) erwiesen sich als ausserordentlich homogen und genügend widerstandsfähig, um mehrere Bestrahlungen auszuhalten. Die Aktivität der Folien ist praktisch reine C^{11} -Aktivität, da die Schwelle der Reaktion $N^{14}(p, n) O^{14}$ oberhalb 7 MeV liegt und die $Cl(p, n) A$ -Reaktionen nicht stören.

Fig. 1 zeigt die erhaltene Anregungskurve. Auf der Ordinatenachse ist der absolute Wirkungsquerschnitt aufgetragen. Er wurde durch Absolutbestimmung der Aktivität gemessen²⁾. Die 4 gefun-

*) Eine frühere Messung mit geringerem Auflösungsvermögen ergab keine Resonanzen. BARKAS, Phys. Rev. **56**, 287 (1939).

¹⁾ BLASER, BOEHM, MARMIER und PEASLEE, Helv. Phys. Acta **24**, 421 (1951).

²⁾ BLASER, BOEHM, MARMIER und SCHERRER, Helv. Phys. Acta **24**, 444 (1951).

denen Resonanzen entsprechen Anregungsniveaux des Zwischenkerns O^{15} . Ein Vergleich dieser Niveaux mit andern Messungen ist nicht möglich, weil in diesem Energiebereich des Zwischenkerns keine andern Untersuchungen existieren.

Protonen-Energie (Laborsystem)	Anregungsenergie des Zwischenkerns O^{15}	Wirkungs- querschnitt
4,94 MeV	11,9 MeV	10 mb
5,3 MeV	12,2 MeV	28 mb
5,6 MeV	12,5 MeV	35 mb
6,15 MeV	13,0 MeV	66 mb

Der allgemeine Verlauf des Wirkungsquerschnittes mit der Energie lässt sich durch die Konkurrenz verschiedener Prozesse qualitativ erklären. Von den in diesem Energiebereich zu erwartenden

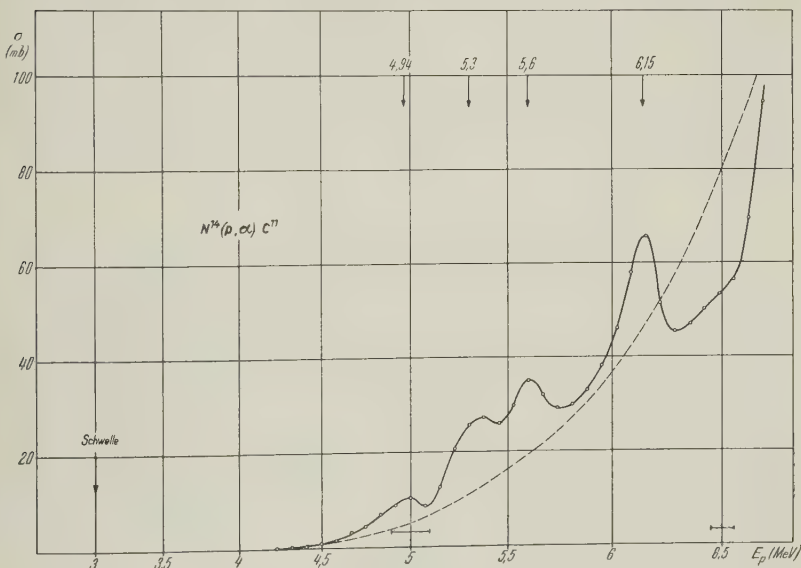


Fig. 1.

Reaktionen (p, γ) (p, n) (p, p) (p, α) treten nur die beiden letzten in Konkurrenz, weil die (p, n) -Schwelle über der Maximalenergie liegt und der (p, γ) -Prozess gegenüber Reaktionen mit Teilchenemission ganz zurücktritt. Der Verlauf der Kurve zeigt verhältnismässig schwach ausgeprägten Resonanzcharakter, was vermuten lässt, dass wir uns in einem Gebiet relativ grosser Niveaudichten und be-

trächtlicher Niveaubreiten befinden. Der Wirkungsquerschnitt lässt sich unter diesen Umständen folgendermassen abschätzen:

$$\sigma_{p,\alpha}(E_p) = \sigma_c(E_p) \cdot \eta_\alpha(E_p, E_\alpha)$$

σ_c ist der nach der Weisskopfschen Theorie berechnete Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Zwischenkerns; $\eta_\alpha = \Gamma_\alpha / (\Gamma_\alpha + \Gamma_p)$ ist die relative Wahrscheinlichkeit für α -Emission. Wir beschränken uns auf Teilchen mit Bahnmoment null und schreiben für die Emissionswahrscheinlichkeiten¹⁾

$$\Gamma_{\alpha,p} = \Gamma_{\alpha,p}^0 \sqrt{E_{\alpha,p}} \cdot P_{\alpha,p}^0 \quad E_\alpha = E_p - E_{\text{Schwelle}}$$

P stellt die Penetrationsfunktion der Coulomb-Barriere dar. Der gemessene Verlauf von η_α gestattet also, die *a priori* Wahrscheinlichkeiten Γ_α^0 und Γ_p^0 zu vergleichen. Die unter der Annahme $\Gamma_\alpha^0 = \Gamma_p^0$ berechnete Kurve (in Fig. 1 gestrichelt) gibt den allgemeinen Verlauf von $\sigma_{p,\alpha}$ befriedigend wieder. Insbesondere ergibt sich auch der erst ca. 1,5 MeV oberhalb der Schwelle einsetzende Anstieg.

Trotz der Verschiedenartigkeit von Proton (Elementarteilchen) und α -Teilchen (zusammengesetzt) scheinen in diesem Fall die *a priori*-Emissionswahrscheinlichkeiten von der gleichen Grössenordnung zu sein.

Streuung von schnellen Neutronen an He⁴ und C¹¹

von P. HUBER, E. BALDINGER und R. BUDDE (Basel).

Die Streuexperimente an He⁴ und C¹² mit schnellen Neutronen wurden mit der Methode durchgeführt, die wir ebenfalls für O¹⁶ benutzten¹⁾. Die Analyse der Streuresultate geschah mit Hilfe eines Analogie-Rechengerätes²⁾. Die He-Resultate sind bereits in einer speziellen Arbeit publiziert³⁾. Als Ergebnis sei hier folgendes mitgeteilt: Der Grundzustand des He⁵ ist ein $P_{3/2}$ -Zustand. Das $P_{1/2}$ -Niveau liegt 1,76 MeV höher, so dass eine Aufspaltung des P -Zustandes um 1,76 MeV vorliegt.

An C¹² bestimmten wir im Energiegebiet von 2,6–4,15 MeV den differentiellen Streuquerschnitt. Die benutzte Ionisationskammer ist in ¹⁾ beschrieben. Das Füllgas war CS₂-Dampf von 0,6 ata. Wegen der Schwefelrückstösse konnte die Neutronenstreuung nur im Winkelgebiet 180–63° (angegeben im Schwerpunktsystem)

¹⁾ E. BALDINGER, P. HUBER und W. PROCTOR, *Helv. Phys. Acta* **25**, 142 (1952).

²⁾ E. BALDINGER, *Helv. Phys. Acta* **25**, 446, (1952).

³⁾ P. HUBER und E. BALDINGER, *Helv. Phys. Acta* **25**, 435 (1952).

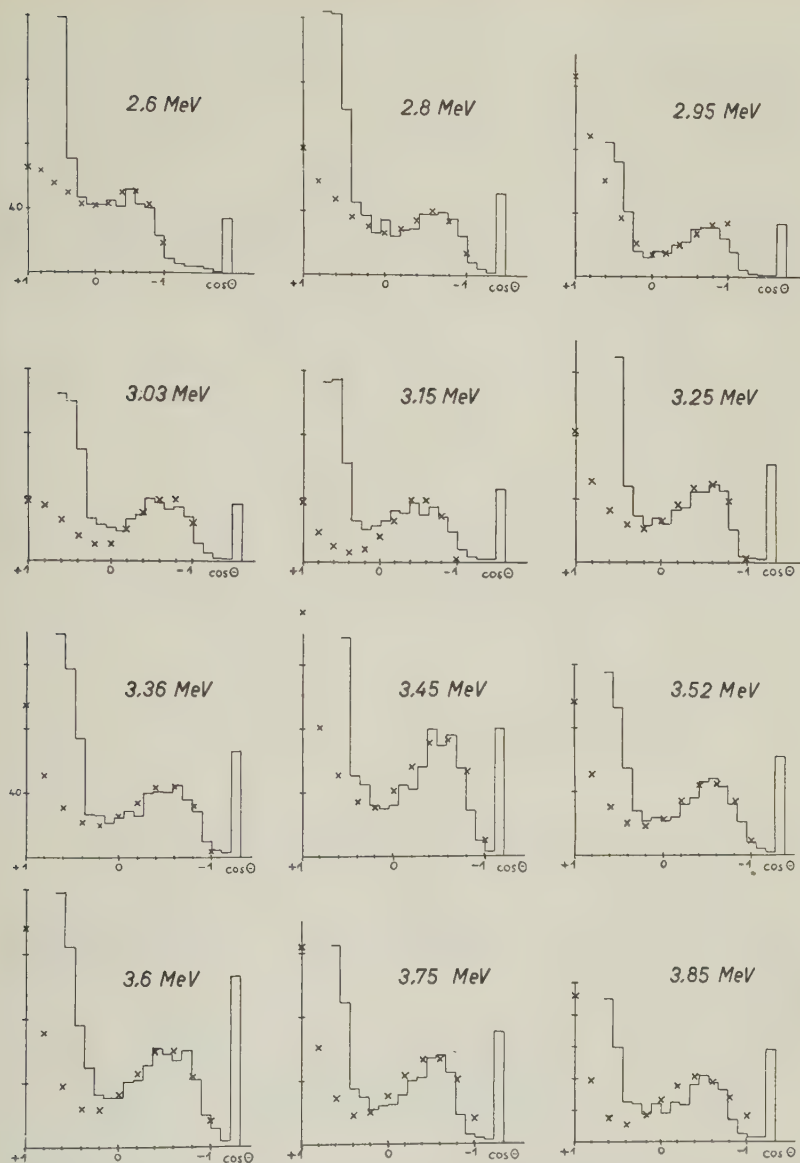


Fig. 1.

Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Neutronen-Streuung an C^{12} . Als Abszisse ist der Kosinus des Streuwinkels vom Neutron im Schwerpunktsystem, als Ordinate die Impulszahl/Kanal aufgetragen. Die Einheit in der Ordinate entspricht 160 Impulsen/Kanal.

Stufenkurve = gemessene Werte. Kreuze = gerechnete Werte.
Die angegebenen Energien sind die Neutronenenergien im Lab.-System.

gemessen werden. Die Vorwärtsstreuung war daher nicht messbar. Der Phasenanalyse liegt der totale Neutronen-Streuquerschnitt¹⁾ zugrunde und der von uns gemessene relative differentielle Streuquerschnitt. Auch diese Analyse berechneten wir mit dem Analogie-Rechenggerät. Die Phasen sind so gewählt, dass sie den totalen Streuquerschnitt genau, den differentiellen Querschnittsverlauf möglichst gut wiedergeben (Fig. 1). Die erhaltenen Phasenverläufe sind in Fig. 2 dargestellt. Es zeigen sich zwei Resonanzstellen. Bei

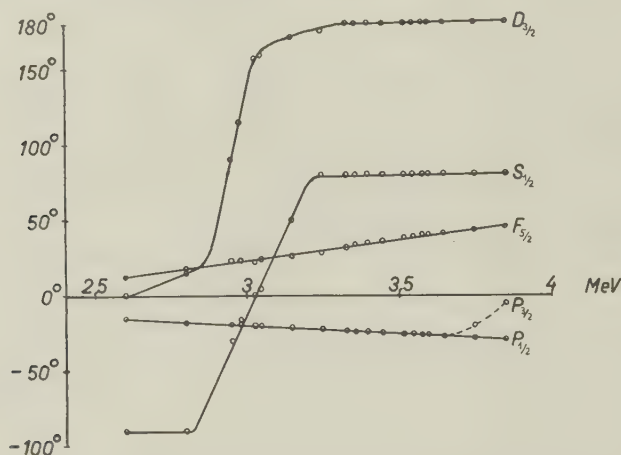


Fig. 2.

Phasenverlauf der Streuwellen zwischen 2,6 und 3,85 MeV. Die Energie bezieht sich auf die Neutronenenergie im Lab.-System.

2,95 MeV liegt eine $D_{3/2}$ -Resonanz, bei 3,04 MeV eine $S_{1/2}$ -Resonanz. Die angegebenen Energien beziehen sich auf die Neutronenenergie im Lab.-System. Bemerkenswert ist, dass der breite Buckel im totalen Querschnitt bei 3,6 MeV keiner Resonanzstelle entspricht.

Analogie-Rechenggerät zur Phasenanalyse von Streuexperimenten mit schnellen Neutronen

von E. BALDINGER (Basel).

Die theoretische Beschreibung der elastischen Streuung von schnellen Neutronen mit dem Spin Null wurde von BLOCH²⁾ und anderen gegeben. Der totale sowie der differentielle Wirkungsquer-

¹⁾ C. K. BOCKELMAN, D. W. MILLER, R. K. ADAIR und H. H. BARSCHALL, Phys. Rev. **84**, 69 (1951).

²⁾ F. BLOCH, Phys. Rev. **58**, 829 (1940).

schnitt $\sigma(\Theta)$ lässt sich durch die Phasen μ der Streuwellen beschreiben. Für $\sigma(\Theta)$ erhält man eine Beziehung von der Form:

$$\sigma(\Theta) \approx \left| \sum_{\lambda} c_{\lambda} y_{\lambda}(\Theta) e^{i\eta_{\lambda}} \sin \eta_{\lambda} \right|^2 + \left| \sum_{\lambda} c'_{\lambda} y'_{\lambda}(\Theta) e^{i\eta_{\lambda}} \sin \eta_{\lambda} \right|^2 \quad (1)$$

Dabei bedeuten: $y(\Theta)$ und $y'(\Theta)$ die normierte und ihre zugeordnete Kugelfunktion 1. Art, c und c' von dem Index λ abhängige Konstanten und Θ den Neutronenstreuwinkel im Schwerpunktsystem. Um die zeitraubende Analyse der Messungen*) zu erleichtern, wurde ein einfaches Analogie-Rechengerät gebaut, das die obige Formel nachbildet. Auf dem Eingang des Rechengerätes wird eine Wechselspannung von 2500 Hz geschaltet. Der Term $e^{i\eta} \sin \eta$ lässt sich durch ein RC -Glied darstellen, wobei der Widerstand einstellbar und in Graden der Phase η geeicht ist. Die Änderung des Winkels Θ erfolgt durch Drehen eines Stufenschalters, mit dessen Hilfe an Kathodenwiderständen Wechselspannungen entsprechend dem Werte von $c_{\lambda} y_{\lambda}(\Theta)$ abgegriffen werden. Trioden, deren Anoden parallel geschaltet sind, bilden die vektoriellen Summen. Die quadratische Addition der beiden Terme von Formel (1) erfolgt durch ein quadratisch anzeigendes statisches Voltmeter. Zu diesem Zwecke wird die dem 2. Term entsprechende Wechselspannung zuerst gleichgerichtet. Eine ausführlichere Beschreibung dieses Analogie-Rechengerätes folgt demnächst in der *Helv. Phys. Acta*.

Direkte Messungen der Winkelverteilung gestreuter Neutronen an C^{12}

VON A. E. REMUND und R. RICAMO (ETH., Zürich).

Die Kenntnis der elastischen Wirkungsquerschnitte σ und der differentiellen Wirkungsquerschnitte $\sigma(\vartheta)$ beim elastischen Stoss von Neutronen an Kernen für einen genügend breiten Energiebereich erlaubt die Charakterisierung der Niveaux: Die Analyse von σ gibt normalerweise den gesamten Drehimpuls J des an einer Resonanzstelle angeregten Zwischenkernes und $\sigma(\vartheta)$ gibt den Bahndrehimpuls l , da $\sigma(\vartheta)$ sehr stark von l abhängt.

Besonders interessant ist die Kenntnis der Niveaux von C^{13} , da daraus auf die Existenz und Art der Spin-Bahn-Kopplung geschlossen werden kann¹⁾.

*) Vgl. z. B. E. BALDINGER, P. HUBER, W. G. PROCTOR, *Helv. Phys. Acta* **25**, 142 (1952).

¹⁾ M. VERDE, *Helv. Phys. Acta* **23**, 501 (1950).

Wir versuchten deshalb, experimentelle Methoden für die Bestimmung von $\sigma(\theta)$ durch direkte Messung der Winkelverteilung gestreuter Neutronen an C^{12} zu entwickeln. (An C^{12} tritt besonders starke Anisotropie auf²⁾.)

Wir verwenden monochromatische Neutronen, erzeugt durch die $D(d,n)He^3$ -Reaktion (D_2O -Eisschicht von ungefähr $\frac{1}{4}$ -Sättigungsdicke mit 615 kV-Deuteronen beschossen), deren Energie E_n in bekannter Weise vom Winkel α abhängt (z. B.: $E_n = 3,67$ MeV für $\alpha = 0^\circ$; $E_n = 2,60$ MeV für $\alpha = 90^\circ$).

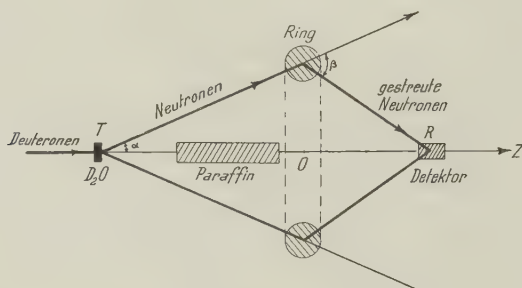


Fig. 1.

Anordnung für Winkelverteilungsmessungen mit Ringmethode.

Als Detektor und Monitor verwendeten wir Anthracenkristalle mit Photomultiplier³⁾.

Ein Grafitstreuer, als Ring ausgebildet*), steht mit seiner Symmetrieachse in Richtung der einfallenden Deuteronen (Fig. 1). So wird jedes Ringelement mit Neutronen derselben Energie bestrahlt. Zwischen Neutronenquelle und Detektor schirmt ein Paraffinzylinder (Transmissionsfaktor 0,02) direkte Neutronen ab. Die vom Ring gestreuten Neutronen treffen den Detektor unter dem von der Geometrie der Versuchsanordnung abhängigen Streuwinkel β . Wir verwendeten verschiedene Grafitringe mit mittleren Durchmesser zwischen 180 mm und 370 mm und mit Ringdicken von 27 mm bis 36 mm. Die konstante Neutronenenergie $E_n = 3,62$ MeV, um das hier untersuchte Niveau von 8,20 MeV in C^{13} zu erregen, erhielten wir durch entsprechende Wahl von E_D . Durch Verändern des Abstandes RO kann β zwischen 25° und 133° variiert werden.

²⁾ E. BALDINGER, P. HUBER, R. RICAMO und W. ZÜNTI, *Helv. Phys. Acta* **23**, 503 (1950).

³⁾ R. RICAMO, W. ZÜNTI, *Helv. Phys. Acta* **24**, 419 (1951).

*) Wir danken hier Herrn Direktor KIRMES von der Firma CECE-Graphitwerk AG., Zürich, für die uns überlassenen grossen Mengen reinen Graphits.

Die Intensität der im Laborsystem unter einem Winkel β gestreuten Neutronen wird gemessen als Differenz zwischen den Neutronenanzahlen mit und ohne Ring, dividiert durch den Raumwinkel, unter dem der Detektor vom Ring aus gesehen erscheint. Geeignete Experimente haben gezeigt, dass die Detektorempfindlichkeit von der Neutronenrichtung unabhängig ist. Die Kurve in Fig. 2 gibt die Intensität der gestreuten Neutronen im Schwerpunktsystem in willkürlichen Einheiten wieder. Sie enthält die

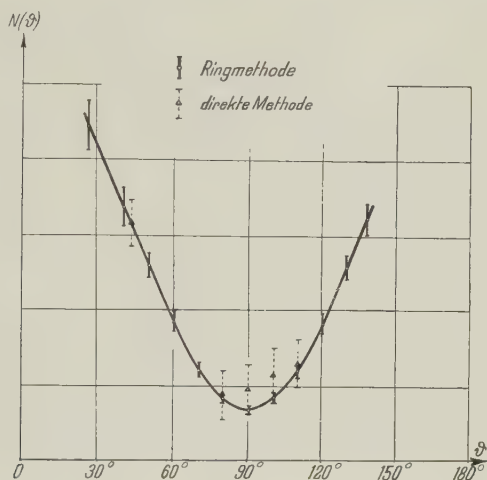


Fig. 2.

Intensität der an C^{12} gestreuten 3,62-MeV-Neutronen in Funktion des Winkels (Schwerpunktsystem).

Mittelwerte aus 20 Messreihen, wobei die eingetragenen Fehler die mittleren quadratischen Abweichungen einer einzelnen Messreihe darstellen.

Die „mit Ring“ gemessenen Neutronenzahlen sind 20–60% grösser als „ohne Ring“. Jede einzelne Messung ist auf 1% genau, so dass der Effekt mit 3–10% Genauigkeit bestimmt ist. Die Energie der an C^{12} unter 90° gestreuten Neutronen ist etwa 14% kleiner als diejenige der einfallenden Neutronen. Da unsere Detektoren etwas energieempfindlich sind, kann sich die ganze $\sigma(\theta)$ -Kurve deformieren, sofern nicht der in Fig. 2 der Arbeit³⁾ mit d bezeichnete energieunabhängige Arbeitspunkt gewählt wird. (Eine Änderung der Stossverstärkung um den Faktor 2 verursacht übrigens nur eine Änderung des Verhältnisses $\frac{\sigma(40^\circ)}{\sigma(90^\circ)}$ von höchstens 10%.)

Wir haben ferner versucht, die Streuung monochromatischer Neutronen statt an einem Ring an einem Graphitblock direkt zu messen (Fig. 3).

Für verschiedene Streuwinkel β wird die Neutronenintensität mit und ohne Graphitstreuer gemessen. Im günstigsten Fall (bei $\beta = 30^\circ$) beträgt der Effekt ca. 10%, somit entspricht 1% Messgenauigkeit bereits einem Fehler von 10%. Die Ringmethode ist also wegen ihrer grösseren Genauigkeit vorzuziehen.

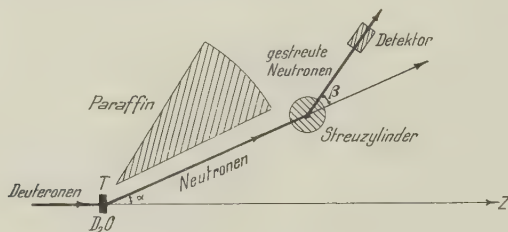


Fig. 3.

Anordnung für Winkelverteilungsmessungen mit der direkten Methode (abgeschirmter Detektor).

Die Genauigkeit sowohl der direkten als auch der Ringmethode ist durch den Neutronenuntergrund begrenzt. Der relative Untergrund in unserer Anlage ist nie besser als 10%.

Eine Verbesserung der Resultate ist möglich durch eine Koinzidenzanordnung, wobei ein Neutron durch 2 Detektoren registriert wird. Auf diese Weise ist eine Verbesserung des Effektes um den Faktor 3 zu erzielen. Entsprechende Messungen sind aber wegen der erforderlichen Messzeit wenig lohnend. Die Entwicklung von experimentellen Methoden zur Messung der Winkelverteilung ist aber wichtig, weil man so auch $\sigma(\vartheta)$ in Funktion des Azimutes φ bestimmen und auf diese Weise die Polarisation der D-D-Neutronen messen kann, wie VERDE⁴⁾ vorgeschlagen hat.

Die Messungen von σ_t und $\sigma(\vartheta)$ lassen durch Vergleich mit den nach den Theorien von WEISSKOPF⁵⁾ und BLOCH⁶⁾ berechneten Werten für das 8,20-MeV-Niveau von C^{13} auf ein $D_{3,2}$ -Niveau schliessen.

⁴⁾ M. VERDE, Nuovo Cimento **9**, 376 (1951).

⁵⁾ H. FESHACH, D. C. PEASLE und V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. **71**, 145 (1947).

⁶⁾ F. BLOCH, Phys. Rev. **58**, 829 (1940).

Kernphotospaltung am B^{11} und B^{10}

von O. ROCHAT und P. STOLL (ETH., Zürich).

GOWARD¹⁾, TITTERTON²⁾ und WILKINS haben mit Hilfe photographischer Platten folgende Reaktionen am Bor gefunden:

1. $B^{11} + h\nu \rightarrow H^3 + He^4 + He^4 \quad Q = 11,13 \text{ MeV}$
2. $B^{10} + h\nu \rightarrow H^2 + He^4 + He^4 \quad Q = 5,89 \text{ MeV}$
3. $B^{10} + h\nu \rightarrow H^1 + n^1 + 2 He^4 \quad Q = 8,05 \text{ MeV}$

Der Wirkungsquerschnitt²⁾ σ der Reaktion 2 weist zwischen 10 und 14 MeV ein Maximum auf. Daher eignet sich diese Reaktion für die Ausmessung der weichen Komponente³⁾ der Lithium-Gammastrahlung. Zusätzlich wollen wir durch eine umfangreichere Statistik einen Beitrag zur Abklärung des Reaktionsmechanismus der Photospaltung am Bor liefern.

a) Entwicklung von Platten mit Boreinlagerungen.

Wegen der bekannten alkalischen Wirkung von Borax sind diese Platten viel empfindlicher als gewöhnliche Emulsionen. Kodak-NTI-Platten sind mit Erfolg verwendet worden. Die Temperaturentwicklung mit Amidol bei einem pH-Wert von 7,6 gestattet die Unterscheidung der Spuren der Alphateilchen von denen, die einfach geladen sind. Diese Tatsache ermöglichte es, die fünfmal häufiger auftretenden Kohlenstoffsterne von den Borsternen zu unterscheiden.

b) Unterscheidung der Reaktionen am B^{11} und B^{10} .

Für die Trennung der möglichen Reaktionen, die sich am B^{10} wie B^{11} ereignen können, muss das Impulskriterium und die Energiebilanz (Spektrum der Lithium-Gammastrahlung) herangezogen werden. Im Histogramm Fig. 1 sind alle Sterne nach E_T (totale Energie des Sternes)-Werten aufgetragen, unter der Annahme, dass das einfach geladene Teilchen ein Triton sei. Das ausgeprägte Maximum in der Verteilung bei $E_T = 6,4 \text{ MeV}$ entspricht der $B^{11}(\gamma, T) 2\alpha$ -Reaktion, hervorgerufen durch die 17,6-MeV-Gammalinie.

Unter der schwarz ausgezogenen Linie (Fig. 1) befinden sich alle Sterne, die dem Impulskriterium genügen. Die punktierte Verteilung umfasst dagegen alle beobachteten Stern-Reaktionen. Die Exemplare, die sich rechts der ausgeprägten Spitze um den

¹⁾ F. K. GOWARD, E. W. TITTERTON und J. J. WILKINS, Proc. Soc. A **63**, 172 (1950).

²⁾ M. J. BRINKWORTH und E. W. TITTERTON, Phil. Mag. **17**, 1191 (1951).

³⁾ H. NABHOLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **25**, 153 (1952).

E_T -Wert von 9 MeV gruppieren, gehören zum Reaktionstypus $B^{10}(\gamma, D) 2\alpha$, hervorgerufen durch die 14,8-MeV-Komponente der Lithiumgammastrahlung. Der Abfall des Wirkungsquerschnittes von dieser Reaktion ersieht man aus der Tatsache, dass bei

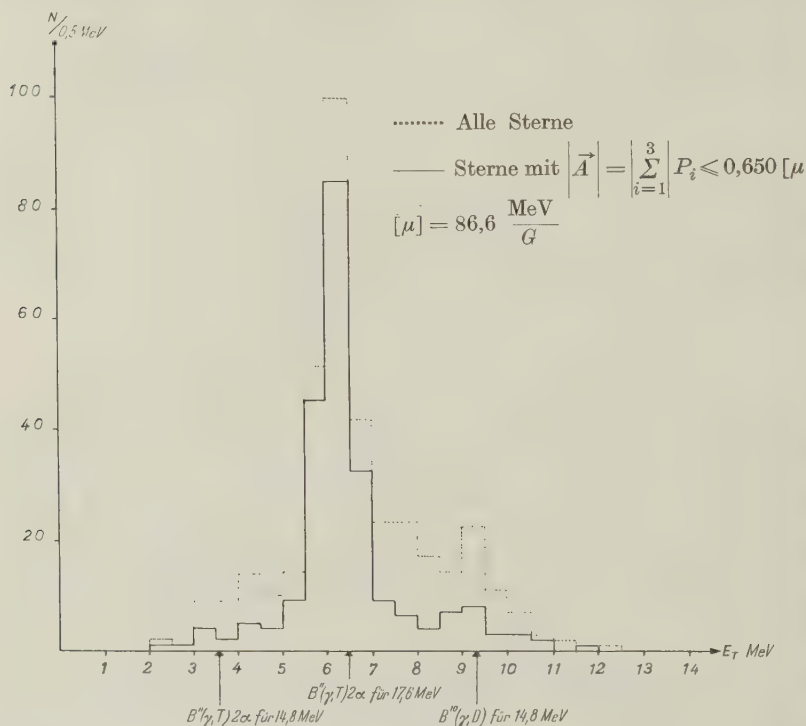


Fig. 1.

E_T -Verteilung von 374 Sternen. Die Energie der einfach geladenen Teilchen wird mit Hilfe der Reichweite-Energie-Beziehung für Tritonen berechnet.

$E_T = 11,7$ MeV keine Sterne der 17,6-MeV-Gammastrahlung entsprechend beobachtet werden. Die Sterne, die einen E_T -Wert zwischen 5,5 und 7,5 MeV aufweisen und dem Impulskriterium genügen, sind als B^{11} -Reaktionen der 17,6-MeV-Gammalinie zu betrachten (E_T theoretisch: $6,44 \pm 0,01$ MeV; E_T experimentell: $6,30 \pm 0,02$ MeV). Der relative Wirkungsquerschnitt in bezug auf die Kohlenstoffspaltung kann folgendermassen angegeben werden:

$$\frac{\sigma C^{12}(\gamma, 3\alpha) E_\gamma: 17,6 + 14,8 + 12,5 \text{ MeV}}{\sigma B^{11}(\gamma, T) 2\alpha E_\gamma: 17,6 \text{ MeV}} = 1,06 \pm 30\%*$$

*) $C^{12}(\gamma, 3\alpha)$ für Li- γ -Strahlung: $1,75 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$. Rel. Intensitäten: I(17,6): I(14,8): I(12,5) = 1:0,5:0,2. O. SEIPPEL, H. GLÄTTLI und P. STOLL, Helv. Phys. Acta (in Publikation).

Eine Abschätzung des Wirkungsquerschnittverlaufes der Reaktion 1 ergibt für das Verhältnis $\frac{\sigma_{(17,6)}}{\sigma_{(14,8)}} = 3,8 \pm 0,8$.

c) Die Energieverteilung der Tritonen. Anregungszustände im Be^8 .

Für diese Verteilung (Fig. 2) werden die Sterne benutzt, die obigen Bedingungen genügen.

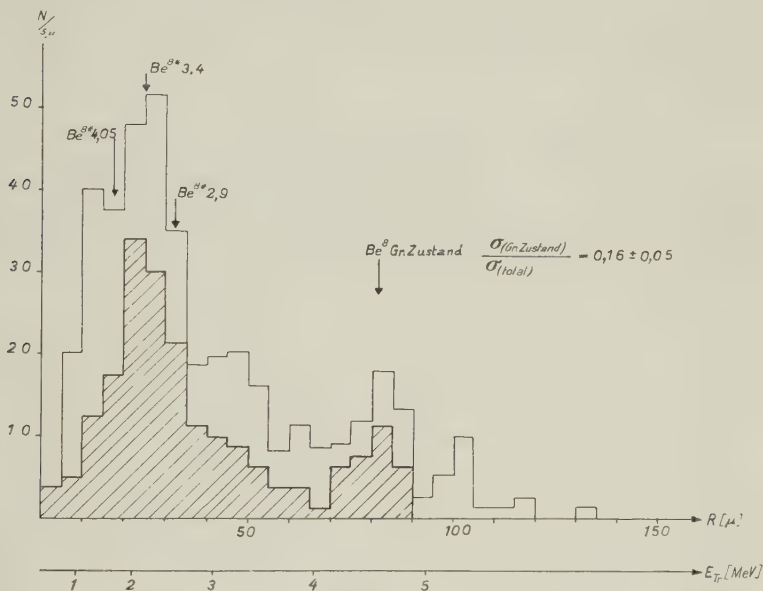


Fig. 2.

Reichweiteverteilung der einfach geladenen Teilchen.

a) Gestrichelte Fläche: Spuren von Tritonen, entsprechend $\text{B}^{11}(\gamma, T) 2\alpha$ -Reaktion für $E_\gamma = 17,6$ MeV. b) Totale Fläche: alle Spuren.

Die Gruppe von 79μ Reichweite ($4,61$ MeV) entspricht Übergängen in den Grundzustand des Be^8 . Bei einer Quantenenergie von $17,6$ MeV stellen 16% aller beobachteten Spaltungen Übergänge in den Grundzustand dar. Das Auffinden der 80μ langen Tritonen-Spuren mit den zwei kurzen Alphateilchen war nur durch sorgfältigste Beobachtung der Platten möglich. Eine zweite Gruppe, entsprechend einer Tritonenenergie von $2,15$ MeV, muss als Übergänge in ein Niveau im Be^8 von $3,4 \pm 0,2$ MeV mit einer maximalen Halbwertsweite von $\Gamma = 0,8$ MeV gedeutet werden. Die kontinuierliche Tritonenverteilung in diesem Energiegebiet (langsamer Abfall gegen 65μ) dürfte zu den Übergängen gehören, die in

⁴⁾ H. E. GOVE und J. A. HARVEY, Phys. Rev. **82**, 299, 658 (1951).

das bekannte 2,9-MeV-Niveau des Be^8 mit $\Gamma = 1,8$ MeV führen. Trotzdem Fig. 2 sehr gut mit der Annahme erklärt werden kann, dass neben dem Grundzustand auch höhere Niveaus im Be^8 angeregt werden (2,9; 3,4, evtl. 4,05 MeV), so kann folgender Reaktionsmechanismus nicht vollständig ausgeschlossen werden.



Eine Rechnung mit der Annahme eines Niveaus im Li^7 von 4,77 MeV⁴⁾ zeigt, dass höchstens 10% der Sterne in Fig. 2 diesem Übergang entsprechen könnten.

d) Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\text{B}^{10}(\gamma, D) 2\alpha$.

Aus der E_T -Verteilung obiger Reaktion (Fig. 3) (Auslese siehe Abschnitt b) ersieht man den Abfall des Wirkungsquerschnittes von 14,8 MeV auf 17,6 MeV Quantenenergie (Konkurrenzreaktion

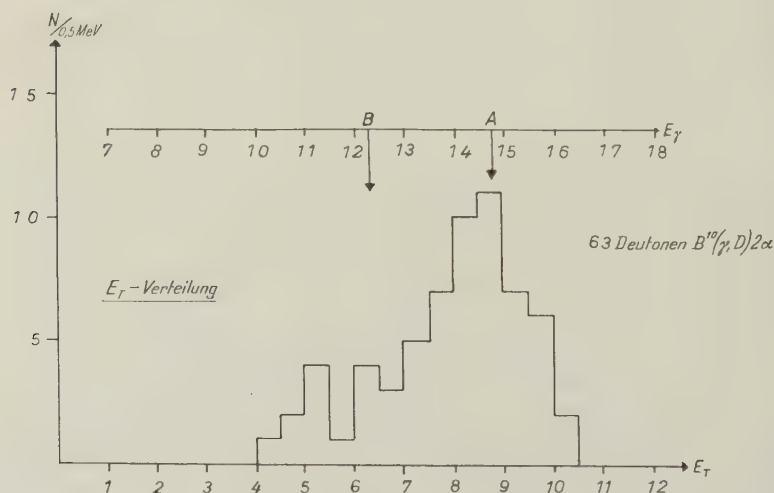


Fig. 3.

E_T -Verteilung von 63 Sternen der Reaktion $\text{B}^{10}(\gamma, D) 2\alpha$. Für die einfach geladenen Teilchen wird die Reichweite-Energiebeziehung für Deutonen benützt.

Gruppe A: $E_\gamma = 14,8$ MeV.

Gruppe B: $E_\gamma = 12,5$ MeV.

(γ, np)). Der Wirkungsquerschnitt der Gruppe A ($E_\gamma = 14,8$ MeV) beträgt $\sigma_{14,8} \approx 5 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$. Die Gruppe B rührt von der 12-MeV-Komponente³⁾ der Li-Gammastrahlung her.

Eine ausführliche Arbeit erscheint später in den Helv. Phys. Acta.

Die Winkelverteilung der Bor-Gammastrahlung. $B^{11} (p, \gamma) C^{12}$

von H. GLÄTTLI und P. STOLL (ETH., Zürich).

Das Spektrum dieser Gammastrahlung, die durch Einfang von Protonen am Bor (B^{11}) entsteht, ist durch Arbeiten mit Wilson-Kammern¹⁾ sowie mit Hilfe eines Paarspektrographen²⁾ ausgemes-

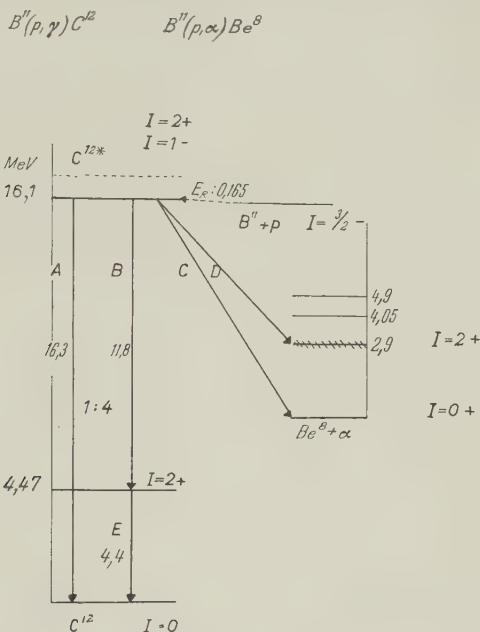


Fig. 1.
Zerfallsschema von C^{12*} .

A	$I_{\Theta} = I_{90^{\circ}} (1 + 0,03 \cos \Theta + 0,12 \cos^2 \Theta + 0,04 \cos^4 \Theta)$
E_p : 500 keV (dicke Target)	
AB	$I_{\Theta} = I_{90^{\circ}} (1 + 0,03 \cos \Theta + 0,12 \cos^2 \Theta + 0,04 \cos^4 \Theta)$

Variation.

	E_p keV	\star -Verteilung
A	150—500	keine
B	150—500	$Ja \quad I_{0^{\circ}}/I_{90^{\circ}}$ Min. ≈ 300 keV

¹⁾ W. A. FOWLER, E. R. GAERTNER und C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **53**, 628 (1938).

²⁾ R. L. WALKER, Phys. Rev. **79**, 172 (1950).

sen worden. Die Quantenenergien der drei Linien betragen 16,3, 11,8 und 4,4 MeV, wobei bei 500 keV Protonenenergie ein Intensitätsverhältnis $I_{16,1}/I_{11,8} = 1:4^2$) festgestellt wurde. Das Zerfallschema (Fig. 1) ergibt sich aus den gemessenen Quantenenergien; die Gamma-Gamma-Kaskade ist von uns durch Koinzidenzmessungen sichergestellt worden.

Durch die Ausmessung der Richtungsverteilung der emittierten Gammaquanten in bezug auf die Protoneneinfallsrichtung können Schlüsse über den Zustand des angeregten 16,3-MeV-Niveaus im C^{12} (Parität, Drehmoment) gezogen werden.

Die Winkelverteilungsmessungen wurden mit einer zweimal zweifachen Koinzidenzanordnung¹⁾ durchgeführt, die Variation von Absorber und Sekundärstrahler gestattet bei dieser Anordnung die Ansprechwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Komponenten der Bor-Gammastrahlung zu ändern. Als Target wurde eine dicke Borschicht benutzt.

Die 16,3-MeV-Gammakomponente kann getrennt von den andern Komponenten gemessen werden. Die Kurve (Fig. 2) legt es nahe, eine Zerlegung nach \cos , \cos^2 und \cos^4 -Termen durchzuführen.

$$E_\gamma: 16,3 \text{ MeV } E_p: 500 \text{ keV (dicke Target)}$$

$$I_{(\theta)} = I_{(90^\circ)} (1 + 0,03 \cos \theta + 0,12 \cos^2 \theta + 0,04 \cos^4 \theta).$$

Die 11,8-MeV-Gammakomponente lässt sich mit unseren Methoden nicht allein messen, da die 16,3-MeV-Gammalinie allerdings mit verminderter Ansprechwahrscheinlichkeit mitgezählt wird (Beitrag der 11,8-MeV-Linie: 15%).

Es kann eindeutig gesagt werden, dass innerhalb der Messgenauigkeit die Winkelverteilung der 16,3-MeV-Komponente *keine* Spannungsabhängigkeit zeigt (Variation E_p : 150–550 keV).

Dagegen variiert die Winkelverteilung der 11,8-MeV-Linie mit der Protonenbeschleunigungsspannung, das Verhältnis $I_{(0^\circ)}/I_{(90^\circ)}$ weist bei $E_p \approx 300$ keV ein Minimum auf, bei niedrigen Spannungen überwiegt der \cos -Term.

Das Verhalten der gemessenen Richtungsverteilungen in bezug auf die Änderungen der Protonenenergien lässt einige Schlüsse zu. Die Winkelverteilung der 16,3-MeV-Komponente (\cos^2 -Term) erklärt sich mit der Annahme, dass das hochangeregte C^{12*} -Niveau, das Anlass zu dieser γ -Strahlung gibt, ein Gesamtdrehmoment $J = 2$ mit gerader Parität aufweisen muss. Dieser Zustand kann

¹⁾ H. NABHOLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER, *Helv. Phys. Acta* **25**, 153 (1952).

beim Einfang einer P -Welle entstehen (der Übergang in den Grundzustand ($E_\gamma = 16,3$ MeV) ist daher ein elektrischer Quadrupol). Die 11,8-MeV-Komponente scheint aus einem Niveau mit Drehmoment 1 ungerader Parität ($J = 1 -$) zu kommen, es würde sich hier um einen S -Einfang der einfallenden Protonenwelle handeln. Die gemessene Winkelverteilung der 11,8-MeV-Komponente und ihre

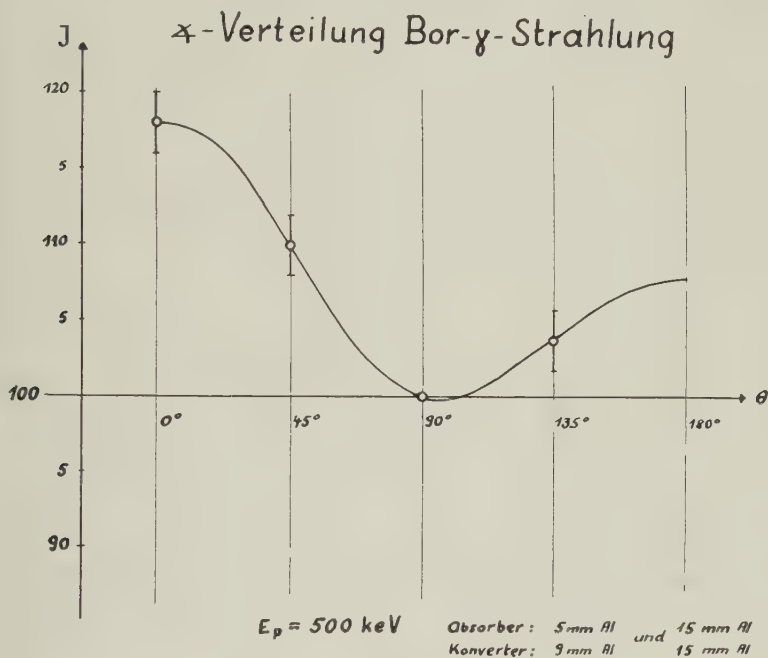


Fig. 2.

Winkelverteilung der 16,3- und 11,8-MeV-Komponenten der Borgammastrahlung (korrigierte Kurve auf Schwerpunktsystem und die durch den Dopplereffekt bedingte Empfindlichkeitsschwankung der Messanordnung).

Variation mit der Protonenspannung kann als Interferenzeffekt der beiden sich überlappenden Niveaus, in ähnlicher Weise wie es DEVONS¹⁾ für die Li-Gammastrahlung berechnet hat, gedeutet werden. Die Rechnung zeigt, dass ein Minimum für die Anisotropie existieren muss.

Das hochangeregte C^{12*} -Niveau mit $J = 2 +$ emittiert nicht nur die 16,3-MeV-Quanten, sondern soll noch in Alphateilchen, bei denen eine homogene Gruppe²⁾ (Übergang in den Grundzustand

¹⁾ S. DEVONS und M. G. N. HINE, Proc. Roy. Soc. A **199**, 73 (1949).

²⁾ H. A. BETHE, Rev. Mod. Phys. **9**, 217 (1937).

Be^8) und eine breite Gruppe (Übergang in das 2,9-MeV-Niveau des Be^8) festgestellt wurde, zerfallen ($\text{B}^{11}(\text{p}, \alpha) \text{Be}^8$). Gemäss dem Rotationsmodell für Alphateilchen wird dem Grundzustand im Be^8 ein $J = 0 +$ und dem 2,9-MeV-Niveau ein $J = 2 +$ Zustand zugeschrieben. Die homogene Gruppe (d -Welle) müsste eine Winkelverteilung der Form $1 + A(E)\cos^2 \Theta$ aufweisen, dagegen sollten die Alphateilchen, die in das breite Niveau des Be^8 gehen, isotrop emittiert werden, wenn es sich um eine reine s -Welle handelt.

Eine ältere Arbeit von WILLIAMS¹⁾ u. a. bestätigt diese Annahmen, im Gegensatz dazu stehen die Aussagen von JACOBS²⁾ u. a., die für beide Gruppen Isotropie finden. Aus diesen Gründen haben wir selbst mit (p, α) -Winkelverteilungsmessungen begonnen, um auch von dieser Seite aus eine befriedigende Zuordnung der hochangeregten Niveaus des C^{12} zu ermöglichen. Eine ausführliche Arbeit erscheint später in der *Helv. Phys. Acta*.

Catalyses de Relaxation Magnétique Nucléaire

par G. J. BÉNÉ, P. M. DENIS et R. C. EXTERMANN (Genève).

Nous donnons seulement quelques résultats provisoires sur des recherches en cours; les résultats détaillés feront l'objet d'une communication future.

1^o Effet du mouvement de l'échantillon sur les signaux de résonance magnétique nucléaire. Les temps apparents de relaxation sont considérablement diminués par le mouvement laminaire d'un échantillon liquide³⁾.

2^o Sur la suggestion de A. KASTLER⁴⁾ nous avons étudié la catalyse de la relaxation par le paramagnétisme d'états excités de substances fluorescentes. Une solution de fluorescéine dans la glycérine, soumise à la lumière d'une lampe à vapeur de mercure entre -60°C et $+20^\circ \text{C}$ n'a donné que des résultats négatifs. Cet échec semble dû à une durée de vie trop courte des états excités.

3^o Nous avons enfin étudié l'influence d'un fort champ électrique statique (20 Kv/cm) sur la résonance nucléaire des protons. On sait⁵⁾ que dans certains liquides fortement polaires (acétonitrile p. ex.)

¹⁾ J. H. WILLIAMS, R. O. HANBY und J. S. ALLEN, *Phys. Rev.* **55**, 140 (1939).

²⁾ J. A. JACOBS und W. L. WHITSON, *Phys. Rev.* **59**, 108 (1941).

³⁾ P. M. DENIS, G. J. BÉNÉ, R. C. EXTERMANN, *Archives des Sciences*, vol. 5, fasc. 1, 32 (1952).

⁴⁾ A. KASTLER, *Experientia* **8**, 1 (1952).

⁵⁾ E. N. da C. ANDRADE et C. DODD, *Proc. Roy. Soc. A* **187**, 296 (1946).

la viscosité est pratiquement doublée, ce qui devrait, s'il s'agissait d'une «vraie» viscosité, diminuer dans la même proportion les temps de relaxation. En fait, aucune variation de T_1 et T_2 supérieure à 5% n'a pu être mise en évidence. On en conclut que cette viscosité additionnelle, due à l'électrostriction, n'implique pas d'interaction de contact, mais qu'il s'agit plutôt du blocage de degrés de liberté par action à distance du champ électrique sur les dipôles électriques.

Spektrum einer Hochfrequenzionenquelle

von R. BUDDE und P. HUBER (Basel).

Die Ionenquelle, mit der die Messung ausgeführt wurde, ist im Schnitt in der Abbildung dargestellt. Das doppelwandige Glasgefäß ist aus Pyrex und wird mit Petroleum gekühlt. Die Ionen durchlaufen einen Magnesiumkanal von 4 mm Durchmesser und 12 mm Länge. Nachher werden sie weiter beschleunigt. Die Dimensionen der Ionenquelle und die Anordnung des Austrittskanals sind ähnlich wie bei der Ionenquelle, die von E. S. Shire, Cavendish Lab., Cambridge, benutzt wird.

Die Entladung wird durch ein hochfrequentes Magnetfeld von 25 MHz angeregt. Die aufgenommene Leistung betrug etwa 100 Watt. Zwei Permanentmagnete erzeugen ein schwaches transversales Magnetfeld, wodurch schon bei wesentlich kleinerem Druck, als es ohne Magnetfeld möglich ist, eine intensive Entladung entsteht.

Ionenart	Ionenstrom μA	Magnetstrom gemessen A	Magnetstrom berechnet A
$\text{H}_1^+ (\text{H}_3^+ \rightarrow \text{H}_1^+ + \text{H}_2)$	0,6	2,35	2,40
$\text{H}_1^+ (\text{H}_2^+ \rightarrow \text{H}_1^+ + \text{H}_1)$	2	2,90	2,93
H_3^{++}	< 0,1	3,55	3,58
$\text{H}_1^+; \text{H}_4^{++}; \text{H}_2^+ (\text{H}_4^+ \rightarrow \text{H}_2^+ + \text{H}_2)$	40 (69%)	4,15	
$\text{H}_2^+ (\text{H}_3^+ \rightarrow \text{H}_2^+ + \text{H}_1)$	$\sim 0,1$	4,80	4,80
H_2^+	11	5,85	5,86
H_3^+	4	7,1	7,18
H_4^+	< 0,1	8,3	8,3

Die Ionen wurden durch eine Spannung von 5 kV zwischen der Wolframelektrode und dem Kanal aus der Entladung herausgezogen, dann mit 100 kV beschleunigt und trafen nach Durchlaufen eines Magnetfeldes in den Faradaykäfig. Die Distanz zwischen Kanal und Faradaykäfig betrug etwa 1,80 m.

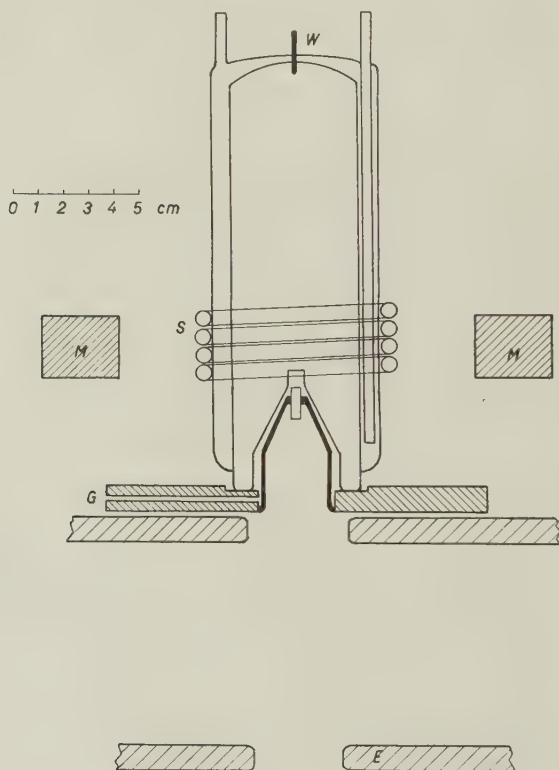


Fig. 1.

Schnitt durch die Ionenquelle. *M* = Permanentmagnete, *W* = Wolframelektrode, *S* = Spule zur Erzeugung des Hochfrequenzfeldes, *G* = Gaseinlass, *E* = Nachbeschleunigungselektrode auf Erdpotential. Die Ionenquelle selbst befand sich auf +100 kV.

Die einzelnen Ionenarten der Wasserstoff-Entladung haben wir mit dem Faradaykäfig gemessen. Diese Messung wurde kontrolliert und ergänzt durch die Untersuchung des Ionenstrahls mit einem Quarz. Lässt man Ionen auf einen Quarz treffen, so leuchtet dieser bekanntlich an den getroffenen Stellen auf, und aus der Intensität des Leuchtens kann man grössenordnungsmässig auf den Ionenstrom schliessen. Diese qualitative Methode ist empfindlicher als

die Messung mit dem Faradaykäfig. Es wurden auf diese Weise ausser den mit dem Faradaykäfig gefundenen Ionengruppen noch zwei weitere gefunden, die dort nicht bemerkt worden waren. Die Resultate zeigt die Tabelle. In der ersten Spalte steht die Ionenart und, soweit erforderlich, ihre Entstehungsweise. Die H_4^{++} -Ionen sowie die durch Zerfall der H_4^+ -Ionen entstehenden H_3^+ -Ionen fallen mit den Protonen zusammen, geben aber wegen des kleinen Anteils an H_4^+ -Ionen wohl keinen messbaren Beitrag zum Protonenstrom. Die zweite Spalte zeigt den gemessenen Ionenstrom, wobei der Anteil an H_3^{++} - und H_4^+ -Ionen auf Grund einer Messung mit dem Quarz geschätzt wurde. Die dritte Spalte bringt den Strom in dem Elektromagneten, mit dem die Ionen abgelenkt und analysiert wurden. In der vierten Spalte sind die berechneten Magnetströme zur Kontrolle aufgeführt, unter der Voraussetzung, dass der Strom im Magneten dem Magnetfeld proportional ist. Die berechneten Werte wurden an den Magnetstrom für die Protonen angeschlossen.

Die Zerfallsreihe $Mn^{51}-Cr^{51}-V^{51}$ und der Spin der Mn-Isotope

von D. MAEDER, P. PREISWERK und A. STEINEMANN (ETH., Zürich).

Nach dem Schalenmodell der Atomkerne ist für das Isotop V^{51} kein isomeres Niveau mit grosser Drehimpulsdifferenz gegenüber dem Grundzustand zu erwarten. Mit dieser Erwartung standen jedoch die bisherigen experimentellen Daten in Widerspruch: dem V^{51} wurde, neben einer 320-keV- γ -Strahlung niedriger Multipolordnung, ein Übergang mit hoher Drehimpulsdifferenz, nämlich ein vollständig konvertierter Übergang von 237 keV Energie zugeordnet¹⁾. Wir konnten diese Diskrepanz aufklären:

Die vermeintliche Konversionslinie des isomeren Überganges erwies sich in Wirklichkeit als Photolinie, ausgelöst von der 320-keV-Strahlung in Blei, welches in den zitierten Arbeiten als Träger-substanz bei der chemischen Abtrennung des Cr verwendet worden war²⁾. Das korrigierte Zerfallsschema enthält also nur noch *ein* Anregungsniveau des V^{51} .

Um über die Spinwerte Auskunft zu erhalten, bestimmten wir den Konversionskoeffizienten des 320-keV-Überganges und das Verzweungsverhältnis der Übergänge vom Cr nach dem Grundzustand und dem angeregten Zustand des V^{51} . Der Konversions-

¹⁾ BRADT et al., *Helv. Phys. Acta* **18**, 259 (1945); KERN, MITCHELL und ZAFARANO, *Phys. Rev.* **76**, 94 (1949).

²⁾ Unabhängig von uns hat M. GOLDBABER dieselbe Erklärung vermutet.

koeffizient beträgt $\alpha_k = 1,5 \cdot 10^{-3}$ und entspricht magnetischer Dipolstrahlung. Die Bestimmung des Verzweigungsverhältnisses erfordert, da der Zerfall nur durch Elektroneneinfang erfolgt, die Kenntnis der Anzahl emittierter γ -Quanten und Röntgenquanten pro Zerfall. Von ein und demselben Präparat haben wir diese beiden Strahlungen absolut bestimmt, und zwar die γ -Strahlung mit dem NaJ-Szintillationsspektrometer. Die Absolutintensität der Röntgenstrahlung bestimmten wir ebenfalls mit Hilfe eines Impulsspektrographen, an den diesmal ein Methan-Argon-gefülltes Proportionalzählrohr angeschlossen war. Unter Berücksichtigung der Fluoreszenzausbeute ergibt sich aus diesen Messungen, dass 21% der Zerfälle über das angeregte Niveau führen. Aus den partiellen Zerfallswahrscheinlichkeiten und der bekannten Zerfallsenergie folgt, dass beide Übergänge zur Kategorie der erlaubten Übergänge gehören. In Übereinstimmung mit dem Konversionskoeffizienten zeigt auch dieses Ergebnis, dass die Spindifferenz der beiden V^{51} -Zustände höchstens 1 betragen kann.

Es ist interessant, dieses Zerfallsschema im Zusammenhang mit den Spinwerten der Mn- und Cr-Isotope zu betrachten. Bekanntlich hat das stabile Mn^{55} den Spin $5/2$, während Kerne mit ungeraden Protonenzahlen zwischen 21 und 27 sonst den Spin $7/2$ haben und hierin dem strengen Einteilchenschalenmodell entsprechen. Man erklärt diesen anomalen Spin durch die Annahme, dass die drei Protonenlöcher der $1f_{7/2}$ -Schale durch Orientierung zu einem Term mit der Spinresultante $5/2$ kombinieren.

Im V^{51} sind — ausser dem Kernrumpf — drei Protonen der $1f_{7/2}$ -Schale vorhanden. Diese kombinieren hier aber in ihrem Grundzustand zu einem $7/2$ -Term. Das nur 320 keV über dem Grundzustand liegende Anregungsniveau hat nach unserem experimentellen Befund einen Drehimpuls zwischen $5/2$ und $9/2$ und gleiche Parität wie der Grundzustand. Es kann sich bei diesem Anregungszustand nicht um eine andere Konfiguration als die des Grundzustandes handeln, da sonst die Energiedifferenz wesentlich grösser sein müsste. Dies kann man am Beispiel des Cr^{51} sehen: dort ist in der $f_{7,2}$ -Schale ein Neutronenloch vorhanden, die Grundkonfiguration ist also nicht entartet. In der Tat liegt das tiefste Anregungsniveau des Cr^{51} mit Spin zwischen $5/2$ und $9/2$ 1,4 MeV über dem Grundzustand, wie aus Untersuchungen der β^+ -Umwandlung von Mn^{51} in Cr^{51} hervorgeht¹⁾.

Beim V^{51} , wo die Energiedifferenz nur 320 keV beträgt, ordnen wir darum beide Terme der Konfiguration dreier Nukleonen in der

¹⁾ MUKHERJEE und PICTET, unveröffentlicht.

$f_{7/2}$ -Schale zu. Da diese Konfigurationsaufspaltung sich als so klein erweist, kann man zunächst die Reihenfolge der $7/2$ - und $5/2$ -Terme als mehr oder weniger zufällig betrachten. Es wäre auch denkbar, dass der Konfigurationsterm mit resultierendem Spin $5/2$ von dem weiter oben gelegenen $f_{5/2}$ -Einteilchenterm her gestört wird, und zwar bei 3 vorhandenen Löchern (also 5 Teilchen) mehr als bei 3 vorhandenen Teilchen. So könnte im Mn der $5/2$ -Zustand zum Grundzustand werden, während er im V^{51} mit dem ersten Anregungsniveau zu identifizieren wäre.

Ein Szintillationszähler für Alphateilchen. Impulsverteilung für 4,8 MeV Alphateilchen in Anthrazen

von P. BENER (Zürich).

Fallen monoenergetische Teilchen auf den Kristall eines Szintillationszählers, so beobachtet man am Ausgang des Multipliers nicht eine einheitliche Impulsgrösse, sondern eine Impulsverteilung, denn die Anzahl der Photoelektronen, welche pro Teilchen auf der Photokathode ausgelöst werden, sowie die Verstärkung des Multipliers sind statistischen Schwankungen unterworfen. Soll der Szintillationszähler zur Bestimmung von Teilchenenergien dienen, so ist eine möglichst enge Impulsverteilung erwünscht. Während die Impulse von Elektronen und Protonen in Anthrazen keine anormale Streuung aufweisen, erhielt P. R. BELL¹⁾ für Alphateilchen des Poloniums in Anthrazen eine sehr breite Impulsverteilung (Fig. 1, Kurve B). Eine viel engere Verteilung ergab sich mit der folgenden Anordnung:

Kanalisierte Alphateilchen eines Poloniumpräparats fallen mit einer Restenergie von 4,8 MeV auf die Oberfläche eines Anthrazen-kristalls ($17 \times 17 \times 3$ mm), der mit gutem Lichtkontakt auf dem Fenster eines Multipliers Nr. 5819 aufsitzt. Die Impulse wurden über einen Impulsverstärker auf den Diskriminatoreingang eines Untersetzers gegeben. Gemessen wurde zunächst die integrale Impulsverteilung. Nach Abzug des Backgrounds ergab sich durch Differenzieren der integralen Kurve die differentielle Impulsverteilung Fig. 1, Kurve A.

Es bedeute n die Anzahl der Photoelektronen, welche pro Alphateilchen auf der Photokathode ausgelöst werden, \bar{n} den Mittelwert von n , g die Verstärkung des Multipliers, δ_n^2 und δ_g^2 die mittleren

¹⁾ P. R. BELL, Phys. Rev. **73**, 1405 (1948).

relativen Schwankungsquadrate von n und g . Dann gilt für die Streuung der Impulsgrösse unabhängig von der statistischen Verteilung von n und g :

$$\delta^2 = \delta_n^2 + \frac{1}{n} \delta_g^2.$$

Im beschriebenen Versuch betragen $\bar{n} = 128$, $\delta_n^2 = 1/\bar{n} = 0,0078$ und $\delta_g^2 = 0,83$ (bestimmt aus der Impulsverteilung bei schwacher Beleuchtung der Photokathode). Nach dieser Formel ist eine

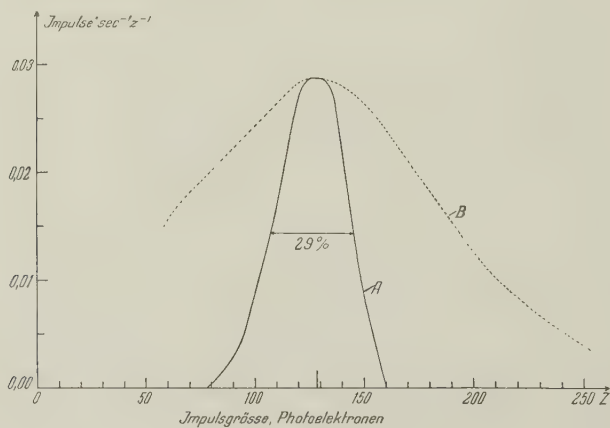


Fig. 1.

Differentielle Impulsverteilung von Alphateilchen des Poloniums in Anthrazen.

Kurve A: Eigene Messung.

Kurve B: Erhalten durch Differenzieren der integralen Kurve nach P. R. BELL (loc. cit.), in relativem Mass.

Streuung von $\delta = 0,12$ zu erwarten. Die beobachtete Streuung ergibt sich aus Kurve A in Übereinstimmung mit diesem Wert ebenfalls zu $\delta = 0,12$. Mit breiteren Impulsverteilungen ist zu rechnen, wenn die mittlere Anzahl \bar{n} der Photoelektronen pro Teilchen z. B. infolge schlechter Lichtsammlung kleiner wird, oder falls die Ausbeute der Fluoreszenzstrahlung an Photonen pro Teilchen und damit auch die Grösse n eine grössere als normale Streuung aufweist. Die von BELL beobachtete Impulsverteilung besitzt eine Halbwertsbreite von ca. 100%. Wahrscheinlich haben in diesem Fall beide der erwähnten Ursachen zur Verbreiterung der Verteilung beigetragen. In diesem Zusammenhang ist zu beachten, dass der von BELL benutzte Multiplier Nr. IP 21 keine so gute Lichtsammlung erlaubt, wie der Multiplier Nr. 5819.

Die Linienform monochromatischer γ -Strahlungen im Szintillationsspektrographen

von D. MAEDER (ETH., Zürich) und V. WINTERSTEIGER (Inst. f. Phys., Belgrad)*).

Mit Hilfe eines NaI-Szintillationskristalls, dessen Lichtblitze in einem Impulsspektrographen nach ihrer Energie geordnet registriert werden, lassen sich komplexe¹⁾ oder selbst kontinuierliche²⁾ γ -Spektren analysieren. Dabei wirken sich sowohl der Abfall der Ansprechwahrscheinlichkeit als auch die Zunahme der Linienbreite dahin aus, dass die härteren Komponenten zunächst meist viel schwächer erscheinen als die weichen. Die Tatsache, dass man diese Intensitätsverhältnisse durch Absorber leicht umkehren kann, ist für die Zerlegung eines komplexen Spektrums oft von grossem Nutzen, da sich so auch die Energien nahe beieinanderliegender Komponenten recht genau bestimmen lassen. Um auch hinsichtlich der Intensitäten zu einer quantitativen Zerlegung zu gelangen, muss man die Linienform der einzelnen monochromatischen Komponente kennen; diese hängt aber infolge von Sekundäreffekten wesentlich von der Geometrie des Kristalls und der γ -Strahlenquelle ab. Unter Zugrundelegung einfacher geometrischer Bedingungen (zylindrischer Kristall, Länge L = Radius R , Einstrahlung nur in der Zylinderachse) haben wir die Sekundäreffekte für primäre Quantenenergien von 0,1–1 MeV berechnet.

Unser Rechenverfahren beginnt bei zwei leicht zu berechnenden Extremfällen: (1) Der *Primäreffekt* umfasst einerseits Photo-Absorptionsprozesse (Elektronenenergie $\approx h\nu$), deren Häufigkeit aus den Tabellen von VICTOREEN³⁾ zu berechnen ist, andererseits *einfache Compton-Streuungen*, für welche die Formel von KLEIN-NISHINA⁴⁾ gilt (Elektronen mit Energien von 0 bis $(h\nu)^2/(h\nu + \frac{1}{2}mc^2)$). Die Impulsamplituden sind jeweils proportional der umgesetzten Elektronenenergie. (2) Die Annahme, dass *alle Streuquanten* im Kristall vollständig *absorbiert* würden, führt zum Verschwinden der Compton-Verteilung und liefert dafür eine Photospitze der Intensität $1 - e^{-\mu L}$ (μ = totaler Absorptionskoeffizient der Primärstrahlung).

In den beiden Fällen (1) und (2) werden die Beiträge der Sekundäreffekte unter- bzw. überschätzt. Um die Sekundäreffekte

*) Zurzeit an der ETH., Zürich.

¹⁾ R. HOFSTADTER and J. A. MCINTYRE, Phys. Rev. **80**, 631 (1950).

²⁾ D. MAEDER und P. PREISWERK, Helv. Phys. Acta **24**, 625 (1951).

³⁾ J. A. VICTOREEN, J. Appl. Phys. **20**, 1141 (1949).

⁴⁾ Siehe z. B. W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Chap. III, § 16 (Oxford University Press 1944).

schärfer einzugrenzen, berechnen wir zunächst die Absorptionswahrscheinlichkeit für die Streuquanten bei festgehaltenem Streuwinkel ϑ als Funktion des Entstehungsortes im Kristall. Durch Multiplikation mit der Anzahl primärer Streuprozesse und Integration über die Kristalllänge ergibt sich die Anzahl absorbierter Streuquanten, deren Energie $h\nu'$ einem bestimmten ϑ -Intervall entspricht.

Die Beiträge dieser Sekundärquanten an die Vergrößerung der primären Impulsamplituden lassen sich nun mittels (1) bzw. (2) abschätzen: (1') Die Rechenvorschrift (1), angewandt auf einfallende Quanten der Energie $h\nu'$, liefert eine breite Verteilung der Amplitudenzusätze und somit eine teilweise Auffüllung der Lücke zwischen Photospitze und Compton-Verteilung. Dabei ist die Absorption tertiärer Quanten vernachlässigt.

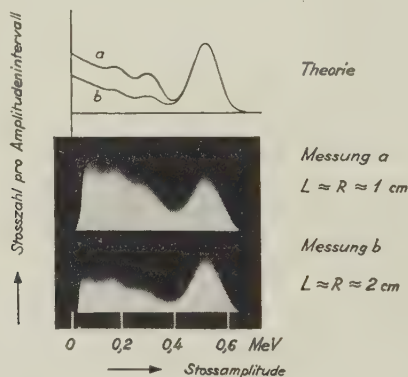


Fig. 1.

Einfluss der Kristallgrösse auf die Amplitudenverteilung bei der Messung von 511 keV-Quanten mit dem NaI-Szintillationspektrograph.

(2') Analog zu (2) ergäben sich bei vollständiger Absorption aller tertiären Quanten im Kristall ausschliesslich Beiträge an die Photospitze.

Die zu verschiedenen ϑ -Werten berechneten Beiträge (1'), (2') werden, soweit sie zur gleichen Impulsamplitude führen, jeweils summiert, wodurch man eine obere bzw. untere Schranke der durch die Sekundäreffekte modifizierten Compton-Verteilung erhält (tertiäre Effekte unter- bzw. überschätzt). Sind diese Schrankenfunktionen für alle γ -Energien berechnet, so kann man sie an Stelle der ursprünglichen Annahmen (1), (2) einsetzen und das ganze Verfahren wiederholen. Auf diese Weise erhält man verbesserte Schranken, welche gegen die wahre Linienform konvergieren.

Unter Berücksichtigung der statistischen Schwankungen der Impulsamplituden stimmen die theoretischen Linienformen (Fig. 1, oben) gut mit den experimentellen überein, wie der Vergleich mit photographisch aufgenommenen Impulsspektrogrammen (Fig. 1, unten) für zwei verschiedene Kristallgrößen bei $h\nu = 511$ keV zeigt. Wir haben solche Verteilungen auch bei anderen Energien und für alle Kristallgrößen berechnet. Als summarische Übersicht über den ungefähren Verlauf dieser Kurven zeigt Fig. 2 den relati-

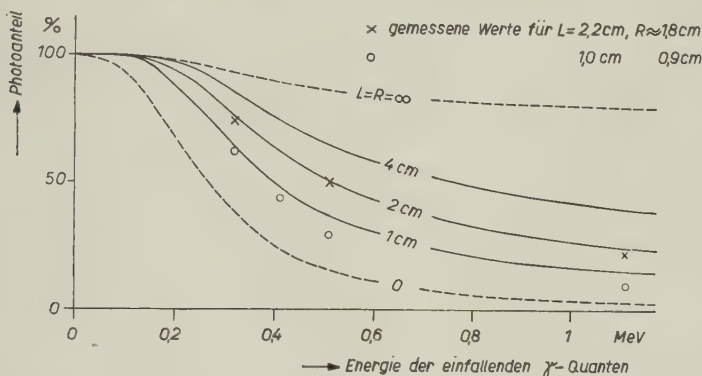


Fig. 2.

Theoretisches Verhältnis der Photospitze zum Gesamteffekt für zylindrische NaI-Kristalle (Länge L = Radius R) bei Einstrahlung in der Zylinderachse.

ven Photoanteil des jeweiligen Gesamteffektes. Die experimentellen Werte für kleine Kristalle (1 cm) liegen, wegen ungenügender Realisierung der vorausgesetzten idealen Geometrie, zwischen der zugehörigen theoretischen Kurve und der durch den Grenzfall des verschwindend kleinen Kristalls gegebenen unteren Schranke. Dagegen fallen die Messpunkte für Kristalldicke 2 cm sehr gut auf die berechnete Kurve.

Die ausführliche Arbeit erscheint in den *Helv. Phys. Acta*.

Absolutwerte der Arbeit pro Ionenpaar von Po- α -Teilchen in den Gasen He, N₂, A, O₂, CO₂

VON W. HAEERLI, P. HUBER und E. BALDINGER (Basel).

Die experimentelle Bestimmung der Arbeit pro Ionenpaar erfolgte, indem die Amplituden der Ionisationskammerimpulse mit Hilfe eines Impulsverstärkers und eines Impulsspektrographen¹⁾

¹⁾ D. MAEDER, *Helv. Phys. Acta* **20**, 139 (1947).

mit Eichladungen verglichen wurden, welche besser als 2^0_{00} bekannt sind. Das Frequenzband des Verstärkers ist nach oben und unten durch je ein RC-Glied gleicher Zeitkonstante τ_0 begrenzt. Die Impulshöhe am Ausgang des Verstärkers wurde bei verschiedenen Drucken in Abhängigkeit der Feldstärke bei zwei Verstärkereinstellungen ($\tau_0 = 1,68 \cdot 10^{-3}$ sec und $\tau_0 = 3,4 \cdot 10^{-3}$ sec) gemessen.

Die Ladungseichung erfolgt mit δ -Stößen. Wird die Sammelzeit der Ionen vergleichbar mit der Zeitkonstante des Verstärkers, so wird die Ausgangsamplitude kleiner als diejenige eines δ -Stosses gleicher Ladung (ballistisches Defizit). Das auf Grund des gegebenen Frequenzbandes des Verstärkers gerechnete ballistische Defizit stimmt gut mit den gemessenen Werten überein. Die entsprechend korrigierten Amplituden sind nicht mehr abhängig von der Zeitkonstante des Verstärkers.

Um den Sättigungswert der Ladung zu bestimmen, wird die reziproke Ladung in Abhängigkeit der reziproken Feldstärke aufgetragen. Nach der Theorie von JAFFÉ¹⁾ erwartet man bei genügend hoher Feldstärke eine Gerade. Die Messungen zeigen bei allen Gasen einen hinreichenden Bereich linearer Abhängigkeit, so dass die Sättigungskurven gut extrapoliert werden können. Der so gemessene Sättigungswert erweist sich als druckunabhängig. Nur bei CO_2 wächst die durch lineare Extrapolation bestimmte Sättigungsladung im gemessenen Gebiet von 1,8–5 ata mit wachsendem Druck um 3%.

Tabelle 1.

	Reinheit in %	Arbeit pro Ionenpaar in eV
He	96	30,86
A	99,7	26,25
N ₂	99,9	36,30
O ₂	98,5	32,17
CO ₂	99,8	33,5

In Tabelle 1 ist die Arbeit pro Ionenpaar und die Reinheit der verwendeten Gase angegeben. Der Fehler ist bei CO_2 etwa 2%, bei allen anderen Gasen kleiner als 0,5%. Zur Gasanalyse wurde ein Massenspektrograph verwendet.

¹⁾ G. JAFFÉ, Ann. d. Phys. **42**, 303 (1913).

Scintillations de luminescence dans les iodures d'alcéolins.

par J. BONANOMI et J. ROSSEL (Neuchâtel).

Un compte rendu détaillé paraîtra très prochainement dans *Helv. Phys. Acta*.

Mesures magnétogalvaniques et champs radiaux

par A. PERRIER (Lausanne).

1⁰ Les champs magnétiques appliqués à des courants dans les nombreuses recherches sur leurs effets transversaux ont toujours été pratiquement *uniformes*. L'auteur a signalé, il y a longtemps déjà, l'intérêt théorique qu'il y aurait à opérer avec des échantillons cylindriques soumis à des *champs à lignes de force radiales*¹⁾.

Il avait construit, à cette occasion, un électro-aimant à transformations multiples pouvant produire de deux manières de tels champs²⁾.

On montre ici, par l'exemple de quelques procédés inédits, comment l'on peut faire correspondre assez généralement à chaque technique utilisable en champs à lignes de force parallèles une autre, corrélative, mais pour cette autre répartition de champ. De plus, cette dernière offre, au moins en principe, une latitude de variantes sensiblement plus large.

2⁰ *Effets magnétogalvaniques* (type HALL). La méthode proposée récemment par l'auteur³⁾ se transpose facilement dans ces nouvelles conditions. Le double disque élémentaire devient ici une paire de cylindres à paroi mince, coaxiaux et séparés par une pellicule isolante; l'un est continu, l'autre divisé par un certain nombre de coupures parallèles aux génératrices. Un groupe de paires semblables sont emboîtées les unes dans les autres, puis connectées en série par leurs pourtours opposés alternativement. L'assemblage ainsi réalisé est logé coaxialement dans un *entrefer cylindrique*, siège du *champ radial*.

Par *induction*, on provoque dans les cylindres compacts des nappes de courants à lignes circulaires, cependant que les autres cylin-

1) A. PERRIER, Principe de méthodes de mesure d'effets galvanomagnétiques et thermomagnétiques à circuit transversal fermé, *Helv. Phys. Acta* **1**, 463 (1928). Des modalités reprises ici ont déjà été proposées à cette époque par l'auteur, mais dans un cadre moins général et sans l'amplification en série.

2) A. PERRIER, Sur un électro-aimant de laboratoire à transformations multiples, *Helv. Phys. Acta* **1**, 457 (1928).

3) Séance de Lucerne de la S.S.P., *Helv. Phys. Acta* **24**, 637 (1951).

dres en demeurent exempts en raison des coupures. Toutes les conditions sont alors remplies pour l'apparition, dans les cylindres non incisés, de forces électromotrices (ou de courants de HALL) parallèles aux génératrices, et tous dans le même sens.

Par l'entremise des autres cylindres, il se constitue une pile d'éléments en série que l'on n'a plus qu'à fermer sur un circuit extérieur de mesure.

Or, grâce au type d'entrefer choisi, il est loisible de faire agir de diverses manières des variations inductives de flux: par intervention d'un courant dans une bobine coaxiale, par une légère variation de courant dans l'électro-aimant, ou même encore par une *translation de tout le système* parallèlement à l'axe de symétrie. Et, bien étendu, chacun de ces divers modes d'induction peut être appliqué ou en percussions discrètes ou en variations périodiques sinusoïdales, corrélativement les mesures seront ou balistiques ou par moyennes sur instruments convenables.

3° *Permutation du courant longitudinal et des effets transversaux.* Le dispositif décrit se prête à d'autres modes encore d'opérer et de mesurer.

Le circuit de mesure suivait ci-dessus les génératrices des cylindres; faisons-en cette fois le circuit du courant *cause*; de plus, ne lui donnons plus une origine inductive, mais entretenons-le par une source extérieure: les f. e. m. (courants) HALL se manifestent alors suivant des *cercles parallèles*. On pourrait les mesurer par induction (à vrai dire malaisément), mais il existe une possibilité toute différente, importante sinon facile: la nappe de courant causée par le champ H , origine des effets rotationnels, est l'objet de forces de LAPLACE-LORENTZ de la part de ce même champ. Toutes ces forces sont parallèles à l'axe et leur résultante (ici somme simple) F peut être mesurée.

Un raisonnement, élémentaire dans ce cas, conduit à l'expression remarquable suivante du paramètre rotationnel le plus caractéristique.

$$\operatorname{tg} \varphi = F/IHh$$

I = Intensité du courant longitudinal; H = Champ magnétique;
 h = Hauteur totale de l'ensemble des cylindres compacts.

Les dimensions géométriques autres que la hauteur (diamètre, épaisseur), disparaissent entièrement, de même que tout potentiel.

4° *Effets en présence d'un gradient thermique.* Le champ radial permet ici deux réalisations d'une remarquable simplicité de principe, savoir:

a) La corrélatrice du conducteur hélicoïdal dans le champ uniforme, soit un ruban métallique recouvert sur une face d'un film

isolant est *enroulé*, et le cylindre creux ainsi constitué est introduit dans l'entrefer toroïdal, coaxialement cela va de soi; on établira ensuite le gradient thermique *suivant les génératrices*. On doit pouvoir ainsi arriver sans peine à des longueurs transversales de l'ordre du mètre, c'est-à-dire multiplier les intensités d'effets dans la proportion de plusieurs dizaines de fois par rapport à la méthode classique.

b) Correspondante de la *mesure électromécanique* ci-dessus de l'effet HALL.

Un cylindre creux, sans aucune incision, est disposé dans un champ radial avec un gradient thermique suivant ses génératrices; la nappe de courants circulaires qui alors s'établit en régime permanent est soumise à la force de LAPLACE-LORENTZ.

$$F = 2 \pi Q r h e H^2 \text{ gradt}/\varrho$$

Q = coeff. v. ETTINGSHAUSEN-NERNST; r, h, e = dimensions; ϱ = résistivité.

que l'on peut mesurer directement.

Les procédés esquissés sont adaptables à des degrés variables selon les conditions imposées. C'est ainsi que les échantillons ferromagnétiques ne sauraient guère admettre une mesure mécanique, que l'entrefer toroïdal ne conviendrait pas à des recherches à basses températures. En contrepartie, le champ radial sera précieux pour des déterminations absolues de constantes, lesquelles font singulièrement défaut; et enfin, les voies ouvertes, de multiplier les effets par la série, font espérer la mesure quantitative exacte des phénomènes faibles, les plus nombreux.

Note additionnelle: La brièveté du temps accordé pour les communications orales a contraint de choisir entre les procédés possibles. Les principes expérimentaux proposés en impliquent d'autres par la variété de leurs combinaisons. Ces principes sont donc pour l'essentiel: la production du courant principal directement par induction dans les lames d'essai, le façonnage en grille de la moitié des lames, l'application de champs magnétiques à lignes de force radiales, la permutable enfin du circuit principal et du circuit de mesure. Deux modes de procéder encore pourraient présenter de sérieux avantages.

a) La lame d'essai, plane et rectangulaire cette fois comme dans les procédés traditionnels, est fermée transversalement (direction y) et sur toute sa longueur par des conducteurs identiques de forte section et de même nature si possible. Ces conducteurs sont séparés par un faible espace isolant; c'est en somme, pratiquement, une fermeture transversale par courts-circuits séparés; mais de plus ces fermetures doivent enlacer avec la lame une surface relativement grande.

On opérera alors ainsi: le système ainsi formé est placé dans un champ magnétique uniforme, la lame lui étant normale. Par un moyen approprié, on provoque une variation de flux normale au champ rotationnel; on induit de la sorte une nappe de courant transversale à la lame (le primaire) et on observe l'effet HALL longitudinalement. On vérifiera aisément qu'un nombre quelconque de ces systèmes placés dans le même champ peuvent être *montés en série*. C'est en quelque

mesure la transposition cylindrique en champ uniforme de la méthode des doubles disques proposée précédemment.

b) On pourra se rendre compte également que le même système peut être appliqué en *permutation du primaire et du secondaire*. Un courant est envoyé de l'extérieur le long de la lame, les courants transversaux constituent alors un solénoïde d'axe normal au champ. On peut les mesurer par induction, mais l'effet sera en général très faible. Il serait préférable de revenir au régime permanent et à l'observation *mécanique*, soit la détermination du couple exercé par le champ sur le solénoïde.

Semblablement, *en substituant au courant longitudinal un gradient thermique*, le couple qui s'exerce mesure l'effet v. ETTINGSHAUSEN-NERNST. Le moment de ces couples croît comme H^2 .

Principes expérimentaux pour intensifier les effets magnétothermoélectriques transversaux

par A. PERRIER (Lausanne).

1^o Au cours de la précédente séance de la S.S.P. (Lucerne),¹⁾ l'auteur a indiqué le principe d'une méthode nouvelle permettant d'amplifier l'intensité de l'effet HALL par la mise *en série* jusqu'alors irréalisable des forces électromotrices y afférentes (magnétogalvaniques transversales).

Le présent exposé donne le principe de techniques atteignant le même résultat, mais pour les forces électromotrices *magnétothermoélectriques* transversales (effet VON ETTINGSHAUSEN-NERNST).

Pour l'effet HALL, la méthode faisait appel à des régimes variables (percussions de courants ou courants alternatifs). On ne peut songer ici à procéder pareillement; les courants de chaleur, en effet, ne permettent d'expériences précises guère qu'en régimes permanents.

Voici esquissées deux réalisations différentes, applicables toutes deux dans des *champs uniformes*.

2^o Le métal à étudier est façonné en une pile de lames rectangulaires égales, séparées par des feuilles isolantes et reliées conductivement en série par deux arêtes opposées: ainsi la plaque 1 et la plaque 2 auront une arête commune, l'opposée dans 2 est commune avec une arête de 3, l'opposée de 3 avec une de 4, etc... De plus, *une plaque sur deux est divisée en rubans étroits par des incisions*

¹⁾ A. PERRIER, Méthode nouvelle permettant la mesure des effets HALL, en série et en parallèle, Helv. Phys. Acta **24**, 637 (1951).

parallèles entre elles et perpendiculaires aux arêtes communes. Le tout est immergé dans un champ magnétique normal aux plaques; et enfin, on entretient une différence de température permanente entre les deux *tranches* opposées de la pile (parallèles aux incisions).

La transmissibilité pour la chaleur par les discontinuités que constituent les incisions est incomparablement plus faible que celle des rubans compris entre elles, en sorte que le *gradient thermique* qui s'établit dans ces derniers est lui-même incomparablement plus faible que dans les lames continues. Or, l'effet transversal de l'aimentation étant proportionnel à ce gradient, la force électromotrice de l'ensemble de la pile peut ainsi totaliser celles de toutes les lames continues, sans diminution par d'autres de sens inverse; en l'absence d'incisions, la somme serait évidemment nulle par compensation.

On doit remarquer de plus que, toute la chaîne étant homogène, les différences transversales de température (effet LEDUC-RIGHT) sont sans action sur le résultat.

3^o La matière en expérience est façonnée à la manière d'une lame engendrée par le rectangle étroit décrivant un hélicoïde en demeurant continuellement normale à l'axe. C'est donc une sorte de vis à filet carré que l'on réalise de la sorte, vis dont le pas est imposé par l'épaisseur (faible) de la lame et celle d'une feuille isolante séparant les spires consécutives. On ménage un canal cylindrique coaxial. L'ensemble affecte l'apparence d'un tore à méridienne rectangulaire auquel on appliquera un champ magnétique parallèle à son axe. Installant une source de chaleur dans le canal intérieur et une de froid sur la surface latérale extérieure, on établit le gradient thermique radial nécessaire.

Là encore, et cette fois *sans aucune incision*, on observera entre les extrémités une différence de potentiel proportionnelle au *diamètre moyen* et au *nombre de tours* de l'hélice. On remarquera que cette tension n'est autre que la circulation changée de signe d'un champ électrique à lignes de force circulaires, analogue à celui qui apparaît par induction autour d'un champ magnétique variable.

La réalisation d'un gradient thermique de répartition uniforme est très probablement la principale difficulté que l'on doit rencontrer dans la mise en œuvre de l'une et l'autre méthode. La seconde a d'ailleurs conduit déjà par des essais sommaires à des résultats positifs.

Das Verhalten sehr kleiner ferroelektrischer Teilchen

VON M. ANLIKER, W. KÄNZIG und M. PETER (ETH., Zürich).

1. Im spontan polarisierten Zustande bestehen ferroelektrische Kristalle im allgemeinen aus Weisschen Bezirken. Dem Übergangsgebiet zwischen zwei Bezirken, der sog. Wand, ist eine Flächenenergie (Wandenergie) zuzuschreiben. Bei sehr kleinen Kristallen wird nun das Verhältnis der Flächenenergie (Wandenergie) zur Volumenenergie (Wechselwirkungsenergie und elektrische Feldenergie) so gross, dass die Wandenergie das thermodynamische Verhalten des Kristalls wesentlich mitbestimmt: Die Curietemperatur eines isolierten und nichtleitenden ferroelektrischen Kristalls,

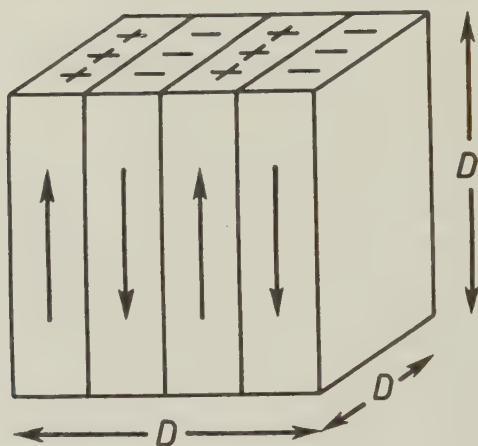


Fig. 1.

welcher in einem Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ eingebettet ist, wird einerseits durch das depolarisierende Feld und andererseits durch den Aufwand an Wandenergie gegenüber der Curietemperatur des kurzgeschlossenen Makrokristalls zu tieferer Temperatur verschoben. Für KII_2PO_4 ($T_C = 123^\circ \text{K}$) lässt sich diese Curiepunktsdepression ΔT_C leicht berechnen, da die zu erwartende Domänenkonfiguration sehr einfach ist¹⁾ (Fig. 1). Sie beträgt unter der Annahme einer Wandenergie $\sigma = \alpha P^2$ für einen n -Domänenkristall kubischer Gestalt⁴⁾

$$\Delta T^C = - [3,4 C/n \epsilon + 2(n-1) \alpha C/D]$$

wobei

C = Curiekonstante (260°C)¹⁾; ϵ = Dielektrizitätskonstante der Einbettung;
 α = Wandenergiekoeffizient; n = Domänenanzahl; D = Teilchendurchmesser.

Die Anzahl n stellt sich so ein, dass die Summe von Volumenenergie und Wandenergie minimal wird. Somit ergibt sich bei vorgegebenem ε und D ein eindeutiger Zusammenhang zwischen α und ΔT_C . Unsere Experimente an kolloidalem KH_2PO_4 ergaben folgendes:

Bei $\varepsilon \approx 5$ und $D \leq 1500 \text{ \AA}$ liegt die Curietemperatur unterhalb der Temperatur des flüssigen Stickstoffes, für $D \geq 4000 \text{ \AA}$ aber oberhalb. Für den Wandenergiekoeffizienten α ergeben sich daraus folgende Grenzen:

$$9 \cdot 10^{-8} \text{ cm} < \alpha < 26 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

Diese Grenzen sind verträglich mit der Annahme klassischer Dipol-Dipol-Wechselwirkung und einer Wanddicke von wenigen Gitterkonstanten²⁾.

2. Das sog. innere Feld wird durch die Grenzbedingungen an der Oberfläche gestört, so dass bei kleinen Teilchen eine Abweichung vom Verhalten des Makrokristalls zu erwarten ist. Bei Ferroelektrika vom BaTiO_3 -Typ besteht theoretisch die Möglichkeit, dass durch diese Störung der antiferroelektrische Zustand unterhalb der Curietemperatur ($T_C = 120^\circ \text{ C}$ für BaTiO_3) bevorzugt wird³⁾.

Experimentell wurde folgendes festgestellt: Teilchen vom Durchmesser $D \leq 4000 \text{ \AA}$ zeigen unterhalb und oberhalb der Curietemperatur anomale Gitterkonstantenschwankungen. Die spontane Deformation (und somit auch die spontane Polarisierung) ist kleiner als beim Makrokristall. Der Curiepunkt ist bei leitenden Kolloiden unverschoben und bleibt scharf bis zu Teilchengrößen $D \approx 1600 \text{ \AA}$. Bei Teilchen vom Durchmesser $D \approx 300 \text{ \AA}$ und $D \approx 150 \text{ \AA}$ ist die Umwandlung unscharf und erstreckt sich von Zimmertemperatur bis auf etwa 220° C .

Weitere Untersuchungen sind im Gange.

Literatur.

¹⁾ Siehe z. B. H. BAUMGARTNER, F. JONA und W. KÄNZIG, Erg. d. Ex. Naturwiss. **23**, 235 (1950).

²⁾ C. KITTEL, Phys. Rev. **82**, 965 (1951).

³⁾ M. H. COHEN, Phys. Rev. **84**, 369 (1951).

⁴⁾ W. KÄNZIG, Phys. Rev. **87**, Nr. 2 (1952).

Der Einfluss schneller Schwerkraftänderungen auf die Atmosphäre

von F. DESSAUER, A. MERCIER, E. und J. SCHAFFHAUSER (Fribourg).

Ähnlich wie der Boden dauernd kleine Schwingungen ausführt — man nennt diese Erscheinung die natürliche Bodenunruhe oder auch Mikroseismik —, so treten auch in der Atmosphäre dauernd kleine Schwingungen auf, auch bei vollkommener Windstille. Diese Schwingungen, welche Periodendauern von 1—10 sec. aufweisen bei Amplituden von ca. 10^{-3} mm Hg, wurden erstmals von BAIRD und BANWELL 1936 in Neuseeland und unabhängig von GUTENBERG und BENIOFF 1939 in Amerika und von SAXER 1944 in Fribourg festgestellt.

Bei der Diskussion über die möglichen Ursachen dieser Schwankungen trat dabei die Frage auf, ob evtl. eine Schwankung der Schwerebeschleunigung mitbeteiligt sein könnte. Es soll deshalb im folgenden untersucht werden, welchen Einfluss angenommene schnelle Variationen der Schwerebeschleunigung (g -Änderung) auf die Atmosphäre ausüben würden. Man weiss zwar heute, dass mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit die erwähnte Erscheinung auf meteorologische Einflüsse zurückzuführen ist, aber es ist vielleicht doch interessant, das Ergebnis mitzuteilen.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir eine idealisierte Atmosphäre an, ruhend (ohne Strömungen) und isotherm geschichtet, gemäss der barometrischen Höhenformel, und vernachlässigen ebenfalls die innere Reibung. Die Erde sei eben und nicht rotierend vorausgesetzt (keine Corioliskraft). Der Vektor von g stehe senkrecht auf dieser Ebene. Die Variation sei diesem überlagert, ihre Amplitude a sei sehr klein gegenüber dem Mittelwert. Wir können dann setzen:

$$g = g_0 + a \sin \omega t.$$

Jede andere Kurvenform lässt sich dann aus trigonometrischen Funktionen zusammensetzen. Für die g -Änderung nehmen wir ferner noch an, dass sie in einem genügend grossen Gebiet synchron erfolge. Wir können uns dann darauf beschränken, die Schwingung einer vertikalen Luftsäule vom Querschnitt 1 zu betrachten, und zwar untersuchen wir in dieser Luftsäule kleine Schwingungen eines Volumelementes dV in der Höhe z über dem Erdboden.

Die Durchrechnung des Problems führt auf eine Differentialgleichung mit der folgenden Lösung für die Druckamplitude Δp_z in der Höhe z :

$$\Delta p_z = \frac{a}{\omega^2} \kappa p_z \frac{\alpha}{2} \left(1 - i \sqrt{4 \frac{\omega^2}{\kappa \alpha g_0} - 1} \right) e^{\left(\frac{\alpha}{2} - i \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \frac{\omega^2}{\kappa \alpha g_0} - 1} \right) z} \quad *).$$

*) Ausführliche Publikation im „Archives des sciences“, Genf, 5, 97 (1952).

In der obigen Gleichung bedeuten ferner:

p_z = Druck in der Höhe z

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

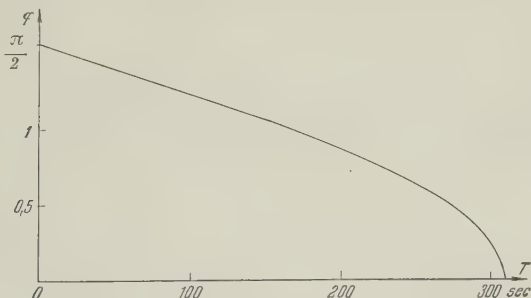
$$\alpha = \frac{\varrho_0}{p_0} g_0 \text{ ist die Konstante der barometrischen Höhenformel}$$

ϱ_0, p_0 Bedeuten Dichte bzw. Druck am Erdboden.

Beschränken wir uns auf den Erdboden ($z = 0$), so wird die e -Funktion = 1. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Wert unter der Wurzel positiv oder negativ ist. Im ersten Fall besteht zwischen der Erregung und der Luftschwingung eine Phasenverschiebung. Diese ist:

$$\varphi = -\arctg \sqrt{\frac{4\omega^2}{\kappa\alpha g_0} - 1}$$

plus ein z -abhängiges Glied, das in unserem Falle gleich Null ist. Die Phasenverschiebung beginnt also bei der Wurzel 0, das ist bei einer Periodendauer von etwa 300 sec und ist $-\pi/2$ bei $T = 0$ (Fig.).



Für die Amplitude erhält man in diesem Falle:

$$|\Delta p_0| = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\kappa p_0 \varrho_0} \cdot T$$

d. h. sie wächst linear mit der Periodendauer T .

Im Gebiet oberhalb 300 sec erfolgt die Luftdruckänderung dann synchron mit der Erregung und die Amplitude strebt dem statischen Wert als Grenzwert zu.

Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zeigt, dass nur für grosse T der Einfluss der g -Änderungen hinreichend sein könnte, aber auch hier wahrscheinlich nicht existiert.

Beziehungen zwischen quasiperiodischen Luftdruckschwankungen und meteorologischen Erscheinungen

von L. SAXER (Fribourg).

Seit einigen Jahren sind kleine atmosphärische Druckschwankungen von einigen Sekunden Periodendauer und Amplituden von 10^{-4} bis 10^{-3} mm Hg bekannt. Während die Frequenz dieser Luftdruckschwankungen meistens 10–14 pro Minute beträgt, ist ihre Amplitude zeitlich stark veränderlich. In der vorliegenden Arbeit werden Beziehungen zwischen dem Gang der Amplitude und meteorologischen Erscheinungen untersucht.

Die Messung der Luftdruckschwankungen erfolgt mit einer Membrandose, deren Kapazitätsänderungen einen Hf-Oszillator verstimmen. Die Frequenzänderungen werden mit einem Quarzresonanzkreis gemessen und nach Gleichrichtung und Verstärkung mit einem Tintenschreiber registriert. Man erreicht mit dieser Anordnung leicht eine Empfindlichkeit von 3 m A pro 10^{-3} mm Hg bei genügender Stabilität für Dauerbetrieb aus dem Netz.

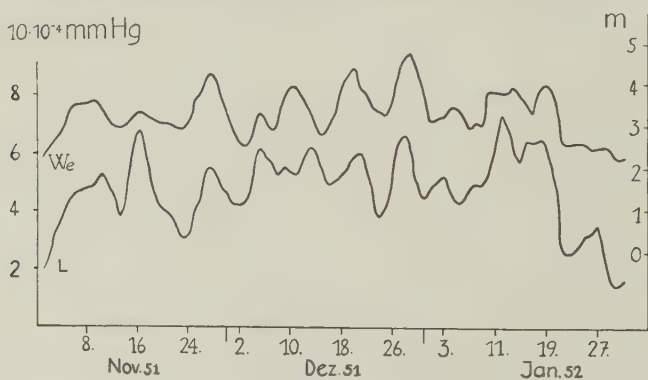


Fig. 1.

Bei früheren Dauerregistrierungen, welche im Winter 1948/49 in Aarau durchgeführt wurden, konnte keine Beziehung zwischen der Grösse der Luftdruckschwankungen und dem am Messort herrschenden Wetter gefunden werden. Hingegen zeigte sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen der Tiefdrucktätigkeit auf dem Atlantik und den gemessenen Druckschwankungen in dem Sinne, dass starke Tiefdrucktätigkeit parallel mit grossen Druckschwankungen geht. Um zu einem quantitativen Vergleich zu kommen, wurde versucht, als Mass für die Tiefdrucktätigkeit die Höhe der Meereswellen und die Windgeschwindigkeit zu verwenden. Diese Grössen werden viermal täglich von den im Atlantik kreuzenden Wetterschiffen gemel-

det. In Fig. 1 und 2 sind die Tagesmittelwerte von Wellenhöhe (We) bzw. Windgeschwindigkeit (Wi) der im „Daily Weather Report, London“ aufgeführten Wetterschiffe den Tagesmittelwerten der in Aarau gemessenen Luftdruckschwankungen (L) für die Zeit vom 1. November 1951 bis 31. Januar 1952 gegenübergestellt. Um die starken Schwankungen zwischen den Tagesmitteln etwas auszugleichen, wurden alle Kurven nach dem in der Meteorologie üblichen Verfahren durch Mittelwertbildung über drei aufeinanderfolgende Tage geglättet. Die Übereinstimmung zwischen den Kurven konnte im Mittel dadurch etwas verbessert werden, dass die

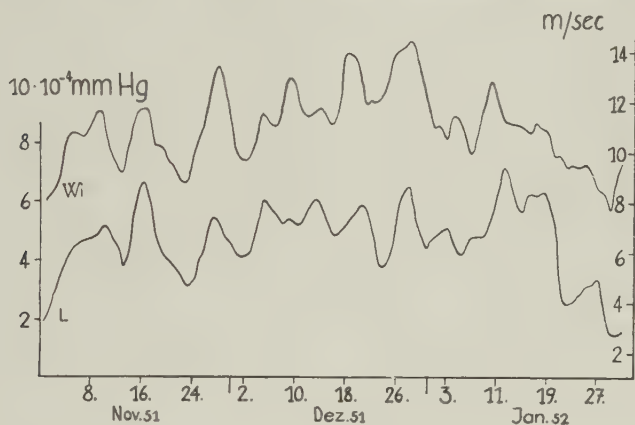


Fig. 2.

Luftdruckschwankungen des jeweiligen Tages mit den Werten für Wellenhöhe bzw. Windgeschwindigkeit des Vortages aufgetragen wurden. Diese mittlere Verspätung von etwa 24 Stunden kann aber nicht zur Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit verwendet werden, weil die Distanzen zwischen den Wetterschiffen und dem Messort der Luftdruckschwankungen sehr verschieden sind. Für die Beziehung zwischen Grösse der Luftdruckschwankungen und Höhe der Meereswellen berechnet sich aus Fig. 1 ein Korrelationskoeffizient $r = 0,69$, für die Beziehung zwischen Luftdruckschwankungen und Windgeschwindigkeit aus Fig. 2 $r = 0,68$. Für beide Werte ist die Wahrscheinlichkeit für zufällige Korrelation kleiner als 1%, so dass ein Zusammenhang zwischen den untersuchten Grössen als gesichert betrachtet werden darf. Es ist nach dem Dargelegten wahrscheinlich, dass die Vorgänge in einem Tiefdruckgebiet die Ursache für diese Luftdruckschwankungen sind.

Eine ausführliche Arbeit wird im Archiv für Meteorologie erscheinen.

Über Herkunft und Ausbreitung der natürlichen Luftunruhe (Luftseismik)

von E. und J. SCHAFFHAUSER (Fribourg).

Der zweite von uns hatte in den Jahren 1949/50 eine Apparatur gebaut zur Messung von Herkunftsrichtung und Ausbreitungsgeschwindigkeit der kurzperiodigen Luftdruckwellen und damit im Winter 1950/51 Messungen ausgeführt. Es ist darüber eine vorläufige Mitteilung erschienen¹⁾. Eine ausführliche Publikation wird demnächst folgen.

Die weitere Auswertung der Registrierungen ergab folgendes: Die Herkunftsrichtung der Druckwellen liegt immer zwischen NW und W. Die Messwerte streuen sehr stark. Es wurden deshalb für jeden Tag die Mittelwerte gebildet. So beträgt die Winkelstreuung am 14. Oktober 1950 ca. 10° , der Winkel mit der Nordrichtung schwankt von 47° – 87° . Der mittlere Winkel beträgt $50,3^\circ$. Eine statistische Auswertung der Streuung führte nicht auf eine Normalverteilung, woraus zu schliessen ist, dass die Streuung nicht nur rein zufällig ist. Ziehen wir in dem oben angeführten Beispiel einen Vergleich mit der Wetterlage und tragen die erhaltene Richtung auf der Wetterkarte ein, so sehen wir, dass dieselbe gerade südlich eines Tiefs über Island verläuft. Die Wetterlage ist an diesem Tage besonders einfach, ausser dem erwähnten Tief liegt nur noch eines über Labrador, also in beträchtlich grösserer Distanz vom Beobachtungsort. Man kann daraus auf einen Zusammenhang zwischen Tiefdruckgebieten und der natürlichen Luftunruhe schliessen. Diese Vermutung wird unterstützt durch eine zweite Registrierung am 26. Januar 1951. An allen übrigen Tagen herrschten kompliziertere Wetterverhältnisse, so dass diese Registrierungen nicht so beweiskräftig sind. Wir nehmen also als Arbeitshypothese an, dass die von uns registrierten Luftdruckschwankungen oder zumindest ein Teil davon, in einem Tief oder in der Nähe eines Tiefs erzeugt werden und durch die Atmosphäre zu uns gelangen. Wir hätten dann die Ausbreitung einer Druckwelle zu studieren.

Die gemessenen Phasengeschwindigkeiten liegen zum Teil unterhalb und zum Teil über der Schallgeschwindigkeit. Die Mittelwerte können auch an Tagen mit sehr ähnlicher Wetterlage grosse Unterschiede aufweisen. Man kann dies etwa erklären, indem man einen stark schwankenden Inzidenzwinkel annimmt. Die wirkliche Phasengeschwindigkeit müsste dann kleiner sein als Schallgeschwindigkeit, was bedeuten würde, dass die Zustandsänderungen bei diesen langsamen Schwingungen nicht mehr rein adiabatisch erfolgen. Es ist aber auch möglich, dass die Wellenfront durch meteorologische

Einflüsse verzerrt wird und innerhalb des Messdreiecks nicht mehr eben ist.

Analoge Messungen, wie die hier beschriebenen, wurden in Amerika von GUTENBERG und BENIOFF²⁾ schon 1940 gemacht, ebenfalls mit drei Stationen. Die beiden Autoren vermuteten schon damals, dass als Strahlungsquelle Tiefdruckgebiete in Frage kommen könnten. Die von ihnen gefundene Herkunftsrichtung liegt zwischen SW und W. Die Arbeiten sind aber anscheinend nicht weitergeführt worden.

Zur Beschreibung der Ausbreitung der Druckwellen bestehen zunächst zwei Möglichkeiten, nämlich erstens mit Hilfe von Schallwellen und zweitens mit Hilfe von Gravitationswellen (Oberflächenwellen). Zur Untersuchung der Ausbreitung von Schallwellen geht man ähnlich vor wie in der geometrischen Optik. Wir nehmen an, in einer bestimmten Entfernung von der Beobachtungsstation befinde sich eine Schallquelle. Die ausgesandten Schallwellen werden als eine Folge des negativen Temperaturgradienten in der Nähe des Erdbodens zunächst nach oben abgelenkt und dann in den Inversionsschichten nach unten gebrochen und kehren wieder auf die Erde zurück. Zwei Tatsachen sind dabei sehr wichtig:

1. Die Dispersion: Schallwellen niedriger Frequenz haben eine von der Frequenz abhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phase.

2. Die Absorption, die hauptsächlich im Gebiet niedriger Drucke sehr gross werden kann, nimmt mit der Frequenz zu.

Damit könnte evtl. bereits der quasiperiodische Charakter der gemessenen Kurven erklärt werden. Ferner lässt sich noch der folgende Schluss ziehen: Da die Absorption mit wachsender Frequenz ansteigt, müssten die Amplituden der kürzeren Wellen kleiner sein als diejenigen der längeren Wellen, was durch die Erfahrung bestätigt wird. Also trägt man z. B. Periodendauer und Amplitude übereinander auf, so verlaufen beide Kurven synchron. In diesem Zusammenhang ist noch folgendes interessant. Von verschiedenen Autoren wurde der schwebungsartige Verlauf der Registrierungen besonders hervorgehoben. Analysiert man nun eine solche Schwebung, so findet man, dass die Frequenz dabei nicht konstant bleibt, sondern mit der Amplitude ändert sich synchron die Periodendauer. Es handelt sich also um keine echte Schwebung. Dies würde mit dem oben erwähnten Resultat übereinstimmen.

Aber auch über grössere Zeiträume scheint diese Amplituden-Frequenzbeziehung erfüllt zu sein. So zeigen die von uns ausgemessenen Kurven im Winter längere mittlere Perioden als im

Frühling, und es ist seit langem bekannt, dass die Amplituden im Winter sehr gross sind und im Frühling stark abnehmen.

Der Gang der Periodendauer müsste dann, ausser durch die Aktivität und Lage der Schallquelle, durch atmosphärische Veränderungen erklärt werden, denn alle Vorgänge in der Atmosphäre, die im Bereiche des Schallweges liegen, müssen in den Registrierungen zum Ausdruck kommen, da dadurch die Ausbreitungsbedingungen geändert werden. Solche Vorgänge sind z. B. Schwingungen, Änderungen der Höhe der Inversionsschicht oder des Temperaturgradienten usw. Ferner ist noch zu erwähnen, dass auch in der Atmosphäre liegende Grenzflächen (Fronten) eine Brechung bewirken, und zwar nicht nur in bezug auf eine vertikale Brechung, sondern auch in bezug auf eine horizontale Brechung des Schallstrahls. Dies ist vor allem für Richtungsbestimmungen wesentlich. Es ist wohl kaum möglich, alle Faktoren, die eine horizontale Brechung des Schallstrahls bewirken, in Rechnung zu stellen. Der praktische Wert einer Peilung der Schallquelle erscheint deshalb im allgemeinen fraglich, was bedeuten soll, dass nur bei besonders einfachen Wetterlagen die Ergebnisse zuverlässig sind. Infolge dieser vielen meteorologischen Einflüsse ist von vornherein mit einer starken Streuung der Einzelresultate zu rechnen.

Dass, wie die Messungen zeigen, nur im Westen liegende Schallquellen wirksam sind, deutet darauf hin, dass die Ausbreitung noch durch eine gerichtete Grösse, z. B. Wind, beeinflusst wird. Die Theorie zeigt, dass durch einen Windgradienten die Brechungsverhältnisse geändert werden, wodurch der Strahlungsquelle eine bestimmte Richtcharakteristik zugeordnet wird.

Wie aus den obigen Darlegungen zu ersehen ist, lassen sich bei der geometrischen Schallausbreitung schon durch einfache Überlegungen einige Resultate ableiten. Dies ist im Falle der Gravitationswellen nicht mehr möglich. Bevor wir jedoch auf die Theorie der Gravitationswellen näher eingehen, möchten wir noch auf eine Folgerung hinweisen, die sich für das experimentelle Arbeiten ergibt. Da, wie gezeigt wurde, das Studium der Ausbreitung der Luftdruckwellen sehr wesentlich ist, um zu einer befriedigenden Theorie zu gelangen, ist es notwendig, gleichzeitig in verschiedenen Entfernungen von der vermutlichen Schallquelle Messungen durchzuführen. Durch Vergleich der gemessenen mittleren Perioden kann dann die Dispersion bestimmt und mit den Berechnungen verglichen werden.

Es gilt nun, vorerst abzuklären, ob eine Ausbreitung der uns interessierenden Frequenzen durch Gravitationswellen überhaupt

möglich ist. Die Rechnung zeigt nun, dass eine Grenzfrequenz existiert, die wir mit ω_c bezeichnen. Diese Grenzfrequenz stellt die höchste mögliche Frequenz dar, die noch durch Gravitationswellen übertragen werden kann. Höhere Frequenzen werden in der Atmosphäre nach oben zerstreut. Liegt die Grenzfrequenz in dem uns interessierenden Frequenzbereich, so ist die Möglichkeit der Erklärung der Luftdruckschwankungen gegeben, andernfalls ist sie von vornherein ausgeschlossen. Die Grenzfrequenz hängt wesentlich von der Temperaturverteilung in der Atmosphäre ab.

Rechnungen über Gravitationswellen wurden von verschiedenen Autoren gemacht, zuletzt von SCORER³⁾, allerdings unter vereinfachten Annahmen über die Temperaturverteilung. Die Grenzfrequenz liegt deshalb zu tief. Wir haben die Rechnung nach einer anderen Methode, unter Zugrundelegung einer mit der Wirklichkeit besser übereinstimmenden Temperaturverteilung durchgeführt.

In einem bestimmten Punkt der Erdoberfläche werde ein grosses Luftvolumen verdrängt. Die Flächen konstanter Dichte, die ursprünglich korizontal waren, werden nach oben abgebogen, und es wandern zirkulare Wellen radial von Störherd weg. Zur Beschreibung des Vorgangs wählen wir zweckmässigerweise Kugelkoordinaten, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt. Wir haben nun die Bewegungsgleichungen für die Komponenten aufzustellen. Unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung und der Differentialgleichung der potentiellen Temperatur erhalten wir nach einigen Umformungen die folgende Differentialgleichung für die Druckänderung:

$$\left(\frac{c \operatorname{tg} \Theta}{a^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \frac{\partial p}{\partial \Theta} = - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{RT} \frac{\partial p}{\partial z} \left(R \frac{dT}{dz} + g \right) - \frac{1}{RT} \cdot \frac{c_v}{c_p} \left(\frac{g^2}{RT} + \omega^2 \right) p.$$

In dieser Gleichung bedeuten:

a	=	Erdradius
Θ, z	=	Kugelkoordinaten
R	=	Gaskonstante
g	=	Erdbeschleunigung
T	=	Temperaturfunktion.

Zur Vereinfachung der Rechnung haben wir in der Ableitung gesetzt:

$$p \sim e^{i\omega t}.$$

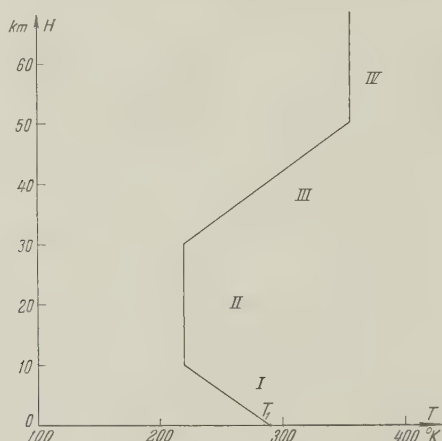
Die vorstehende Differentialgleichung lässt sich separieren. Wir machen deshalb den folgenden Ansatz für die Druckänderung

$$p(z, \Theta) = f(z) \cdot \varphi(\Theta)$$

und erhalten damit je eine Differentialgleichung für die horizontale und vertikale Druckänderung. Zur Berechnung der Grenzfrequenz benötigen wir nur diejenige für die vertikale Druckänderung, welche folgendermassen lautet:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{RT} \left[R \frac{dT}{dz} + g \right] \frac{df}{dz} + \left[\frac{1}{RT} \frac{c_v}{c_p} \left(\frac{g^2}{RT} + \omega^2 \right) - k^2 \right] f(z) = 0.$$

In dieser Differentialgleichung haben wir noch die Temperaturfunktion einzusetzen (Fig.). Wir erhalten dadurch je eine Differen-



tialgleichung für die vier Temperaturgebiete I–IV. Für das Gebiet I lautet z. B. die Temperaturfunktion:

$$T = T_1 - \alpha z.$$

Die Lösung wird dann dargestellt durch eine Kombination zweier konfluenter hypergeometrischer Funktionen. Die Lösung im Gebiet IV gibt zusammen mit den Randbedingungen die Bedingung für die Grenzfrequenz. Die Randbedingungen lauten: Die vertikale Geschwindigkeitskomponente soll am Erdboden verschwinden, stetiger Anschluss der Lösungen bei allen drei Übergängen, ferner soll die kinetische Energie der Welle endlich sein.

Eine näherungsweise Berechnung ergibt, dass die Grenzfrequenz bzw. die zugehörige Schwingungsdauer zwischen 30 und 60 sec liegt*). Die Grenzperiode ist also immer noch zu lang. Es ist allerdings noch zu erwähnen, dass unsere Temperaturverteilung immer noch sehr approximativ ist, doch ist die Wahrscheinlichkeit gering,

*) Ausführliche Publikation erfolgt demnächst.

dass sich Gravitationswellen mit nur wenigen sec Periodendauer noch ausbilden können.

Es existiert vermutlich auch bei der Ausbreitung durch Schallwellen eine Grenzfrequenz, in diesem Falle eine untere Grenzfrequenz. Es ist möglich, dass sich unterhalb einer bestimmten Frequenz kein Schallfeld mehr ausbilden kann⁴⁾.

Die durch die beiden Ausbreitungsmöglichkeiten erfassten Frequenzgebiete brauchen sich nicht zu überlappen. Es würde dann eine Lücke bestehen, in der eine Wellenausbreitung über grosse Entfernungen nicht mehr möglich ist. Die Messungen scheinen das Bestehen einer solchen Lücke bei Schwingungsdauern oberhalb ca. 10 sec zu bestätigen. Es wird deshalb notwendig, auch die Schallausbreitung noch genauer zu studieren.

Für die Finanzierung der experimentellen Arbeiten sind wir der *F. Hoffmann-La Roche*-Stiftung zu Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis.

¹⁾ F. DESSAUER, W. GRAFFUNDER und J. SCHAFFHAUSER, *Archiv. Met. Geophys. Bioklimat A III*, 453 (1951).

²⁾ B. GUTENBERG und H. BENIOFF, *Trans. Amer. Geophys. Union* 424 (1941).

³⁾ R. S. SCORER, *Proc. Roy. Soc. A* 201, 137 (1950).

⁴⁾ P. COURVOISIER: Über Luftdruckvariographen und Luftdruckschwankungen. *Archiv. Met. Geophys. Bioklimat A I*, 1 (1948).

Einige Ergebnisse über die Ausbreitung der quasiperiodischen Luftdruckschwankungen

VON W. GRAFFUNDER und W. GÜNTHER (Fribourg).

Trotz gewisser Einschränkungen in bezug auf die erreichbare Genauigkeit ist die Methode der Richtungsbestimmung der ankommenden Luftdruckschwankungen durch Peilung von 3 Messpunkten ein wichtiges Verfahren, das einen Aufschluss über die Ursache und Herkunft dieser Schwankungen geben kann. Wir haben daher mit der Apparatur, über die der eine von uns bereits an der Herbsttagung der Physikalischen Gesellschaft in Luzern berichtete, einige weitere Messungen ausgeführt.

Die Registrierapparatur und eine der drei Druckmessdosen befanden sich im Physikalischen Institut, die beiden anderen in einer Entfernung von je einigen hundert Metern, so dass ein Dreieck mit den Seitenlängen 320, 410 und 445 m entstand. Aus der Verschiebung der gleichzeitig beobachteten Druckschwankungen konnten Richtung und Geschwindigkeit der ankommenden Wellenfront bestimmt werden. In den folgenden Abbildungen sind sämtliche aus-

gewertete Messtripel zusammengestellt. Fig. 1 zeigt die Richtung der ankommenden Wellenfront. Fast sämtliche Messwerte liegen in dem Winkelbereich West bis Nordwest, kein einziger Messpunkt in dem der Halbebene Nord—Ost—Süd entsprechenden Winkel-

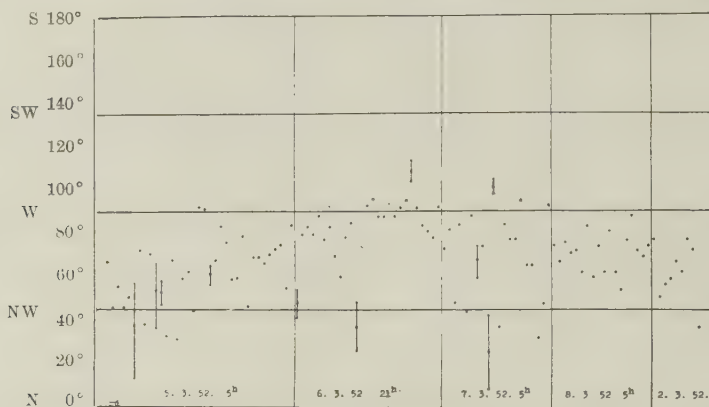


Fig. 1.
Herkunftsrichtung der Mikroschwankungen.

bereich. In der Zeichnung ist an einigen Punkten durch die Länge eines vertikalen Striches die ungefähre Grösse der Messungenauigkeit angegeben. Sie ist infolge der geringen Abstände der Mess-

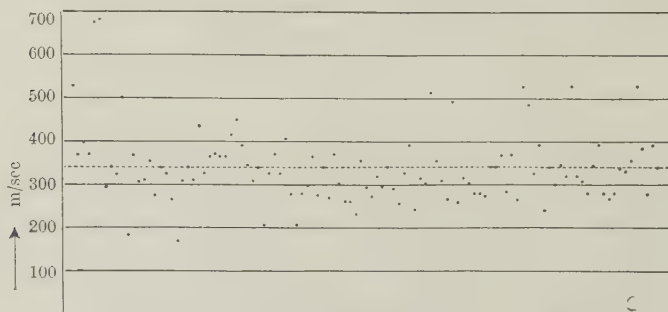


Fig. 2.
Phasengeschwindigkeit der Mikroschwankungen.

punkte verhältnismässig gross. Die Empfindlichkeit der Apparatur würde ohne weiteres auch Messungen bei beträchtlich grösseren Abständen der drei Stationen erlauben. In Fig. 2 ist die aus den Messungen errechnete Phasengeschwindigkeit der ankommenden Wellenfront aufgetragen. Man sieht, dass die Messwerte ungefähr

gleichmässig nach beiden Seiten der Schallgeschwindigkeit streuen. Der Mittelwert aller Messungen liegt bei 339,3 m/sec. Er ist in der Fig. 2 durch die gestrichelte Linie dargestellt und ist nur unwesentlich höher als die Schallgeschwindigkeit, die bei der zur Zeit der Messungen herrschenden Temperatur ca. 335 m/sec beträgt. Bei früheren Messungen, die von Herrn SCHAFFHAUSER ausgeführt wurden, hatten sich z. T. Werte ergeben, die beträchtlich höher als Schallgeschwindigkeit lagen und die sich auf Grund des schrägen Einfalls der Wellenfront im Gebiet der anormalen Hörbarkeit erklären. Ebenso kann die Zusammensetzung der von zwei oder mehr Entstehungszentren ausgehenden Wellenfronten eine Phasengeschwindigkeit ergeben, die über Schallgeschwindigkeit liegt. Dass wir bei unseren Messungen Werte fanden, die kaum über Schallgeschwindigkeit lagen, ist aber nicht erstaunlich und rührt her von der Krümmung des Schallstrahles in dem normalen Temperaturgefälle über dem Erdboden.

Die Messungen fanden Anfang März statt. Es finden sich trotz der geringen Messgenauigkeit Andeutungen davon, dass sich die Herkunftsrichtung der Druckschwankungen in analoger Weise verschoben hat wie die Zentren der zu dieser Zeit auf dem Atlantik liegenden Tiefdruckgebiete. Die Messungen sollten mit grösserer Messbasis und auch zu anderen Jahreszeiten und unter anderen meteorologischen Bedingungen wiederholt werden.

Die Untersuchungen wurden mit Unterstützung der Fritz-Hoffmann-La-Roche-Stiftung durchgeführt, der wir auch an dieser Stelle unseren Dank aussprechen.

Die geometrische Transformation von Impedanzdiagrammen

von H. BRINER und W. GRAFFUNDER (Fribourg).

Wird eine Hochfrequenzleitung (abgeschirmte Parallelleitung oder konzentrische Rohrleitung) von Wellenwiderstand Z und Länge l durch einen Widerstand R_i abgeschlossen, so errechnet sich der Eingangswiderstand der Leitung durch die Formel:

$$\Re_0 = Z \frac{\frac{R_i}{Z} + j \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}{1 + j \frac{R_i}{Z} \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

die man auf den Wellenwiderstand beziehen kann ($r_0 = \Re_0/Z$; $m = R_i/Z$):

$$r_0 = \frac{m + j \tan \varphi}{1 + j m \tan \varphi}.$$

Für die praktische Anwendung dieser Formel ist es üblich, eine graphische Darstellung zu verwenden, nach F. MEINKE „Kreisdiagramm erster Art“ bezeichnet. Dieses Diagramm besteht aus Kreisen, die die ganze rechte Halbebene decken. Es ist somit nur für beschränkte Werte von m und r_0 brauchbar. Durch die konforme Abbildung

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

wird die rechte Halbebene in das Innere des Einheitskreises transformiert, und es entsteht so das bekannte „Kreisdiagramm zweiter Art“, das nun alle Werte von m und r_0 umfasst.

Eigenartigerweise wird in der Spezialliteratur nicht darauf hingewiesen, dass die rechnerisch etwas umständliche Koordinatentransformation durch die funktionentheoretische Veranschaulichung mit der Riemannschen Zahlenkugel leichter verständlich ist. Die hier notwendige Transformation entspricht einer Drehung der Zahlenkugel um $\pi/2$ nach rechts um den zur imaginären Achse parallelen Durchmesser. (Projektionen).

Ausführlicher Bericht erscheint in der Telefunken-Zeitung.

Eisenmessgerät für ganze Blechtafeln

VON ERWIN WETTSTEIN (Zürich).

Die heute üblichen technischen Eisenmessmethoden und -geräte, insbesondere die Permeabilitätsmessungen an Messkernen und die Verlustzifferbestimmungen mit dem Epstein-Apparat, bedingen im allgemeinen zeitraubende Vorbereitungen und relativ grosse Materialverluste und gestatten praktisch nur die Durchführung von Stichproben. Die oft erwünschte Sortierung grösserer Blechmengen ist nur dann wirtschaftlich, wenn die ferromagnetischen Eigenschaften direkt an den unzerschnittenen Blechtafeln gemessen werden können¹⁾²⁾³⁾.

Der in Fig. 1 gezeigte Eisenmesstisch vermeidet jeglichen Materialverlust und erlaubt die Messung mehrerer Tafeln pro Minute mit einer Genauigkeit von $\pm 3 \dots \pm 5\%$, je nach der Genauigkeit der Dickenmessung und der verwendeten elektrischen Messinstrumente. Er hat sich seit mehr als zwei Jahren im praktischen Betrieb als Permeabilitätsmesstisch bewährt.

Der magnetische Kreis des Messtisches ist in Fig. 2 im Schnitt dargestellt. Er wird durch einen Querstreifen der zu prüfenden

Blechtafel und zwei magnetische Rückschlussjoch mit geringem magnetischem Widerstand gebildet, welche sich über die *ganze* Breite der Prüftafel erstrecken. Das untere Joch ist in den Messstisch fest eingebaut, währenddem das obere Joch zum Durchschieben der Blechtafel etwa 1 cm abgehoben werden kann (Pedal in Fig. 1 ersichtlich). Die Erreger- und Messwicklungen sind, abgesehen von kleinen zusätzlichen Wicklungen zur Kompensation des

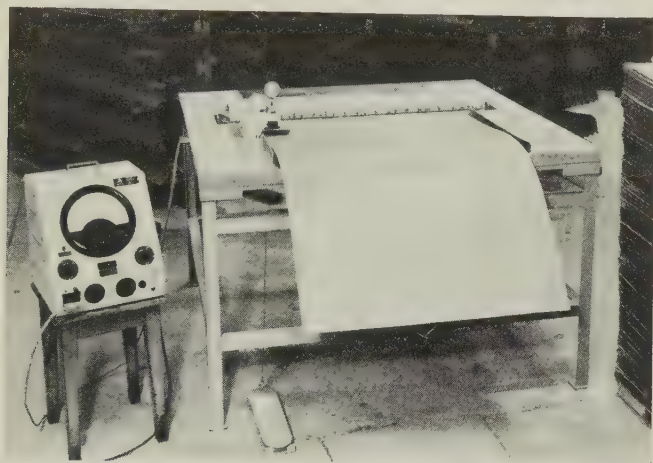


Fig. 1.

Eisenmesstisch und Anzeigeverstärker für Permeabilitätsmessungen.

magnetischen Spannungsabfalls bei den Polen und in den Jochen, homogen über der Prüfstrecke verteilt. Die Streuung wird dadurch gering.

Im Gegensatz zu anderen Ganztafelmessgeräten²⁾³⁾ ist die magnetische Feldstärke im Prüfabschnitt der Tafel örtlich konstant, so dass eine physikalisch saubere Messung auch dann möglich ist, wenn die Messgrösse von der Feldstärke abhängt. Man erhält mit dieser Apparatur beispielsweise definierte Werte der Permeabilitäten μ_5 , μ_{20} und μ_{100} bei 5, 20 und 100 mOe oder der Verlustziffer V_{10} bei 10000 G, währenddem andere Ganztafelgeräte Mittelwerte über einen bestimmten Feldstärkebereich ergeben.

Da die Prüftafel während der Messung zwischen den beiden Jochen festgeklemt wird, ist die Länge der nichtferromagnetischen Spalte zwischen den Polen und der Blechtafel sehr klein. Entsprechend konnte die Länge der Prüfstrecke auf etwa 10 cm reduziert werden, was einerseits rasche Bedienung und geringes

Gewicht der Apparatur und andererseits die Messung einzelner Querstreifen ermöglichte.

Für die spezielle Anwendung des Eisenmesstisches zu Permeabilitätsmessungen wurde ein besonderer elektronischer Anzeigeverstärker (Fig. 1) entwickelt, an dem nach Einstellung der gemessenen Blechdicke und -breite die Permeabilitäten μ_5 , μ_{20} und μ_{100} direkt abgelesen werden können.

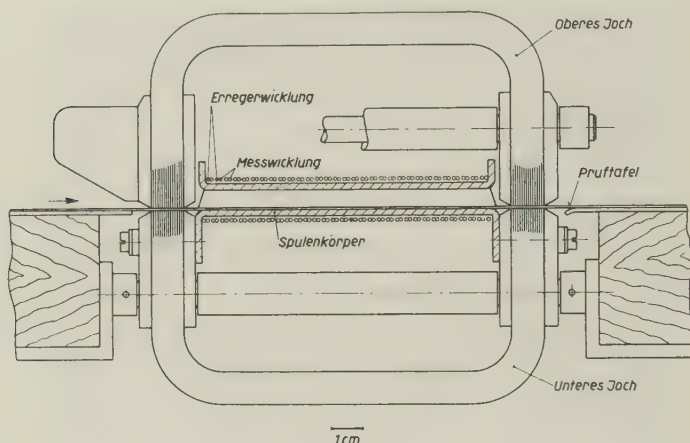


Fig. 2.

Schnitt durch den magnetischen Kreis des Eisenmesstisches.

Den Herren F. HAUSER und M. ANGST möchte ich für ihre wertvolle Mitarbeit bei der Konstruktion des Messtisches und der Entwicklung des Verstärkers danken.

Eine ausführliche Veröffentlichung erscheint demnächst in den Albiswerk-Berichten.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ R. RICHTER, ETZ. 1902, S. 491, und 1903, S. 341.
- ²⁾ W. SKIRL, Elektrische Messungen, W. de Gruyter & Co., Berlin 1936, S. 746.
- ³⁾ F. KOPPELMANN, ETZ. 1949, S. 463, und E. und M. 1951, S. 225.

Absolutbestimmung der Wirkungsquerschnitte $\text{Cu}^{63}(\gamma, n)$ und $\text{C}^{12}(\gamma, 3\alpha)$ in bezug auf Lithium- γ -Strahlung

von H. Glättli, O. Seippel, und P. Stoll (ETH., Zürich).

(21. IV. 1952.)

Zusammenfassung. Die Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $\text{Cu}^{63}(\gamma, n)$ und $\text{C}^{12}(\gamma, 3\alpha)$ in bezug auf Li- γ -Strahlung*) werden mit erhöhter Präzision *absolut* gemessen. Es ergeben sich für diese oft als Standard benützten Grössen die Werte:

$$\sigma_{\text{Cu}} = 0,048 \pm 0,008 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad \sigma_{\text{C}} = 1,75 \pm 0,25 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

Einleitung.

Für eine grosse Reihe von Kernreaktionen, welche durch die Li- γ -Strahlung ausgelöst werden, liegen Relativmessungen der Wirkungsquerschnitte in bezug auf die Reaktion $\text{Cu}^{63}(\gamma, n) \text{Cu}^{62}$ vor. Der Wirkungsquerschnitt von Cu^{63} bildet immer dann einen praktischen Standard, wenn durch die Einwirkung der γ -Strahlung ein radioaktives Isotop entsteht, dessen Aktivität leicht und genau mit derjenigen des Cu^{62} verglichen werden kann.

Beim Arbeiten mit Kernphotoplatten indessen, wo γ -Reaktionen an Elementen hervorgerufen werden, die in die Platte eingelagert sind, bildet die in der Gelatine stets gleichzeitig auftretende Reaktion $\text{C}(\gamma, 3\alpha)$ ein praktisches Vergleichsobjekt zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes; denn es ist leicht den C-Gehalt der Emulsion zu bestimmen, und die genannte Reaktion ist auch sehr leicht zu erkennen.

Es ist daher von Interesse, für diese beiden als Vergleichsbasis sehr geeigneten Reaktionen die Wirkungsquerschnitte neu und mit erhöhter Genauigkeit zu bestimmen. Für den γ -Wirkungsquerschnitt an Cu werden in der Literatur sehr verschiedene Werte angegeben. Der von uns gemessene Wert stimmt ungefähr überein mit dem von McDANIEL und Mitarbeitern⁵⁾ nach einer ganz anderen Methode, nämlich durch direkte Neutronenzählung, bestimmten Wirkungsquerschnitt, während WÄFFLER und HIRZEL⁶⁾ einen 2,5mal grösseren Wert für σ_{Cu} angeben.

*) Li- γ -Strahlung: (17,6 MeV; 14,8 MeV und $\approx 12 \text{ MeV}$)⁷⁾¹⁰⁾. Die Korrekturen, die sich durch das Auftreten der 12 MeV-Komponente ergeben, werden im Anhang diskutiert.

A. Absolutmessung der γ -Intensität.

Vorgängig der eigentlichen Bestimmung der Wirkungsquerschnitte hatte eine Absolutmessung der γ -Strahlung zwecks Eichung von Monitorzählrohren zu erfolgen. Die Quantenzählung erfolgte nach der Methode von HORRIG^{1) 2)}. Das Prinzip lässt sich wie folgt umschreiben: Man registriert mit einem Zählrohr von bekannter Empfindlichkeit die in einer Bleifolie ausgelösten Paar- und Compton-Elektronen. An Hand des sehr genau bekannten Compton- und Paar-Querschnittes von Pb [= totaler Absorptionsquerschnitt minus Querschnitt $\text{Pb}^{206}(\gamma, n) = (19,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$] kann auf die Zahl der γ -Quanten geschlossen werden, welche die Target in dem durch Fläche und Abstand der Pb-Folie von der Quelle definierten Raumwinkel verlassen. Die experimentelle Anordnung ist in Fig. 1 gegeben:

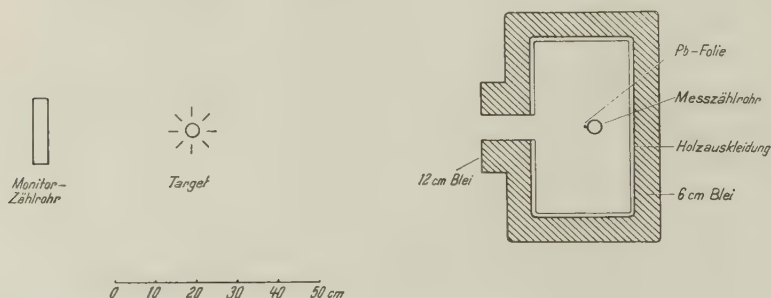


Fig. 1.

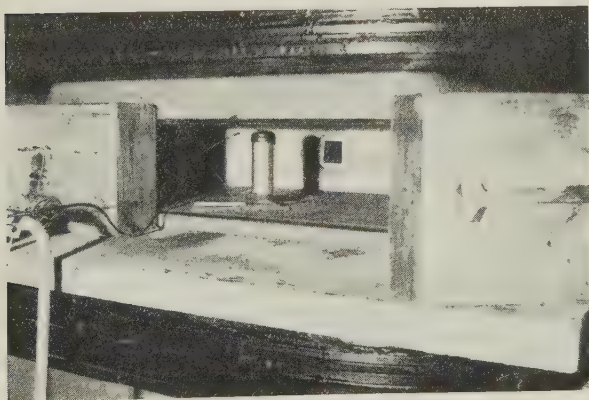
Das dünnwandige Messzählrohr zur Registrierung der Sekundärelektronen befindet sich in einem Magneten, mit der Achse parallel zu den Feldlinien. Das Zählrohr ist teils durch das Eisen des Elektromagneten, teils durch eine 6–12 cm dicke Bleiwand gegen Streustrahlung geschützt. Die Holzauskleidung dient zur Verminderung der Streustrahlung im Innenraum. Magnetfeld, Bleiabschirmung (speziell die Eintrittsöffnung) und Pb-Folie sind verschiedenen Bedingungen unterworfen:

1. *Magnetfeld.* Das Magnetfeld soll so stark sein, dass von aussen eintretende, oder im umgebenden Material entstehende Sekundärelektronen das Messzählrohr nicht erreichen können. Die in der Pb-Folie ausgelösten Paar- und Comptonelektronen sollen auf Kreisbahnen so geführt werden, dass sie den empfindlichen Teil des Zählrohrs mehrfach durchqueren, ohne mehr Material als unbedingt notwendig durchsetzen zu müssen. Dadurch erreicht die Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohrs praktisch 100%.

2. *Bleiabschirmung.* Die Bleiwand dient nicht nur zur Verminderung des Nulleffektes, sondern auch zur ungefähren Raumwinkeldefinition. Es muss verhindert werden, dass gestreute, also nicht direkt von der Target kommende γ -Quanten die Pb-Folie erreichen und dort Sekundärprozesse auslösen. Trotzdem darf die Eintrittsöffnung nicht zu klein gewählt werden, denn dann würde



Target und Magnet mit Pb-Abschirmung.



Messzählrohr zwischen den Magnetpolen.

sie genau das bewirken, was die Abschirmung verhindern soll, oder in einem günstigeren Falle würde sich ein systematischer Fehler einstellen: wird nur ein kleiner Bereich des Zählrohrs bestrahlt (wenig mehr als bei vorgelegter Pb-Folie durch dieselbe bedeckt wird) so ändert sich infolge γ -Absorption in der Folie die Zahl der in der Zählrohrwand ausgelösten Sekundärelektronen, d. h.

nach Abzug des ohne vorgelegte Folie bestimmten Nulleffektes verbleibt ein zu geringer Effekt. Mit verschiedenen Blendeneinsätzen war es im Verlaufe der vorliegenden Arbeit möglich, einen solchen „systematischen Fehler“ künstlich zu erzeugen und nachzuweisen.

3. *Pb-Folie*. Diese soll flächenmässig möglichst gross, jedoch nur so gross sein, dass alle in ihr entstehenden Sekundärelektronen den wirksamen Bereich des Messzählrohrs durchsetzen. Für die Dicke der Folie gilt Ähnliches: so dick wie möglich, jedoch soll sich keine Elektronenabsorption bemerkbar machen. Beide Punkte sind leicht zu prüfen: Solange die obigen Bedingungen erfüllt sind, ist die bei konstanter γ -Intensität am Messzählrohr registrierte Stosszahl proportional der Fläche, bzw. der Dicke. Die letztere Kontrollmessung ist in Fig. 2 wiedergegeben, da sie allgemeine Gültigkeit hat. In vollkommener Übereinstimmung mit HUGH¹⁾ wurde festgestellt, dass die Proportionalität bis zu einer Foliendicke von 0,6 mm gewährleistet ist.

Die Auswerteformel hat folgende Gestalt:

$$N_{\gamma}^{(90^{\circ})} = R^2 \cdot \frac{1}{\frac{m}{A_{\text{Pb}}} \cdot N \cdot \sigma_{\text{Pb}}} \cdot \left[\frac{N_1}{M_1} - \frac{N_2}{M_2} \right] \cdot \frac{1}{K_{(90^{\circ})}} \cdot \frac{1}{K_{\text{abs}}}$$

Dabei bedeuten:

- $N^{(90^{\circ})}$ Von der Target in den *Raumwinkel* 1, mit Intensität wie in Richtung 90° zum Protonenstrahl, emittierte γ -Quantenzahl pro Monitorstoss.
- R Abstand der Pb-Folie von der Target.
- m Masse der Pb-Folie.
- A_{Pb} Atomgewicht von Blei.
- N Zahl der Atome pro Mol.
- σ_{Pb} Nicht nuklearer (Streu-) Querschnitt von Blei (siehe Seite 492).
- N_1 Während Messzeit t_{m_1} gemessene Stosszahl am Messzählrohr mit vorgelegter Pb-Folie.
- M_1 Während t_{m_1} registrierte Monitorstosszahl.
- M_2 Während t_{m_2} registrierte Monitorstosszahl.
- N_2 Während t_{m_2} gemessener Untergrund am Messzählrohr.
- K_{abs} Durchlässigkeit der Target für Li- γ -Strahlung in Richtung auf Pb-Folie.
- $K_{(90^{\circ})}^{\Theta}$ Verhältnis $\frac{\gamma\text{-Intensität in Richtung auf Folie}}{\gamma\text{-Intensität } \perp \text{ zum Protonenstrahl}}$.

Dem Resultat der γ -Zählung zufolge emittiert die zur Verfügung stehende Apparatur³⁾ im Maximum etwa $5 \cdot 10^7$ Quanten pro Sekunde.

Wie aus obigem ersichtlich, wurde die Absolutmessung nicht direkt weiterverwendet, vielmehr wurden Monitor-Zählrohre (Wismut-Blei-Zählrohre) geeicht, so dass die γ -Intensität nun über

längere Zeit auf einfachere Weise gemessen werden kann. Diese Eichung verdient insofern Interesse, als Kurven von FOWLER, LAURITSEN und LAURITSEN⁴⁾ eine Empfindlichkeitsberechnung dieser Zählrohre gestatten. Die so berechnete Empfindlichkeit wird bei der experimentellen Prüfung systematisch um 50 bis 100% zu hoch befunden. Teilweise dürften Änderungen im sensibeln Volumen (durch Temperatureinflüsse bedingt) dafür verantwortlich sein, teilweise kann aber auch ein geringer Fehler darauf zurückgeführt werden, dass zur Zeit, als die Tabellen der Publikation⁴⁾

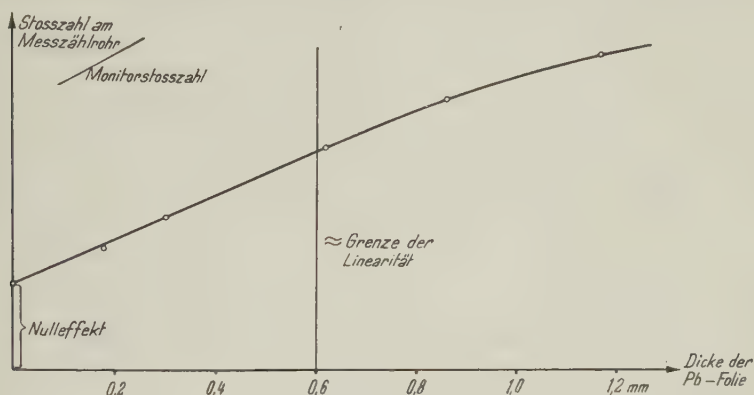


Fig. 2.

gerechnet wurden, nur die 17,6 MeV-Komponente der Li- γ -Strahlung bekannt war.

Die oben beschriebene Methode ist zur Zählung von γ -Quanten mit Energien von etwa 12 bis 40 MeV geeignet. In diesem Energiebereich ist vor allem die Energieverteilung der Sekundärelektronen günstig, und in direktem Zusammenhang damit verlässt der grösste Teil der Sekundärelektronen die Pb-Folie ungefähr in Richtung der einfallenden γ -Quanten. Die am Messzählrohr registrierte Stosszahl wird durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$N_{\text{reg}} = I \cdot C \cdot N \cdot (Z \cdot \Phi_{\text{Compton}} + Z^2 \cdot \Phi_{\text{Paar}})$$

wobei I die γ -Intensität, C einen Absorptions-, Raumwinkel- und Winkelverteilungsfaktor, N die Anzahl Atome in der vorgelegten Folie und Z die Kernladung dieser Atome bedeutet. Verwendung von Folien aus verschiedenen Materialien (unter Konstanzhaltung von $N \cdot Z$, bzw. $N \cdot Z^2$) gestattet den Paar- und den Comptonquerschnitt einzeln zu messen. Solche Messungen bildeten im Verlaufe der vorliegenden Arbeit eine weitere angenehme Kontrolle für die Zuverlässigkeit der angewandten Methode.

B. Bestimmung des Wirkungsquerschnittes der Reaktion $\text{Cu}^{63}(\gamma, n)$ in bezug auf Li- γ -Strahlung.

Die Bestimmung dieses Wirkungsquerschnittes kann auf verschiedene Arten erfolgen: beispielsweise ist es möglich, eine Neutronenzählung durchzuführen⁵⁾, es können aber auch die vom Cu^{62} emittierten Positronen gezählt⁶⁾, oder aber es kann deren Annihilationsstrahlung zur Abschätzung des Querschnittes herangezogen werden.

Im vorliegenden Fall wurde die zweite Methode benutzt. Die hauptsächlichsten Probleme der Messung sind: Raumwinkel bei der Bestrahlung des Kupfers, Raumwinkel und Empfindlichkeit des Zählrohrs bei der Aktivitätsmessung. Physikalische Gleichwertigkeit (Eigenabsorption, Rückstreuung) sowie identische Geometrie von bestrahltem Kupfer und einem vom National Bureau of Standards gelieferten, absolut geeichten RaD + E-Präparat sollten die beiden letzten Probleme eliminieren. Eine kreisrunde Cu-Folie von $\frac{1}{100}$ mm Dicke und 12 mm Durchmesser lieferte aber auch bei günstigem Bestrahlungs-Raumwinkel zu wenig Intensität, um in nützlicher Frist eine brauchbare Statistik zu ermöglichen. Es wurden deshalb Cu-Pillen von gleichem Durchmesser, aber Sättigungsdicke (1,5 mm) für 2,9-MeV-Positronen, der Li- γ -Strahlung ausgesetzt. Indem man eine Folie und eine Pille am Betatron gleichzeitig und unter gleichem Raumwinkel bestrahlte und nachher das Aktivitätsverhältnis mass, konnten diese Messungen am dicken Präparat auf Folienbestrahlungen reduziert werden. Zu bemerken ist noch, dass die gegenüber der Folie etwas veränderte Registrier-Geometrie sowie die relativ stärkere Annihilationsstrahlung der Pille keinen Einfluss auf das Messresultat ausüben, da entsprechende Faktoren in der Auswerteformel sowohl im Nenner als im Zähler erscheinen. Hingegen ist der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes der Reaktion $\text{Cu}^{63}(\gamma, 2n)$ von der Energie der γ -Strahlung insofern Rechnung zu tragen, als bei der zeitlichen Korrektur der Aktivitätsmessungen nach Bestrahlung am Betatron die hier auftretenden Störaktivitäten zu berücksichtigen sind.

Beträchtlichen Arbeitsaufwand erforderte die rechnerische Erfassung der Bestrahlungsgeometrie. Neben dem durchschnittlichen Raumwinkel jedes Folien-Flächenelementes in bezug auf die Target, welche durch eine elliptische Fläche von etwa der gleichen Grösse die die Cu-Folie dargestellt wird, mussten noch die durchschnittliche Absorption, die ein von einem beliebigen Punkt der Target kommender, das Folien-Element treffender γ -Strahl erleidet sowie

die Winkelverteilung der Li- γ -Strahlung (7) relativ zur Richtung des Protonenstrahls in Betracht gezogen werden.

Für die Auswertung benützten wir folgende Formel:

$$\sigma = \frac{1}{N_0} \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{1}{N_{\gamma}^{(90^\circ)} \cdot M} \cdot \frac{N_{\text{Cu}} \cdot \frac{1}{K(\beta^+)} \cdot \frac{1}{Re}}{N_{\text{RaD+E}} \cdot \frac{1}{K(\beta^-)}} \cdot N_{\text{nom}} \Re(\beta^-) \cdot F \cdot \frac{t_B}{\vartheta} \cdot K(t)$$

N_0	Anzahl Atome in der Cu-Folie.
Ω	Raumwinkel bei der Bestrahlung einer Cu-Folie mit Berücksichtigung von γ -Absorption und Winkelverteilung.
$N_{\gamma}^{(90^\circ)}$	siehe Seite 494.
M	Anzahl Monitorstöße während der Bestrahlung.
t_B	Bestrahlungszeit.
N_{Cu}	Stosszahl während t_m am Stirnzählrohr mit bestrahlter Pille.
$K(\beta^+)$	Durchlässigkeit des Stirnzählrohrfensters für β^+ aus Cu-Pille (exp. bestimmt, graphische Extrapolation).
$N_{\text{RaD+E}}$	Stosszahl in der Zeit t_m am Stirnzählrohr mit RaD+E Standard.
$K(\beta^-)$	Durchlässigkeit des Stirnzählrohrfensters für β^- aus Standard. (exp. bestimmt, graphische Extrapolation).
N_{nom}	Anzahl der Zerfälle im Standard während der Zeit t_m .
$\Re(\beta^-)$	Rückstreufaktor für β^- laut Begleitschreiben zum RaD+E Standard.
ϑ	Zerfallzeit von $\text{Cu}^{62} = \frac{\text{Halbwertszeit von } \text{Cu}^{62}}{e_{\log 2}}$.
$K(t)$	zeitliche Korrektur der Aktivitätsmessung:
	$K(t) = \frac{e^{-t_w/\vartheta}}{(1 - e^{-t_B/\vartheta})(1 - e^{-t_m/\vartheta})}$
t_m	Messzeit.
t_w	Zeit von Bestrahlungsende bis Messbeginn.
Re	Verhältnis $\frac{\text{Aktivität von Cu-Pille}}{\text{Aktivität von Cu-Folie}}$, wenn beide unter gleichem Raumwinkel am Betatron bestrahlt. Betr. zeitlicher Korrektur siehe Seite 4.
F	Fläche der Cu-Folie.

Trotzdem beinahe jeder Faktor (mit Ausnahme von N_{nom} und $\Re(\beta^-)$ im Verlaufe der Messung experimentell bestimmt werden musste, rührt der mögliche Messfehler nur zu einem geringen Teil von diesen experimentell bestimmten Grössen her. Die hauptsächliche Unsicherheitsquelle stellt das RaD + E Standard dar. Es handelt sich hierbei um ein praktisch masseloses Deposit ($0,775 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$) auf einer Kreisfläche von 12 mm Durchmesser, deren Unterlage eine Silberscheibe von 1 Zoll Durchmesser und 1,5 mm Dicke bildet. Infolge der Rückstreuung ändert sich das Energiespektrum der Elektronen, insbesondere wird das Energie-

spektrum eine Funktion des Austrittswinkels (relativ zur rückstreuenden Silberfläche). Dieser Effekt wirkt sich bei der Extrapolation auf Absorberdicke null aus und bewirkt eine wesentliche Unsicherheit*). Entsprechend der Natur der bei der Rückstreuung auftretenden Effekte kann man allgemein nur bei definierter Geometrie und definierter Empfindlichkeit der Registrieranordnung von einem Rückstreuungsfaktor sprechen.

Als Resultat der Wirkungsquerschnitt-Bestimmung ergab sich ein Wert von 0,048 barn, mit einer maximalen Fehlermöglichkeit von 30% (wahrscheinlicher Fehler 15%). Im folgenden sei ein Vergleich mit Literaturwerten gegeben:

Autoren	σ Li- γ -Strahlung
H. WÄFFLER, O. HIRZEL ⁶⁾ . .	0,12 \pm 0,03 barn
B. D. McDANIEL, R. L. WALKER, M. B. Stearns ⁵⁾	0,055 \pm 0,012 barn für beide Isotope
eigene Messung	0,048 \pm 0,008 barn

Es sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, dass das Resultat der Veröffentlichung⁵⁾ auf Grund einer Neutronenzählung erhalten wurde.

Benützt man die Kurven von JOHNS u. a.¹¹⁾ über den Verlauf des Wirkungsquerschnittes des (γ , n)-Prozesses am Cu⁶³ und das Intensitätsverhältnis der 3 Komponenten (17,6; 14,8; 12,5 MeV = 1:1/2:1/5) der Lithium- γ -Strahlung nach NABHOLZ u. a.⁷⁾, so berechnet sich der Wirkungsquerschnitt σ 17,6, Cu⁶³(γ , n) Cu⁶² — 0,063 barn.

C. Wirkungsquerschnitt der Reaktion C¹² (γ , α) in bezug auf Li- γ -Strahlung.

Auch bei dieser Messung stand das Raumwinkelproblem der Bestrahlungsgeometrie im Vordergrund. Wie beim Cu⁶³ musste wieder mit dem Planimeter gearbeitet werden.

Die Fehlermöglichkeit bei dieser Wirkungsquerschnitt-Bestimmung ist vor allem durch die Statistik sowie den nicht genau bekannten C-Gehalt der Photoplatten gegeben. Eine untergeordnete Rolle spielt der mögliche Messfehler bei der γ -Zählung.

*) An dieser Stelle sei eine umfangreiche Zusendung über diesen Gegenstand verdankt, die uns H. SELIGER vom National Bureau of Standards zukommen liess⁸⁾.

Als Resultat ergab sich für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\text{C}^{12}(\gamma, 3\alpha)$ ein Wert von $1,75 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$, bei einer wahrscheinlichen Fehlermöglichkeit von $\pm 15\%$.

Vergleich mit Literaturwerten:

Autoren	$\sigma \text{ C}^{12}(\gamma, 3\alpha)$
H. WÄFFLER, S. YOUNIS ⁹⁾	$(0,8 \pm 0,3) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$
J. J. WILKINS, F. K. GOWARD ¹⁰⁾ .	$(1,3 \pm 0,35) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$
eigene Messung	$(1,75 \pm 0,25) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$

Mit denselben Annahmen für das Spektrum der Lithium- γ -Strahlung (siehe Seite 498) und den Wirkungsquerschnittverlauf*) der Kohlenstoffspaltung von GOWARD¹⁰⁾ u. a. erhält man für den Kohlenstoffquerschnitt $\text{C}^{12}(\gamma, 3\alpha)$ bei 17,6 MeV

$$\sigma_{17,6} = 2,4 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

Abschliessend möchten wir Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für seine Ratschläge und Unterstützung danken.

Literaturverzeichnis.

- 1) P. V. C. HOUGH: Phys. Rev. **80**, 1074 (1950).
- 2) R. L. WALKER, Phys. Rev. **76**, 529 (1949).
- 3) O. HIRZEL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **20**, 373 (1947).
- 4) W. A. FOWLER, C. C. LAURITSEN and T. LAURITSEN, Rev. Mod. Phys. **20/1**, 236 (1948).
- 5) B. D. McDANIEL, R. L. WALKER, M. B. STEARNS, Phys. Rev. **80**, 807 (1950).
- 6) H. WÄFFLER, O. HIRZEL, Helv. Phys. Acta **21**, 200 (1948).
- 7) H. NABHOLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **25**, 153 (1952).
- 8) H. H. SELIGER, Phys. Rev. **78**, 491 (1950).
- 9) H. WÄFFLER, S. YOUNIS, Helv. Phys. Acta **22**, 617 (1949).
- 10) J. J. WILKINS, F. K. GOWARD, Mitteilung A. E. R. E. HARWELL, 24. 3. 1952.
- 11) H. E. JOHNS, L. KATZ, R. A. DOUGLAS und R. N. H. HASLAM, Phys. Rev. **80**, 1062 (1950).

*) Der Wirkungsquerschnittverlauf der Kohlenstoffspaltung $\sigma_{17,6}/\sigma_{14,8}$ hängt sehr stark von der Annahme der Linienbreite der 14,8 MeV-Komponente ab⁷⁾¹⁰⁾.

Rectification

par A. Perrier, Lausanne.

(30. IV. 1952.)

Dans la note «Interprétation thermoélectrique du magnétogalvanisme»¹⁾, l'alinéa de la page 585: «Ainsi l'énergie prélevée ne peut être fournie par la source primaire, etc....» est une expression erronée, en contradiction d'ailleurs avec la proposition correcte du bas de la page 584: «Il est clair alors que le courant secondaire emprunte de l'énergie au primaire...».

Les alinéas 2, 3, 4, p. 585, doivent prendre la forme ci-dessous:

«En présence du circuit secondaire fermé, les composantes J_y et E_y du courant et du champ (dues au pouvoir rotationnel du milieu) sont de *sens inverse*; le travail est ainsi *négatif*: il mesure l'énergie *exportée* et correspond à la diminution relevée plus haut de la chaleur Joule par rapport à ce qu'elle serait en l'absence de prélèvement inductif.

Il va d'ailleurs de soi que le total des énergies Joule et inductive égale l'énergie fournie par le courant principal (suivant Ox). Mais à l'encontre de ce qui se passe dans une induction mutuelle classique, le champ contreélectromoteur E_y est *normal* au lieu d'être parallèle au champ E_x qui entretient le courant principal; dès lors, le transfert de l'énergie de l'un à l'autre ne peut s'effectuer directement: c'est par l'intermédiaire de l'accroissement (imputable à E_x) de l'énergie cinétique des électrons qu'il se réalise. *En sorte qu'il est raisonnable de qualifier de thermoélectrique la force électromotrice de HALL*, qu'elle relève de H (*vide*) ou du réseau *aimanté* (matière).

On pourrait arriver aux mêmes conclusions en invoquant un régime permanent, mais les réalisations techniques correspondantes seraient fort malaisées.»

¹⁾ Helv. Phys. Acta, **22**, 583 (1949).

Wirkungsprinzipien zur Feldtheorie der Materie

von W. Scherrer, Bern.

(13. III. 1952.)

Der naheliegendste Versuch, Gravitation und Elektrizität formal zu vereinigen, kann auf das Wirkungsprinzip

$$\delta \int \left(R + \frac{1}{2} \kappa F_{e\sigma} F^{\sigma e} \right) \sqrt{-G} dx = 0 \quad (1)$$

basiert werden, wo R den Krümmungsskalar, $F_{e\sigma}$ die Feldstärken, κ die Einsteinsche Gravitationskonstante und dx das Produkt der Koordinatendifferentiale bedeutet.

Dieser Ansatz liefert aber bekanntlich nur die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum. Wenn man an ihm festhalten will, muss man das Elektron als echte Singularität auffassen und erhält eine unendliche Totalenergie, wie im klassischen Falle.

Gegen alle Ansätze, welche Gravitations- und Materiewirkung nur additiv vereinigen, lässt sich grundsätzlich einwenden, dass sie auch bei Abwesenheit von Materie noch Gravitationsfelder liefern.

Ich habe daher in zwei früheren Arbeiten das Wirkungsprinzip

$$\delta \int \left(R \psi^2 + 4 \omega G^{e\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_e} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right) \sqrt{-G} dx = 0 \quad (2)$$

analysiert, das offenbar dem eben genannten Einwand entgeht¹⁾²⁾. Ein Skalarfeld habe ich gewählt, weil es mir unerlässlich scheint, bei jeder wesentlichen Abweichung von (1) zuerst die einfachste Möglichkeit zu prüfen.

Die statisch-zentralsymmetrische Lösung bringt eine Verbesserung gegenüber (1), da sich ihre Totalenergie als endlich erweist. Unbefriedigend dagegen ist, dass sie eine einparametrische Schar von Fällen verschiedener Struktur umfasst, also ein Kontinuum von Teilchen.

Der Gedanke, dass man aus diesem Kontinuum nur diejenigen Lösungen zulassen dürfe, für welche auch die Raumintegrale der

¹⁾ Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld, *Helv. Phys. Acta* **22**, S. 537—551 (1949).

²⁾ Dazu zweite Mitteilung: *Helv. Phys. Acta* **23**, S. 547—555 (1950).

Impulsdichten endlich sind, scheint mir nun nicht nur natürlich, sondern geradezu zwingend zu sein. Stellt man diese Forderung, so bleiben nur zwei punktförmige Grenzlösungen vom Diracschen Typus: Quellfeld ∞ , Aussenfeld 0. Mit solchen Lösungen kann man aber keine eigentliche Feldtheorie treiben.

Überdies ist mir bei (2) der Anschluss an die Elektrodynamik nicht gelungen.

Als natürliches weiteres Ziel ergab sich daher der Versuch, die Vorteile von (1) und (2) zu vereinigen durch das Prinzip

$$\delta \int (R \cdot G^{\sigma\sigma} \Phi_e \Phi_\sigma + \varepsilon F_{e\sigma} F^{\sigma e}) \sqrt{-G} dx = 0, \quad (3)$$

wobei die Φ_e die zu $F_{e\sigma}$ gehörigen Potentiale bedeuten und ε aus dimensionellen Gründen eine reine Zahl sein muss.

Prinzipien vom Typus (3) bieten einen verwickelten Aspekt, so dass ich längere Zeit an der Existenz exakter Lösungen zweifelte. Näherungslösungen reichen aber zur Beurteilung der Sache nicht aus, da man zur Darstellung eines Teilchens den Totalverlauf des Feldes überblicken muss.

Erst nachdem ich aus meinem ursprünglichen Ansatz³⁾ die kosmologische Konstante entfernt hatte, gelang mir die exakte Bestimmung einer statisch-zentralsymmetrischen Lösung. Wiederum ergab sich eine einparametrische Schar von strukturell verschiedenen Fällen mit endlicher Totalenergie.

Wenn man aber jetzt die zusätzliche Forderung endlicher Impulsintegrale stellt, bleiben nur noch ganz wenig strukturell verschiedene Fälle, die *nicht* im Diracschen Sinne entartet sind: *Zwei* im Falle $\varepsilon > 1$ und *einer* im Falle $0 < \varepsilon < 1$.

Besonders interessant ist der Fall $\varepsilon > 1$. Man erhält zwei Teilchen, deren Energien sich verhalten wie

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\pi - \text{Ar ctg} \sqrt{\varepsilon - 1}}{\text{Ar ctg} \sqrt{\varepsilon - 1}}, \quad (4)$$

und deren Ladungen entgegengesetzt gleich sind, sofern man sie nach dem Verhalten der Potentiale im Unendlichen beurteilt.

Über das Vorzeichen der Energie und über die Massenwerte erhält man keine eindeutige Auskunft.

Wenn man die Gleichung

$$R^\sigma_\sigma - \frac{1}{2} \delta^\sigma_\sigma R = -\kappa T^\sigma_\sigma$$

³⁾ Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, Neue Folge, 6. Band, SC. IX (1948).

im Unendlichen mit der Poissonschen Gleichung identifizieren will, muss man κ negativ wählen und erhält dann zwei positive Massen $M_1 = E_1 c^{-2}$ und $M_1 = E_2 c^{-2}$.

Wenn man aber die geodätischen Bahnen im Unendlichen als Vergleichsmittel benützt, erhält man eine positive Masse $M_1^* = M$ und eine negative Masse $M_2^* = -M$. Die Verhältnisse der Beträge ergeben sich aus (4) in Verbindung mit

$$\frac{M_1}{M} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\text{Ar ctg } \sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{\varepsilon - 1}}. \quad (5)$$

Die Frage, ob dieses Modell zur Darstellung der empirischen Verhältnisse geeignet sei, kann auf Grund der vorliegenden Ergebnisse noch nicht entschieden werden. Seine Bedeutung erblicke ich darin, dass es zeigt, wie eine mathematisch natürliche Modifikation des klassischen Ansatzes (1) die Möglichkeit einer rein feldmässigen Auszeichnung asymmetrischer diskreter Lösungen liefert.

Eine heikle Stelle, auf die meines Erachtens die Aufmerksamkeit gelenkt werden sollte, ist die Entartung des Linienelements

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - g^2 dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (6)$$

im Quellpunkt. Diese Entartung hat nämlich fatalerweise invarianten Charakter. Immerhin ergeben die Ansätze (2) und (3) insofern eine Verbesserung gegenüber dem klassischen Falle, als für sie wenigstens f nicht verschwindet.

Wesentlich für die Durchführbarkeit dieser Ansätze ist die Tatsache, dass die Wirkungsgrößen homogen in den $G_{\rho\sigma}$ und quadratisch homogen in den Feldgrößen sind. Es stellt sich daher die Frage, wie weit man unter diesen Bedingungen die Ansätze verallgemeinern könne, ohne die Ableitungsordnung zu erhöhen. Während (2) vermutlich schon die allgemeinste Möglichkeit darstellt, kommen für (3) folgende 5 Invarianten in Betracht:

$$\begin{aligned} H &\equiv R \Phi_\rho \Phi^\rho \\ J &\equiv R_{\rho\sigma} \Phi^\rho \Phi^\sigma \\ L &\equiv D_\rho \Phi^\sigma D_\sigma \Phi^\rho \\ M &\equiv D_\rho \Phi^\rho \cdot D_\sigma \Phi^\sigma \\ F &\equiv \frac{1}{2} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (7)$$

Das entsprechende Wirkungsprinzip lautet:

$$\int (H + 2 \xi J + 2 \eta L + \zeta M + 2 \varepsilon F) \sqrt{-G} dx = 0, \quad (8)$$

wobei ξ , η , ζ und ε reine Zahlen sind. Es besitzt im statisch-zentral-symmetrischen Falle dieselbe Lösungsstruktur wie (3), abgesehen von numerischen Verschiebungen.

Eine ausführliche Darstellung der hier skizzierten Ergebnisse wird in den *Commentarii Mathematici Helvetici* erscheinen.

Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung in Abhängigkeit der Kernladungszahl für Gamma-Strahlen von Th ($C+C''$),

RaC und Co^{60}

von B. Hahn, E. Baldinger und P. Huber.

(10. IV. 1952.)

Summary. The Z-dependence of the pair-creation cross-section in the Coulomb field of nuclei with the Gamma-rays of Th($C+C''$), RaC and Co^{60} has been measured. Positive deviations from the theory of BETHE and HEITLER (Born's approximation) are found, which increase with decreasing energy of the Gamma-rays and increasing atomic number. The results are in good agreement with more exact calculations of JAEGER and HULME.

1. Einleitung.

Der Wirkungsquerschnitt Φ für die Erzeugung von Elektronenpaaren im Coulombfeld eines Atomkerns durch Gamma-Strahlen verhält sich nach der Theorie von BETHE und HEITLER¹⁾ proportional zum Quadrat der Kernladungszahl Z , solange die elektrostatische Abschirmung der Schalelektronen vernachlässigt werden kann. Da in dieser Theorie von der Bornschen Näherung Gebrauch gemacht wird, ist ihre Anwendbarkeit beschränkt. Das Kriterium für die Zulässigkeit der Bornschen Näherung fordert, dass im Abstand einer De Broglie-Wellenlänge vom Kern die kinetische Energie der Paarteilchen viel grösser sei, als der Betrag ihrer potentiellen Energie im Kernfeld. Für grosses Z und kleine Gamma-Energie sind Abweichungen von der Bethe-Heitlerschen Theorie zu erwarten.

Exaktere Rechnungen, ohne Anwendung der Bornschen Näherung, wurden von JAEGER und HULME²⁾³⁾⁴⁾ für die Gamma-Energien von 3 und 5 mc^2 ausgeführt. Die Resultate stimmen mit denjenigen von BETHE und HEITLER für kleine Z überein; dagegen resultieren für mittlere und grosse Z Abweichungen, die mit abnehmender Gamma-Energie grösser werden.

Bei Blei und einer Gamma-Energie von 5 mc^2 beträgt die zu erwartende Abweichung + 20%. Ältere Messergebnisse von HEITLING⁵⁾ und DEBENEDETTI⁶⁾ mit der ThC'' -Gamma-Strahlung (5,1 mc^2) bestätigen eine solche Zunahme des Wirkungsquerschnittes nicht. Dagegen fanden HAHN, BALDINGER und HUBER⁷⁾ mit der

RaC-Gamma-Strahlung und CLELAND, TOWNSEND und HUGHES⁸⁾ mit der ThC''-Strahlung Abweichungen von der Grössenordnung, wie sie nach JAEGER und HULME zu erwarten sind. Ausserdem stimmen ähnliche Rechnungen derselben Autoren⁹⁾ für die innere Paarerzeugung mit Messergebnissen von LATISHEV¹⁰⁾ gut überein.

In der vorliegenden Arbeit wird die Z-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes der Paarerzeugung mit den Gamma-Strahlen von Th(C + C''), RaC und Co⁶⁰ untersucht. Es werden Relativwerte gemessen, die sich beim Th(C + C'') und beim Co⁶⁰ auf Wismuth und beim RaC auf Kadmium beziehen. Der Nachweis der Paarerzeugung erfolgt indirekt durch das Messen der 2-Quanten-Vernichtungsstrahlung. Die beiden Annihilationsquanten lösen in zwei Szintillationszählern koinzidierende Impulse aus. Für die Messungen mit der Th(C + C'') und der Co⁶⁰-Gamma-Strahlung werden nur Metalle, für die Messung mit der RaC-Gamma-Strahlung 9 Metalle, 2 Metalloxyde und 1 Nichtmetall verwendet.

Die Gamma-Strahlen treffen auf einen Probekörper mit der Kernladungszahl Z und erzeugen in diesem Elektronenpaare. Ein Positron wird im Probekörper selber, oder in der ihn umgebenden Aluminiumkassette auf thermische Geschwindigkeit abgebremst und vereinigt sich mit einem Elektron zu einem Positronium. Parapositronium (Spin 0) zerfällt nach einer mittleren Lebensdauer von $1,25 \cdot 10^{-10}$ sec¹¹⁾ durch 2-Quanten-Vernichtungsstrahlung, Orthopositronium (Spin 1) nach einer mittleren Lebensdauer von $1,4 \cdot 10^{-7}$ sec¹²⁾ durch 3-Quanten-Vernichtungsstrahlung. Die eine Art des Positroniums kann in Metallen durch Elektronenaustausch mit Leitungselektronen in die andere Art umgewandelt werden. Erfolgt dieser Austausch in einer Zeit, die kurz ist, verglichen mit der Lebensdauer des Orthopositroniums, so verhält sich die Häufigkeit der Zerfälle durch 2-Quanten-Vernichtungsstrahlung zur Häufigkeit der Zerfälle durch 3-Quanten-Vernichtungsstrahlung wie 370 zu 1¹¹⁾²⁵⁾. RICH¹³⁾ erhielt für Kupfer experimentell ein Verhältnis von 330 ± 70 zu 1. Messungen von DEUTSCH¹⁴⁾ in Gasen zeigen dagegen, dass die 3-Quanten-Vernichtungsstrahlung beim Fehlen von Austauschelektronen (unpaarige Hüllenelektronen oder Leitungselektronen) sehr viel häufiger auftritt.

Vereinigt sich das Positron mit einem gebundenen Elektron, so besteht die Möglichkeit der 1-Quanten-Vernichtungsstrahlung. Dieser Prozess ist wegen der erforderlichen Impulsübertragung auf den Atomkern um so wahrscheinlicher, je stärker das Elektron an den Kern gebunden ist. Wegen der elektrostatischen Abstossung durch das Coulombfeld des Kerns können jedoch thermische Posi-

tronen die inneren Elektronenschalen nicht erreichen. Nach JAEGER und HULME¹⁵⁾ ist das Wahrscheinlichkeitsverhältnis von 1-Quanten- zu 2-Quanten-Vernichtungsstrahlung in Blei kleiner als 0,01.

Beim Zerfall von schnellen Positronen durch 2-Quanten-Vernichtungsstrahlung bilden die beiden Annihilationsquanten keinen Winkel von 180° und besitzen im allgemeinen auch verschiedene Energien. Nach HEITLER¹⁶⁾ zerfallen praktisch unabhängig vom Material nur wenige Prozente der Positronen bevor sie thermische Geschwindigkeiten erreicht haben. Dieser Prozentsatz ist abhängig

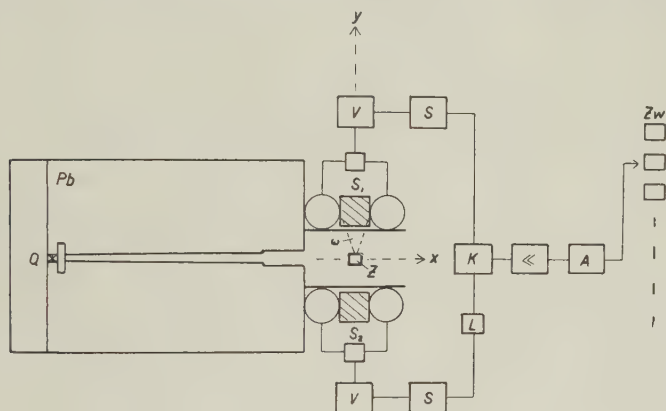


Fig. 1.

Messanordnung.

von der Anfangsenergie T_0 der Positronen und beträgt z. B. für $T_0 = mc^2$ ca. 3%.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass in Metallen praktisch alle Positronen durch 2-Quanten-Vernichtungsstrahlung zerfallen, wobei die Annihilationsquanten einen Winkel von 180° bilden.

2. Messanordnung.

In Fig. 1 ist die Messanordnung dargestellt. Der Abstand zwischen dem Gamma-Präparat Q und dem Probekörper Z ist gegeben durch diejenige Bleidicke, die erforderlich ist, um die Szintillationszähler S_1 und S_2 von der direkten Gamma-Strahlung genügend abzuschirmen. 5 cm Blei reduziert die Intensität der verwendeten Gamma-Strahlung ca. um einen Faktor 10. Der Bleikanal ist so beschaffen, dass von der Strahlungsquelle aus gesehen, die Vorder-

fläche des Probekörpers gerade noch sichtbar ist. Zur Verminderung der Streustrahlung am Ende des Kanals ist das Blei um einige mm zurückversetzt. Die Verbindungslinie y von Zähler S_1 zu Zähler S_2 bildet mit der Einfallsrichtung x der primären Gamma-Strahlung einen Winkel von 90° .

Die Probekörper Z sind Quader mit den Kantenlängen $x_0 = 8$ mm, $y_0 = 6$ mm und $z_0 = 16$ mm. Positronen, die nahe der Oberfläche entstehen, können aus dieser austreten und für die Messung verloren gehen. Damit auch solche Positronen bei der Messung erfasst werden, befindet sich der Probekörper in einer 2 mm dicken Aluminiumkassette.

Die Szintillationszähler bestehen je aus einem Anthracen-Kristall und einem Paar von Multipliern¹⁷⁾ (Typ 931A). Die Zähler werden durch 2 mm Blei gegen weiche Streustrahlung abgeschirmt.

Die Häufigkeit der gewünschten Koinzidenzen nimmt wegen der Richtungskorrelation der Annihilationsquanten von 180° mit dem Raumwinkel ω linear ab. Für andere Effekte ohne Richtungskorrelation besteht dagegen eine quadratische Abhängigkeit. Der Abstand der Zähler wird darum mit Vorteil möglichst gross gewählt.

Die Impulse jedes Szintillationszählers werden mit einem gegengekoppelten RC-Verstärker V (2 MHz Bandbreite) ca. 100fach verstärkt und bringen bei ausreichender Amplitude eine „Schmitt-Trigger“-Stufe S zum Ansprechen. Bevor die Impulse auf die Koinzidenzstufe K gelangen, werden sie mit einem RC-Glied „differenziert“, um ein besseres und von der Impulsbreite unabhängiges Auflösungsvermögen zu erhalten. Die 2fach Koinzidenzschaltung ist eine Rossi-Stufe mit Kathodenausgang¹⁸⁾. Das Auflösungsvermögen der Anordnung beträgt $\tau = 3,5 \cdot 10^{-7}$ sec. Zum Messen der zufälligen Koinzidenzen wird die Laufzeitkette L eingeschaltet. Die verstärkten Koinzidenzimpulse gelangen über das „Antistörgerät“ A (Abschnitt 3) auf die Zählwerke Zw . Nach jeder Stunde wird automatisch auf ein neues Zählwerk umgeschaltet. So können abnormale Schwankungen in der Stosszahl auch bei Dauermessungen erkannt werden.

3. Das „Antistörgerät“.

Bei Messungen mit RaC und Co^{60} als Gamma-Quellen wurde nur ca. 1 Impuls pro Minute registriert. Um eine genügend grosse Statistik der Koinzidenzereignisse zu erhalten, war es nötig, ununterbrochen während mehrerer Monate zu messen. Bei solchen Dauermessungen ist es wichtig, dass man sich gegen jede Art von elektrischen Störungen zuverlässig schützt. Als Störquellen kom-

men z. B. elektrische Funken in benachbarten Laboratorien in Frage. Elektrische Störungen geben Anlass zu Koinzidenzen, da bei genügend weit entfernter Störquelle die Feldstärke am Messort praktisch homogen wird. Dieses homogene Störfeld ermöglicht es, mit Hilfe einer Antikoinzidenzanordnung den Zählkanal während einer Störung zu unterbrechen.

Das Schaltschema einer solchen Anordnung (Antistörgerät) ist in Fig. 2 dargestellt. Die Störungen werden auf einer Rahmenantenne *A* aufgefangen und mit einem 2stufigen *RC*-Verstärker *V* 1000fach verstärkt. Der über eine Gleichrichterschaltung *G* auf den Spitzenwert der Störspannung aufgeladene Kondensator *C*

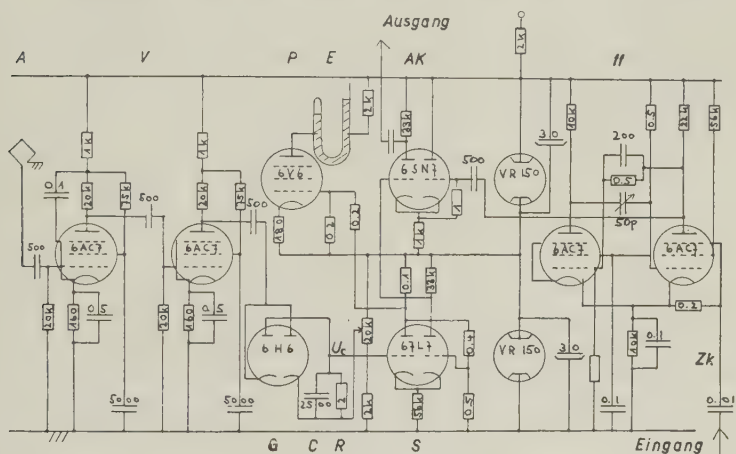


Fig. 2.
Antistörgerät.

entlädt sich mit der Zeitkonstanten $\tau = 5 \cdot 10^{-3}$ sec über den Widerstand *R*. Die Spannung U_c am Kondensator steuert eine Schmitt-Trigger-Stufe *S*. Diese ist mit einer Antikoinzidenzstufe *AK* gekoppelt, die den Zählkanal *Zk* während der Kippzeit blockiert. Bei anhaltenden Störungen wird wegen der gleichstrommässigen Koppelung dauernd gesperrt. Mit Hilfe eines Univibrators *ff* werden die Impulse im Zählkanal verzögert, damit sie erst bei der Antikoinzidenzstufe eintreffen, wenn diese schon blockiert ist.

Die Sperrzeit, die für die Messung verloren geht, ist normalerweise so kurz, dass sie vernachlässigt werden kann. Eine Kontrolle ist aber dennoch erwünscht. Zu diesem Zweck wird Wasser elektrolysiert. Der Elektrolyt *E* befindet sich im Anodenstromkreis einer Pentode *P*, welche im Ruhezustand gesperrt ist und durch die

Schmitt-Trigger Stufe gesteuert wird. In einem 3 mm weiten Glasrohr wird der entstehende Wasserstoff aufgefangen. Sein Volumen ist proportional der summierten verlorengegangenen Messzeit.

Die Zuverlässigkeit des Antistörgerätes kann mit künstlich erzeugten Störimpulsen überprüft und der Ansprechpegel eingestellt werden.

4. Experimentelles.

Bei den registrierten Ereignissen hat man zunächst zwischen den wahren und den zufälligen Koinzidenzen zu unterscheiden. Da die Einzelimpulse viel häufiger sind, als die Koinzidenzimpulse, ergibt sich die Anzahl der wahren Koinzidenzen als Differenz der Impulszahlen, die ohne und mit Laufzeit L (Fig. 1) gemessen werden. Die wahren Koinzidenzen setzen sich im wesentlichen aus den folgenden Anteilen zusammen:

1. Paarerzeugung im Probekörper.
2. Paarerzeugung in der Aluminiumkassette.
3. „Streuquanten“ (ein und dasselbe Quant bringt beide Zähler zum Ansprechen).
4. Höhenstrahlung.

Eine Differenzmessung mit und ohne Probekörper liefert nur dann den gewünschten Effekt allein, wenn die Koinzidenzen verursacht durch 2. bis 4. durch den Probekörper nicht merklich beeinflusst werden. Die Vernichtungsstrahlung der in der Aluminiumkassette erzeugten Positronen 2. und die Streuquanten 3. werden aber teilweise durch den Probekörper absorbiert. Bei der Messung ohne Probekörper ist es darum richtiger, diesen nicht völlig aus der Apparatur herauszunehmen, sondern in der Verbindungslinie der Zähler zu lassen und so stark zu verschieben, dass er von der primären Gamma-Strahlung nicht mehr getroffen wird. Das Häufigkeitsverhältnis der Koinzidenzen 1. zu den Koinzidenzen 2. 3. und 4., hier kurz als Verhältnis von Effekt zu Nulleffekt bezeichnet, beträgt im günstigsten Fall (Th(C + C'')-Strahlung, Bi) 12:1, im ungünstigsten Fall (Co-Strahlung, Fe) 1:3.

Um allfällige Schwankungen in der Konstanz der Apparatur herauszumitteln, wird abwechselungsweise mit einer Vergleichssubstanz (Cd oder Bi) gemessen.

Es wurden die folgenden Substanzen als Probekörper verwendet.

Al (99,99), Fe (99,85), Ni (99,5), Cu (99,9), Se (puriss. MERCK), Mo (JOHNSON and MATTHEY), Cd (99,9), Sn (99,9), Ce_2O_3 (puriss. MERCK), W (gereinigt, KAHLBAUM), Pb (99,9), Bi (puriss, KAHLBAUM), U-oxyd (99,8).

Vor allem bei kleinen Ordnungszahlen ist es wichtig, dass die verwendeten Elemente genügend rein sind. Eine Verunreinigung mit einem schweren Element von nur 1 %, bedeutet eine Verfälschung des Wirkungsquerschnittes der Paarerzeugung von ca. 10 %.

Beim Ceroxyd muss wegen der Paarerzeugung im Sauerstoff und beim Uranoxyd wegen der eigenen Radioaktivität eine kleine Korrektur angebracht werden.

5. Die primäre Gamma-Strahlung.

An Gamma-Quellen standen in genügender Intensität Präparate aus MsTh_1 , Ra und Co zur Verfügung.

Die effektiven Gamma-Spektren für die Paarerzeugung erhält man aus den der Literatur ¹⁰⁾¹⁹⁾²⁰⁾ entnommenen Linienspektren, indem man die Absorption der Gamma-Strahlung im verwendeten Filter und die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes*) der Paarerzeugung von der Photonenenergie in Betracht zieht. Die so berechneten effektiven Intensitäten der Gamma-Strahlen sind für Blei in Tab. 1 angegeben. Die intensivste Linie ist jeweils auf 1 normiert.

Tabelle 1.
Effektive Gamma-Spektren für Blei.

Co ⁶⁰		RaC		Th(C+C'')	
Filter: 1 mm Al		Filter: 5 mm Pb		Filter: 25 mm Pb	
MeV	I _{eff}	MeV	I _{eff}	MeV	I _{eff}
1,17	0,42	1,12	0,05		
		1,23	0,04		
1,33	1,00	1,29	0,04		
		1,37	0,16		
		1,52	0,16		
		1,62	0,16	1,60	0,02
		1,69	0,16		
		1,76	1,00		
		1,82	0,19	1,80	0,02
		2,09	0,25		
		2,20	0,76	2,20	0,04
		2,42	0,40		
				2,62	1,00
				3,20	0,04

Das Mesothor befindet sich im radioaktiven Gleichgewicht mit seinen Folgeprodukten. Die mit 25 mm Blei gefilterte Gamma-

*) Werte von JAEGER und HULME.

Strahlung ($\text{ThC} + \text{C}''$) ist praktisch monochromatisch. Die Hauptlinie besitzt eine Energie von $E_\gamma = 5,1 \text{ mc}^2$.

Das Radium-Spektrum besteht aus zahlreichen Linien (RaC), von denen aber die intensivsten in der Nähe von 4 mc^2 liegen. Eine effektive Gamma-Energie E_{eff} für Blei wird in Abschnitt 7 graphisch bestimmt. Für Radium beträgt $E_{\text{eff}}^{\text{Pb}} = 3,5 \text{ mc}^2$. Die Verwendung eines 5 mm dicken Bleifilters bezweckt eine Schwächung der Gamma-Strahlung unterhalb von 2 mc^2 , da diese die Zähler durch Einzelstöße unnötig belastet.

Die Strahlung des Co^{60} besteht aus den bekannten Linien von 1,17 und 1,33 MeV und besitzt eine effektive Gamma-Energie von $E_{\text{eff}} = 2,5 \text{ mc}^2$. Zum Absorbieren der β -Strahlen wird ein 1 mm dickes Aluminiumblech benutzt.

6. Zusammenhang zwischen Wirkungsquerschnitt und Koinzidenzstosszahl.

Die Zahl der im Probekörper pro sec erzeugten Elektronenpaare J beträgt

$$J = J_0 \cdot \frac{\kappa}{\mu} (1 - e^{-\mu x_0}). \quad (1)$$

Dabei bedeutet J_0 die Anzahl der Gamma-Quanten, die pro sec auf die Vorderfläche des Probekörpers trifft, $\mu = \sigma + \tau + \kappa$ den totalen Absorptionskoeffizienten pro cm der primären Gamma-Strahlung (Summe der Absorptionskoeffizienten für Comptoneffekt, Photoeffekt und Paarerzeugung) und x_0 die Dicke des Probekörpers in Richtung der primären Gamma-Strahlung.

Die Koinzidenzstosszahl K pro sec ergibt sich zu

$$K = \frac{1}{2\pi} J \cdot \omega a^2 \cdot e^{-\mu' y_0}, \quad (2)$$

wobei ω den Raumwinkel, a die Ansprechwahrscheinlichkeit der Zähler, μ' den totalen Absorptionskoeffizienten der Vernichtungsstrahlung und y_0 die Dicke des Probekörpers in Richtung der Verbindungslinie der Zähler bedeuten.

Unter Benutzung von Gl. 1 und Gl. 2 und der Beziehung $\kappa = \Phi \cdot N$ (N = Anzahl der Atome pro cm^3) berechnet sich der Wirkungsquerschnitt Φ der Paarerzeugung zu

$$\Phi = k \cdot \frac{K}{N} \cdot \frac{\mu x_0}{1 - e^{-\mu x_0}} \cdot \frac{1}{\frac{e^{-\mu' y_0}}{e^{-\mu' y_0}}}, \quad (3)$$

wobei $k = \frac{2\pi}{J_0 \omega a^2 \cdot x_0} = \text{const.}$

Die Grössen c und c' geben an, wievielmals mehr Koinzidenzen registriert würden, wenn die primäre Gamma-Strahlung, resp. die Vernichtungsstrahlung den Probekörper praktisch ungeschwächt verliesse. Die Absorptionskoeffizienten μ und μ' werden der Literatur^{21) 22)} entnommen und sind in Tab. 2 für die verschiedenen Elemente und für die Gamma-Energien von 5,1 und 1 mc^2 angegeben.

Die primäre Gamma-Strahlung wird im Probekörper vor allem durch Comptoneffekt geschwächt. Die Unsicherheit der Werte μ beträgt nur wenige Prozent. Der Fehler des Korrekturfaktors c wird im ungünstigsten Fall des Bleis auf 1% geschätzt.

Tabelle 2.

Substanz	μ	c	μ'	c'
Al	0.103	1,04	0,225	1,15
Fe	0.302	1,10	0,648	1,48
Ni			0,752	1,56
Cu	0.339	1,13	0,731	1,55
Se			0,386	1,27
Mo			0,890	1,71
Cd	0.324	1,12	0,766	1,59
Sn	0.276	1,11	0,664	1,49
Ce ₂ O ₃			0,147	1,10
W			0,769	1,59
Pb	0.468	1,18	1,695	2,65
Bi	0.406	1,16	1,473	2,42
U-oxyd			0,438	1,30

Die Vernichtungsstrahlung wird im Probekörper durch Comptoneffekt und bei schweren Elementen auch merklich durch Photoeffekt absorbiert. Die Grösse c' ist unabhängig vom Entstehungsort der Annihilationsstrahlung innerhalb des Probekörpers und gilt für Gamma-Quanten, die parallel zur y -Richtung verlaufen. Die Wegverlängerung durch Schräglaufen beträgt im Experiment höchstens 3,5%. Verwendet man in c' den totalen Absorptionskoeffizienten μ' , so wird vorausgesetzt, dass die absorbierte Strahlung für die Messung endgültig verloren geht, also auch die Compton-Streustrahlung nicht in die Zähler gelangt. Nach einer Abschätzung wird die Koinzidenzstosszahl durch die Compton-Streustrahlung im ungünstigsten Fall des Bleis um 1,5% erhöht. Mit einer zusätzlichen Unsicherheit im Absorptionskoeffizient für

Photoeffekt ergibt sich der Fehler der Korrekturgrösse c' höchstens zu 3%.

Der Absorptionskoeffizient μ' wurde für Blei zur Kontrolle auch experimentell bestimmt, indem die Dicke y_0 des Probekörpers variiert wurde. Dergemessene Wert stimmt mit den Werten von GOODMAN²¹⁾ und von DAVISSON²²⁾ für 1 mc² innerhalb von 3% überein.

In Tab. 2 werden die Grössen c und c' für die verschiedenen Probekörper angegeben. Die Werte für c beziehen sich auf die Th(C + C'')-Gamma-Strahlung.

Eine kleine Korrektur, die in Gl. 3 nicht enthalten ist, bezieht sich auf Elektronenpaare, die durch Compton-Streustrahlung erzeugt werden. Dieser Effekt liefert einen Beitrag zusätzlicher Paare von höchstens 3%.

7. Messergebnisse.

Die Messergebnisse der Z-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für die Gamma-Strahlen von Th(C + C''), RaC und Co⁶⁰ sind in Fig. 3a, b und c dargestellt. Aufgetragen ist die Grösse Φ/Z^2 in Abhängigkeit der Kernladungszahl Z. Da hier keine Absolutmessungen vorliegen, sind die Einheiten von Φ/Z^2 willkürlich. Die eingezeichneten Fehler sind lediglich die wahrscheinlichen statistischen Fehler.

Nach der Bethe-Heitlerschen Theorie müssten die Messpunkte auf einer Parallelen zur Z-Achse liegen. Der allgemeine Verlauf der Messwerte weicht aber in allen drei Fällen vom Z²-Gesetz ab. Mit abnehmender Gamma-Energie und wachsender Kernladungszahl werden die Abweichungen grösser.

In Tab. 3 sind die Ergebnisse der numerischen Rechnungen von JAEGER und HULME zusammengestellt.

Tabelle 3.

Theoretische Wirkungsquerschnitte der Paarerzeugung von JAEGER und HULME im Verhältnis zu den Werten von BETHE und HEITLER.

Gamma-Energie mc ²	Z	$\frac{\Phi_{J.H.}}{\Phi_{B.H.}}$	Δ %	Lit.
3	82	1,97	5	3
	65	1,62	5	
	50	1,31	5	
5,1	82	1,20	10	4
	54	1,00	10	

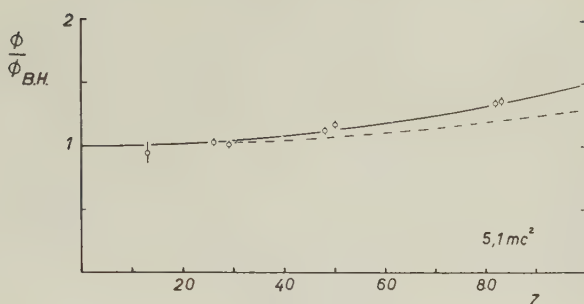


Fig. 3a.

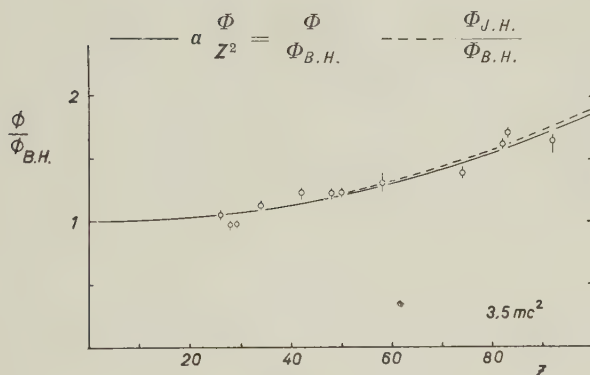


Fig. 3b.

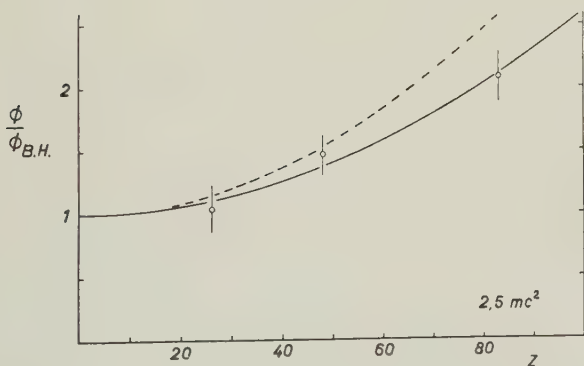


Fig. 3c.

Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung in Abhängigkeit der Kernladungszahl für Gamma-Strahlen von a) Th(C+C''), b) RaC und c) Co⁶⁰.

— experimentell - - - - theoretisch (JÄGER und HULMÉ).

Die ohne Bornsche Näherung berechneten Wirkungsquerschnitte ($\Phi_{J.H.}$) sind im Verhältnis zu den Werten von BETHE und HEITLER ($\Phi_{B.H.}$) angegeben. Diese Verhältnisse werden im folgenden kurz als theoretische Werte bezeichnet. Die Daten für 5,1 mc² enthalten bis zu 20% extrapolierte Terme, dürften aber nach Angaben der Autoren bis auf 10% richtig sein.

Die theoretischen Werte bei fester Energie liegen gut auf Kurven von der Form³⁾

$$\frac{\Phi}{\Phi_{B.H.}} = 1 + bZ^2. \quad (4)$$

Auch der experimentelle Verlauf der Z -Abhängigkeit wird durch Gl. 4 gut wiedergegeben. Diese Kurvenform wird darum übernommen und die Koeffizienten b mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Damit wird die experimentelle Kurve bei $Z = 0$ auf die theoretische Kurve angeglichen, d. h. über den Proportionalitätsfaktor a in Fig. 3 wird so verfügt, dass $Z^2/a = \Phi_{B.H.}$.

Die Verhältnisse $\Phi_{exp}/\Phi_{B.H.}$ und $\Phi_{J.H.}/\Phi_{B.H.}$ seien in Tab. 4 bei $Z = 82$ miteinander verglichen.

Tabelle 4.

Vergleich zwischen experimentellen und theoretischen Werten bei $Z = 82$.

Gamma-Quelle	Effektive Gamma-Energie mc ²	$Z = 82$	$Z = 82$
		$\frac{\Phi_{exp}}{\Phi_{B.H.}}$	$\frac{\Phi_{J.H.}}{\Phi_{B.H.}}$
Th(C+C'')	5,1	$1,33 \pm 0,03$	$1,20 \pm 0,12$
RaC	3,5	$1,58 \pm 0,05$	$1,61 \pm 0,16$
Co ⁶⁰	2,5	$2,08 \pm 0,22$	$2,55 \pm 0,50$

Die theoretischen Werte für RaC und Co⁶⁰ werden durch graphische Interpolation⁸⁾ ermittelt. Zu diesem Zweck wurden in Fig. 4 für Blei die Wirkungsquerschnitte von JAEGER und HULME bei 3 und 5,1 mc² und die Wirkungsquerschnitte von BETHE und HEITLER bei 3, 4, 5 und 6 mc² aufgetragen und durch diese Punkte glatte Kurven gelegt. Für sämtliche Linien des Radium-Spektrums (Tab. 1) werden die theoretischen Werte $\Phi_{J.H.}/\Phi_{B.H.}$ gebildet, mit dem Gewicht der effektiven Intensität versehen und gemittelt. Die zu diesem Mittelwert zugehörige Gamma-Energie sei hier als effektive Gamma-Energie für Blei E_{eff}^{Pb} bezeichnet (S. 512). Gleicherweise wird auch beim Co⁶⁰ verfahren. Wegen der Unsicherheit im

heit im Interpolieren zwischen 2 und 3 mc^2 ist aber der entsprechende theoretische Wert nicht genauer als 20%.

Wie der Verlauf der Kurven in Fig. 3 zeigt, werden die theoretischen Abweichungen vom Z^2 -Gesetz durch die experimentellen Ergebnisse bestätigt.

Bei neueren Messungen der Absorption von Gamma-Strahlen im Energieintervall von 11 bis 280 MeV in schweren Elementen resultieren für die Paarerzeugung gegenüber der Bethe-Heitlerschen Theorie Abweichungen, die das entgegengesetzte Vorzeichen be-

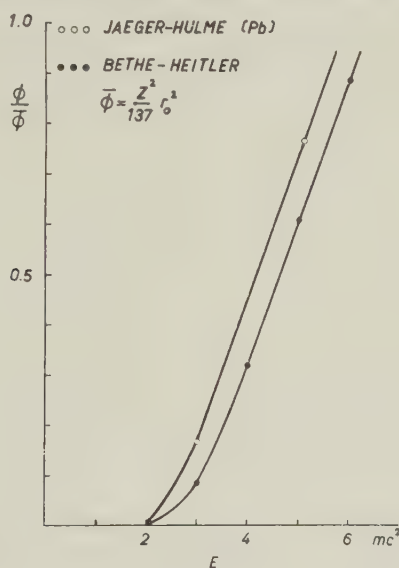


Fig. 4.

Theoretische Wirkungsquerschnitte
nach BETHE-HEITLER und nach JAEGGER-HULME.

sitzen, wie es hier erhalten wurde. Diese Abweichungen betragen beim Blei ca. -10% *) und sind praktisch unabhängig von der Gamma-Energie. Im Energieintervall zwischen 3 und 11 MeV ist demnach bei einer bestimmten Energie Übereinstimmung mit der Theorie von BETHE und HEITLER zu erwarten, was durch Messungen von ROSENBLUM²⁴⁾ bestätigt wurde. Seine Bestimmungen der Absorptionskoeffizienten von Blei und Uran für Gamma-Strahlen von 5 und 10 MeV mit Hilfe eines Paarspektrometers ergaben für die Paarerzeugung bei 5 MeV Übereinstimmung mit den Werten von BETHE und HEITLER, bei 10 MeV Abweichungen von -5% .

*) Rechnungen von DAVIES und BETHE²⁶⁾ bestätigen diese Abweichungen.

8. Kontrollversuche.

In einem ersten Kontrollversuch wird die Energie der in Koinzidenz gemessenen Gamma-Strahlung durch Absorption mit Bleifolien bestimmt. Die primäre Gamma-Strahlung ist diejenige des Radiums, und der Probekörper besteht aus Wismuth. In Fig. 5

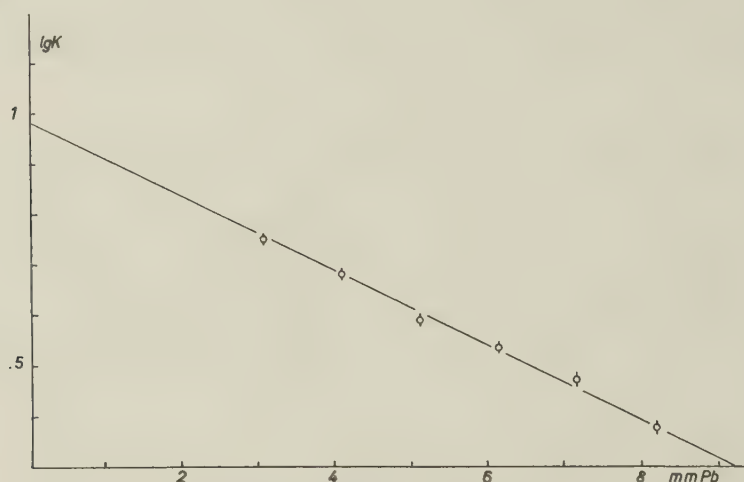


Fig. 5.

Koinzidenzstosszahl als Funktion der Dicke des Bleiabsorbers.

ist der Logarithmus der Koinzidenzstosszahl K in Abhängigkeit der Absorberdicke aufgetragen. Die Steigung der eingezeichneten Geraden entspricht einer Energie der Gamma-Strahlung²¹⁾ von

$$E_{\gamma} = 0,505 \pm 0,023 \text{ MeV}$$

in Übereinstimmung mit derjenigen der Vernichtungsstrahlung von 0,511 MeV.

Da die beiden Annihilationsquanten miteinander einen Winkel von 180° bilden, muss das Verschieben eines Zählers senkrecht zur y -Richtung ein rasches Abfallen der Koinzidenzstosszahl zur Folge haben. In Fig. 6 ist das Ergebnis eines entsprechenden Versuches mit der Thorium-Gamma-Strahlung und Wismuth als Probekörper dargestellt. Es ist die Koinzidenzstosszahl K in Abhängigkeit der Zählerverschiebung x aufgetragen. Die Koinzidenzen verschwinden, wie dies aus der Geometrie erwartet wird, bei $x = 5,4 \text{ cm}$.

9. Andere Effekte als Paarerzeugung.

Die drei wichtigsten Prozesse, die ausser der Paarerzeugung zu Gamma-Gamma Koinzidenzen Anlass geben, werden im folgenden kurz diskutiert.

Tripletbildung: Für den Prozess der Paarerzeugung im Coulombfeld der Elektronen (Tripletbildung) ist eine minimale Energie der Gamma-Strahlen von $4 mc^2$ erforderlich. Für $Z = 1$ und $E_\gamma = 5,2 mc^2$ beträgt nach BORSELLINO²³⁾ das Wahrscheinlichkeitsverhältnis von Tripletbildung zu Paarbildung 0,057. Da der Wirkungsquerschnitt für Tripletbildung mit Z , für Paarbildung dagegen mit Z^2 (Bornsche Näherung) anwächst, ist dieses Verhältnis für einen beliebigen Kern noch Z -Mal kleiner.

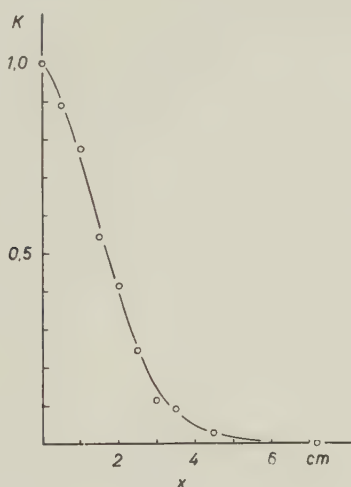


Fig. 6.

Koinzidenzstosszahl als Funktion der Zählerverschiebung.

2-Quanten-Comptoneffekt: Beim Comptoneffekt kann die Streustrahlung auch aus zwei Gamma-Quanten bestehen. Nach HEITLER¹⁶⁾ ist der 2-Quanten-Comptoneffekt für Gamma-Energien $E_\gamma \gg mc^2$, 137mal seltener, als der gewöhnliche Comptoneffekt. Im ungünstigsten Fall beträgt hier das Verhältnis von 2-Quanten-Comptoneffekt zu Paarbildung 0,26. Die Gamma-Quanten beim 2-Quanten Comptoneffekt besitzen aber keine Richtungskorrelation von 180° , so dass sie viel seltener gezählt werden als die Vernichtungsstrahlung.

Comptoneffekt in der K -Schale der schweren Elemente: Bei diesem Effekt könnte das Compton-Streuquant in den einen Zähler,

das beim Auffüllen der *K*-Schale emittierte Röntgenquant in den anderen Zähler gelangen. Die Röntgen-Strahlung wird aber in der 2 mm dicken Bleiabschirmung der Zähler absorbiert.

Für wertvolle Ratschläge und Diskussionen sind wir den Herren Dr. K. P. Meyer und Prof. M. Fierz sehr zu Dank verpflichtet. Für finanzielle Hilfe danken wir der Kommission des Bundes zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung und für die Überlassung von 60 mg Radium, der Radium-Stiftung Zürich.

Literaturverzeichnis.

- 1) H. BETHE und W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. **146**, 83 (1934).
- 2) J. C. JAEGER und H. R. HULME, Proc. Roy. Soc. **153**, 443 (1936).
- 3) J. C. JAEGER, Nature **137**, 781 (1936).
- 4) J. C. JAEGER, Nature **148**, 86 (1941).
- 5) Th. HEITING, Z. f. Ph. **87**, 127 (1934).
- 6) S. DE BENEDETTI, C. R. **200**, 1389 (1935).
- 7) B. HAHN, E. BALDINGER und P. HUBER, Helv. Phys. Acta **24**, 324 (1951).
- 8) M. R. CLELAND, J. TOWNSEND und A. L. HUGHES, Phys. Rev. **84**, 298 (1951).
- 9) J. C. JAEGER und H. R. HULME, Proc. Roy. Soc. **148**, 708 (1935).
- 10) G. D. LATISHEV, Rev. Mod. Phys. **19**, 132 (1947).
- 11) A. ORE und J. L. POWELL, Phys. Rev. **75**, 1696 (1949).
- 12) M. DEUTSCH, Phys. Rev. **83**, 866 (1951).
- 13) J. A. RICH, Phys. Rev. **81**, 140 (1951).
- 14) M. DEUTSCH und E. DULIT, Phys. Rev. **84**, 601 (1951).
- 15) J. C. JAEGER und H. R. HULME, Proc. Camb. Phil. Soc. **32**, 158 (1936).
- 16) W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Oxford University Press, London 1944, second edition.
- 17) K. P. MEYER, E. BALDINGER, B. HAHN und P. HUBER, Helv. Phys. Acta **22**, 420 (1949).
- 18) K. P. MEYER, E. BALDINGER und P. HUBER, Helv. Phys. Acta **23**, 125 (1950).
- 19) A. Z. HRYNKIEWICZ, Acta Physica Polonica **10**, 251 (1951).
- 20) D. A. LIND, J. R. BROWN, J. W. M. DuMOND, Phys. Rev. **76**, 591 (1949).
- 21) C. GOODMAN, The Sc. and Eng. of Nuclear Power (Addison-Wesley Press Inc., Cambridge 42, Mass. 1947).
- 22) C. M. DAVISSON und R. D. EVANS, Rev. Mod. Phys. **24**, 79 (1952); und R. D. EVANS und R. O. EVANS, Rev. Mod. Phys. **20**, 305 (1948).
- 23) A. BORSELLINO, Helv. Phys. Acta **20**, 136 (1947).
- 24) E. S. ROSENBLUM, E. F. SHRADER und R. M. WARNER, Bulletin of the American Phys. Soc. **26**, 6, 32 (1951) und E. S. ROSENBLUM, Technical Report No. 13, December 1 (1951); Case Institute, Cleveland, Ohio.
- 25) S. DE BENEDETTI und R. SIEGEL, Phys. Rev. **85**, 371 (1952); S. DE BENEDETTI und H. J. RICHINGS, Phys. Rev. **85**, 377 (1952).
- 26) H. DAVIES und H. A. BETHE, Phys. Rev. **87**, 156 (1952).

Réactions (n, α) et (n, p) du fer avec les neutrons lents

par H. Hänni et J. Rossel, Neuchâtel.

(24. III. 1952.)

Summary. The nuclear emulsion technique has been applied to the investigation of reactions with slow neutrons in Fe, one of several elements of middle mass which seem to have positive Q -values for (n, α) - and (n, p) -processes. The irradiated plates, loaded with Fe-saccharosate or citrate, or in contact with layers of pure iron and imbedded in a paraffin block, show a (n, α) and presumably also a (n, p) -effect. α and proton tracks have been discriminated by grain counting. The range distribution of α -tracks exhibits two groups at $(16 \pm 2,5) \mu$ and $(24 \pm 2,0) \mu$ with the corresponding Q -values $Q_1 = (4,5 \pm 0,5) \text{ MeV}$ and $Q_2 = (5,7 \pm 0,3) \text{ MeV}$. The slow neutron flux, measured with plates loaded with Li and B, could be determined with an accuracy of a few points percent. The cross-section for the total (n, α) -effect has been found to be $(5,4 \pm 0,8) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$, that is ~ 100 times greater than the semi-theoretical expectation. The comparison of the measured efficiencies with the predicted relative probabilities and isotopic abundances, suggests Fe^{56} for the first and Fe^{57} for the second α -group. These results seem then only compatible with mass values of Ogata⁶).

I. Introduction.

Possibilité de réactions (n, α) et (n, p) pour les noyaux de masse moyenne.

Théoriquement une réaction (n, α) ou (n, p) est possible avec les neutrons thermiques si le bilan des masses Q est positif.

$$Q = (A_1 + n) - (A_2 + a) > 0.$$

où $A_{1,2}$ = masse du noyau initial (1) et final (2).

n = masse du neutron.

a = masse de la particule chargée émise, α ou p .

Pour les noyaux de numéro atomique Z compris approximativement entre 20 et 30, les données de masses indiquent un certain nombre de bilans positifs. On peut donc s'attendre à observer des processus (n, α) et (n, p) par l'irradiation des neutrons thermiques. Cependant il faut noter que la barrière de potentiel, augmentant proportionnellement à Z , atteint des valeurs voisines de 10 MeV et par conséquent les sections efficaces doivent être très faibles.

Jusqu'ici aucune réaction de ce genre n'a été mise directement en évidence pour ces noyaux.

Les sept réactions (n, α) et (n, p) par neutrons lents trouvées jusqu'ici sont données dans le tableau 1.

Tableau 1.

Noyau initial	abond. %	noyau final	proc.	valeur Q expér. (1,4) MeV	calculée (2,3) MeV	section eff. expér. $\sigma \cdot 10^{24}$ p. isotope (1,5)
${}^2\text{He}^3$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	${}^1\text{H}^{3*}$	(n, p)	$0,736 \pm 0,025$	0,73	5040 ± 200
${}^3\text{Li}^6$	7,43	${}^1\text{H}^{3*}$	(n, α)	$4,77 \pm 0,15$	4,63	$920 \pm 50^+)$
${}^5\text{B}^{10}$	18,83	${}^3\text{Li}^7$	(n, α)	$2,83 \pm 0,15$	2,78	$3840 \pm 55^+)$
${}^5\text{B}^{10}$	18,83	${}^4\text{Be}^{10*})$	(n, p)	—	0,19	$< 0,2$
${}^7\text{N}^{14}$	99,62	${}^6\text{C}^{14*})$	(n, p)	$0,62 \pm 0,05$	0,60	$1,76 \pm 0,05$
${}^8\text{O}^{17}$	$3,92 \cdot 10^{-2}$	${}^6\text{C}^{14*})$	(n, α)	1,4	1,73	0,38
${}^{17}\text{Cl}^{35}$	75,4	${}^{16}\text{S}^{35}$	(n, p)	$0,52 \pm 0,04$	0,63	0,30

$^+)$ $E_n = 0,025$ eV, les autres σ sans indication de l'énergie thermique.

$^*)$ Noyaux magiques.

Les seules indications concernant les éléments de $Z > 17$ sont très incomplètes et ne concernent que le Fe^{58} et le Zn^{64} .

$\text{Fe}^{58}(n, \alpha) \text{Cr}^{55}$: $\sigma \leq 1,5 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ par isotope $^5)$

$\text{Zn}^{64}(n, p) \text{Cu}^{64}$: $\sigma < 1,0 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2$ (par isotope) $^5)$

Le tableau 1 montre nettement que les valeurs de Q trouvées expérimentalement sont pour la plupart en bon accord avec celles calculables à partir des masses. Pour les noyaux du groupe qui nous intéresse, les masses ne sont pas encore connues de façon suffisamment certaine pour permettre une sûre estimation de l'énergie de réaction. Les valeurs calculées présentent des fluctuations très considérables.

A partir des données actuelles les plus récentes proposées par BETHE $^2)$ (table de Cornell University), ROSENFELD $^3)$, OGATA $^6)$, DUCKWORTH et coll. $^7)$ on peut dresser un tableau des effets (n, α) et (n, p) comportant un Q positif et possibles en principe par les neutrons lents. Pour les faibles valeurs de Q la possibilité théorique du processus n'implique pas nécessairement la mise en évidence expérimentale, par suite des sections efficaces prohibitivement faibles. On essaiera de donner des indications sur les possibilités expérimentales de détection en faisant une estimation semi-théorique des sections efficaces.

Le tableau 2 contient la liste des éléments intéressants de notre point de vue.

Tableau 2.

Noyau initial	abond. %	Noyau final	Réaction	Valeur Q MeV
$^{14}\text{Si}^{29}$	4,67	$^{12}\text{Mg}^{26*})$	(n, α)	1,70
$^{16}\text{S}^{32}$	95,06	$^{14}\text{Si}^{29*})$	(n, α)	1,18 (expér. $1,16 \pm 0,15$) [†])
$^{16}\text{S}^{33}$	0,74	$^{14}\text{Si}^{30*})$	(n, α)	1,70
$^{17}\text{Cl}^{35}$	75,4	$^{15}\text{P}^{32}$	(n, α)	0,93 (expér. $0,44 \pm 0,20$) [†])
$^{18}\text{A}^{36}$	0,35	$^{16}\text{S}^{33}$	(n, α)	2,82
$^{19}\text{K}^{39}$	93,38	$^{17}\text{Cl}^{36}$	(n, α)	0,87
$^{19}\text{K}^{40}$	0,011	$^{17}\text{Cl}^{37*})$	(n, α)	3,29
$^{19}\text{K}^{40}$	0,011	$^{18}\text{A}^{40}$	(n, p)	1,13
$^{20}\text{Ca}^{40}$	96,96	$^{18}\text{A}^{37}$	(n, α)	2,44
$^{20}\text{Ca}^{43}$	0,129	$^{18}\text{A}^{40}$	(n, α)	1,61
$^{22}\text{Ti}^{48}$	73,45	$^{20}\text{Ca}^{45*})$	(n, α)	0,96
$^{24}\text{Cr}^{50}$	4,31	$^{22}\text{Ti}^{47}$	(n, α)	3,71
$^{26}\text{Fe}^{54}$	5,81	$^{24}\text{Cr}^{51}$	(n, α)	$\left\{ \begin{array}{l} 3,75 \quad {}^{2)3)} \\ 0,86 \pm 0,70^7) \\ 2,05 \pm 0,90^6) \end{array} \right.$
$^{26}\text{Fe}^{56}$	91,64	$^{24}\text{Cr}^{53}$	(n, α)	$\left\{ \begin{array}{l} 5,42 \quad {}^{2)3)} \\ -0,04 \pm 0,37^7) \\ 2,95 \pm 0,66^6) \end{array} \right.$
$^{26}\text{Fe}^{57}$	2,21	$^{24}\text{Cr}^{54}$	(n, α)	$\left\{ \begin{array}{l} 2,63 \pm 0,43^7) \\ 5,23 \pm 0,93^6) \end{array} \right.$
$^{26}\text{Fe}^{54}$	5,81	$^{25}\text{Mn}^{54}$	(n, p)	$\left\{ \begin{array}{l} -0,12 \pm 0,49^7) \\ 1,05 \pm 0,74^6) ^7) \\ 3,17 \pm 0,84^6) ** \\ 0,58 \pm 0,30^6) ^7) ** \end{array} \right.$
$^{26}\text{Fe}^{58}$	91,64	$^{25}\text{Mn}^{56}$	(n, p)	$\left\{ \begin{array}{l} -2,93 \pm 0,37^7) \\ -2,30 \pm 0,55^6) ^7) \\ -2,92 \quad ** \end{array} \right.$

*) Noyaux magiques.

†) Valeurs expérimentales trouvées par neutrons rapides.

**) Valeurs calculées à partir de Cr^{54} (réf. 6 et 7) et des données sur la capture K de Mn^{54} resp. spectre β^- de Mn^{56} (réf. 5).

A partir des données de DUCKWORTH et coll.⁷⁾, de MATTAUCH-FLAMMERSFELD (table des doublets spectrographiques)¹⁾ il semble que des processus (n, α) soient également possibles pour le Ni et Zn; ceci ressort en particulier de la courbe des «packing fractions» publiée⁸⁾ et qui présente des discontinuités caractéristiques pour

certaines isotopes à nombre de nucléons doublement magique. Les effets (n, α) suivants seraient possibles :

Réaction	Valeur Q MeV ⁷⁾	MeV ¹⁾
Ni ⁵⁸ (n, α) Fe ⁵⁵	2,7	—
Ni ⁶⁰ (n, α) Fe ⁵⁷	0,3	-0,1
Ni ⁶¹ (n, α) Fe ⁵⁸	2,3	7,5
Zn ⁶⁴ (n, α) Ni ^{61*}	9,2	4,5
Zn ⁶⁶ (n, α) Ni ^{63*}	3,2	—
Zn ⁶⁷ (n, α) Ni ^{64*}	4,2	5,6
Zn ⁶⁸ (n, α) Ni ^{65*}	4,9	—
Zn ⁷⁰ (n, α) Ni ^{67*}	1,9	—

*) Noyaux magiques, valeurs de masses de Zn de OGATA⁶⁾.

L'ensemble du tableau 2 montre clairement le manque d'homogénéité et les contradictions qui existent encore entre les valeurs de masses des différents auteurs, incohérences que seul un contrôle expérimental peut éliminer.

En dépit des discrepances il semble que le fer présente de bonnes possibilités de réactions (n, α) et éventuellement (n, p) . C'est pourquoi nous avons entrepris une étude de cet élément en premier lieu, nous proposant d'étendre nos recherches ultérieurement à Ca, Cr, Ni et Zn.

On peut s'attendre à des réactions (n, α) décelables pour les trois isotopes Fe⁵⁴, Fe⁵⁶, Fe⁵⁷ et éventuellement à une réaction (n, p) pour Fe⁵⁴. Les barrières de potentiel

$$B = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{r_0 \cdot A^{1/3}}$$

sont très considérables. En choisissant pour r_0 la valeur $1,48 \cdot 10^{-13}$ cm, on obtient les hauteurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Fe}^{54}(n, \alpha) \text{Cr}^{51}: B_{\alpha} &= 12,5 \text{ MeV} \\ \text{Fe}^{56}(n, \alpha) \text{Cr}^{53}: B_{\alpha} &= 12,4 \text{ MeV} \\ \text{Fe}^{57}(n, \alpha) \text{Cr}^{54}: B_{\alpha} &= 12,3 \text{ MeV} \\ \text{Fe}^{54}(n, p) \text{Mn}^{54}: B_p &= 6,4 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Avec de telles valeurs, on doit s'attendre a priori à des sections efficaces σ faibles.

Dans le tableau 3 suivant nous donnons une vue d'ensemble des valeurs de masses indiquées par les différents auteurs et qui nous ont servi au calcul des différentes énergies de réactions Q pour le Fe. On voit à partir de ce tableau que les valeurs de masses de

OGATA⁶) et de DUCKWORTH⁷) à l'exception de Fe⁵⁸ sont nettement différentes et ne se recouvrent pas à l'intérieur des limites d'erreurs.

Tableau 3.

Noyau initial	abond. %	Auteur ²⁾	Auteur ³⁾	Auteur ⁶⁾	Auteur ⁷⁾
Fe ⁵⁸	0,34	—	—	$57,95091 \pm 49 \cdot 10^{-5}$	$57,95071 \pm 36 \cdot 10^{-5}$
Fe ⁵⁷	2,21	56,957	56,9570	$56,95485 \pm 52$	$56,95353 \pm 17$
Fe ⁵⁶	91,64	55,9568	55,9571	$55,95340 \pm 27$	$55,95274 \pm 17$
Fe ⁵⁴	5,81	53,957	53,9600	$53,95774 \pm 48$	$53,95645 \pm 22$
Cr ⁵⁵	—	—	—	—	—
Cr ⁵⁴	2,38	—	53,9603	$53,95427 \pm 48$	$53,95576 \pm 26$
Cr ⁵³	9,55	52,956	52,9560	$52,95527 \pm 44$	$52,95784 \pm 20$
Cr ⁵¹	—	50,958	50,9580	—	$50,96058 \pm 50$
Mn ⁵⁸	—	—	—	—	—
Mn ⁵⁷	—	—	—	—	—
Mn ⁵⁶	—	—	55,9612	—	$55,95669 \pm 22$
Mn ⁵⁴	—	—	—	—	$53,95742 \pm 31$

En particulier les déviations systématiques des masses de Cr ont pour résultat que les valeurs de Q pour les processus (n, α) d'après DUCKWORTH sont faiblement positives ou même négatives.

L'étude des réactions (n, α) et (n, p) avec les éléments dont les masses sont encore mal connues pourra également permettre d'établir s'il existe un rapport certain entre les masses et les nombres magiques de nucléons admis actuellement comme étant

$Z = 2, 6, 8, 14, 20, 28, 40, 50, 70, 82$ et

$N = 2, 6?, 8, 14, 20, 28, 32$ ou $34, 40, 50, 70, 82, 112, 126$.

On peut penser en effet que les valeurs positives de Q correspondent aux transitions entre noyaux voisins des nombres magiques.

II. Estimation des sections efficaces.

On peut estimer les sections efficaces des processus (n, α) et (n, p) de façon semi-théorique en remarquant que $\sigma_{n,\alpha}$ ou $\sigma_{n,p}$ est en relation avec la section de capture $\sigma_{n,\gamma}$.

$$\sigma_{n;\alpha,p} \approx \sigma_{n,\gamma} \cdot \frac{I_{\alpha,p}}{I_{\gamma}} = \sigma_{n,\gamma} \cdot \frac{G_{\alpha,p}}{I_{\gamma}} \cdot P_{\alpha,p}$$

$G_{\alpha,p}$ = largeur de niveau pour l'émission d'une particule α resp. d'un proton dans le cas d'une barrière de potentiel nulle.

$P_{\alpha,p}$ = pénétrabilité de la barrière de potentiel pour un α resp. un proton et se calcule par exemple d'après BETHE⁹). Nous admettons dans l'expression du rayon nucléaire $R = r_0 \cdot A^{1/3}$ pour r_0 la valeur $1,48 \cdot 10^{-13}$ cm.

$G_{\alpha, p}/\Gamma_\gamma$ est probablement de l'ordre de Γ_n/Γ_γ soit sensiblement égal à 1. Cependant d'après B. L. COHEN¹⁰) il semble préférable d'admettre $\Gamma_n/G_\alpha \approx 0,1$. Nous choisirons pour ces raisons $G_{\alpha, p}/\Gamma_\gamma \sim 10$.

Les valeurs calculées par cette méthode n'auront qu'un caractère approximatif. Elles ne devraient pourtant pas être en erreur de plus d'un facteur 10 *).

Si on applique ce procédé par exemple au processus $\text{Cl}^{35}(\text{n}, \text{p})\text{S}^{35}$, dont le Q a été déterminé comme étant $Q = 0,52$ MeV et la section efficace $\sigma_{n, p} \approx 0,30 \cdot 10^{-24}$ cm², on trouve $P_p = 3,1 \cdot 10^{-6}$. En prenant pour section efficace de capture du noyau Cl^{35} $\sigma_{n, \gamma} = 43 \cdot 10^{-24}$ cm² la valeur calculée est $\sigma_{n, p} = 1,34 \cdot 10^{-27}$ cm², soit d'un facteur 225 plus faible que la valeur expérimentale.

Il est possible qu'il s'agisse d'un effet particulier au Cl. Cependant on peut s'attendre à obtenir par estimation semi-théorique des valeurs plutôt trop faibles.

Pour juger des possibilités expérimentales de détection des effets (n, α) de Fe et obtenir une indication des probabilités respectives des quatre isotopes Fe^{54} , Fe^{56} , Fe^{57} et Fe^{58} , nous appliquons la même méthode.

a) (n, α) .

Nous choisissons pour énergie des α une moyenne des valeurs que nous obtenons expérimentalement soit 4,5 MeV. (Voir partie V). Pour les sections efficaces $\sigma_{n, \gamma}$ nous prenons respectivement

Isotope	$\sigma_{n, \gamma}$
Fe^{54}	2,1 barns ¹¹⁾
Fe^{56}	3,1 barns
Fe^{57}	0,5 barns
Fe^{58}	0,36 barns

Les valeurs obtenues ainsi pour $\sigma_{n, \alpha}$ sont dans l'ordre

$$7,3; 7,1; 2,4; 2,0 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2.$$

Dans ces conditions et en tenant compte de l'abondance relative des isotopes, les fréquences α relatives sont dans le rapport

$$62:967:8:1.$$

On peut voir que dans ce calcul on a tendance à favoriser Fe^{54} par rapport à Fe^{56} et Fe^{57} si l'on examine les valeurs de Q déduites des masses (tableau 2). (D'après DUCKWORTH et OGATA c'est plutôt Fe^{57} qui devrait être favorisé par rapport à Fe^{54} et Fe^{56}).

*) Remarquons que le choix de la valeur plus faible $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-13}$ cm conduirait, dans le cas de Fe^{56} , à une augmentation de P_α de 30% seulement.

b) (n, p) .

Nous nous bornons à l'isotope Fe^{54} et prenons une valeur moyenne pour l'énergie éventuelle du proton de 2 MeV (voir partie V).

On obtient ainsi la section efficace $\sigma_{n,p} \simeq 7 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$.

III. Méthode de mise en évidence des processus (n, α) et (n, p) .

En principe les méthodes usuelles basées sur la ionisation des particules chargées émises sont applicables aux réactions (n, α) et (n, p) du fer, à savoir chambre de Wilson, chambre de ionisation et compteur proportionnel. Cependant les sources de neutrons relativement peu intenses dont nous disposons et les sections efficaces très faibles rendent dans notre cas prohibitives ces méthodes de détection à faible rendement. De plus, chambre de ionisation et compteur proportionnel permettent difficilement de séparer les particules α et les protons, ce qui est une nécessité dans notre cas pour les processus compétitifs (n, α) et (n, p) intervenant probablement pour le fer.

La seule méthode susceptible de fournir des résultats satisfaisants est l'emploi de l'émulsion photographique dont les propriétés intégrantes sont particulièrement intéressantes. Ce sera l'occasion d'éprouver la méthode pour l'étude des réactions de sections efficaces aussi faibles que 10^{-28} cm^2 , ce qui à notre connaissance n'a pas encore été fait jusqu'ici, surtout pour des réactions conduisant à des noyaux stables. (Voir la note préliminaire déjà publiée¹²).

Méthode photographique.

Pour l'étude des réactions (n, α) et (n, p) du fer, nous avons utilisé les deux procédés possibles :

a) élément sensible aux neutrons situé à l'extérieur de l'émulsion et en contact avec elle;

b) élément sensible introduit sous forme de solution imprégnant l'émulsion.

a) Une couche mince de fer pur est déposée par vaporisation sur une lame de mica. Ce support a été choisi du fait qu'il ne contient pas de substances susceptibles de réagir avec les neutrons lents. La couche de fer est appliquée intimement contre la surface de l'émulsion qui enregistre les particules α émergeant du fer. Cette méthode présente le désavantage de la self-absorption des particules α ou protons dans la couche. Comme l'épaisseur du fer ne doit pas tomber au-dessous d'une dizaine de μ pour que le rende-

ment reste suffisant, cet effet perturbe la distribution des parcours de telle sorte qu'une mesure acceptable de l'énergie est rendue impossible. Nous l'avons par conséquent utilisée uniquement pour la détection du processus et pour la mesure de la section efficace.

Si l'on veut enregistrer les traces α sans perte sur le nombre, l'épaisseur d de la couche doit être beaucoup plus petite que le parcours des α dans le fer.

Sur la base des résultats obtenus dans l'émulsion imprégnée desquels nous déduisons pour l'énergie des α une valeur moyenne de 4,5 MeV et pour les protons de 2 MeV approximativement, nous pouvons déterminer les parcours dans le fer:

$$R_{\text{Fe}} = R_0 \cdot n_0/s(E) \cdot n_{\text{Fe}}$$

où R_0 = parcours dans l'air.

s = pouvoir d'arrêt atomique du Fe relatif à l'air et n_0/n_{Fe} = rapport du nombre d'atomes par cm^3 dans l'air et dans le fer.

En interpolant les valeurs des pouvoirs d'arrêt données par BERTHE¹³) on obtient pour le fer et les particules α d'énergie voisine de 5 MeV, $s = 2,3$ et pour les protons d'énergie voisine de 2 MeV, $s = 2,45$. On trouve ainsi pour les α de 4,5 MeV, $R_{\text{Fe}} = 7,8 \mu$ et pour les protons de 2 MeV, $R_{\text{Fe}} = 17,5 \mu$.

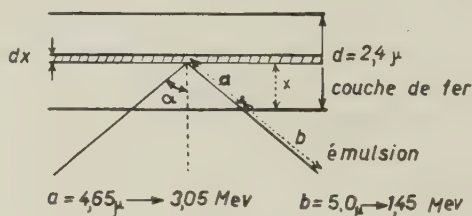


Fig. 1.

$$dN = \frac{N_0 \cdot dx \cdot \Omega(x)}{2\pi} = (1 - x/L) dx N_0 \quad N = N_0 \int_0^d (1 - x/L) dx = N_0 d (1 - d/2L)$$

$$\text{Perte relative} = \frac{N_0 d - N}{N_0 d} = d/2L = d/2(a+b)$$

Valeur numérique: perte relative = $2,4/9,3 \sim 25\%$.

L'épaisseur de la couche vaporisée a été déterminée par pesée et trouvée égale à $(2,43 \pm 0,25) \mu$ ce qui correspond à $(2,05 \pm 0,20) \cdot 10^{19}$ atomes Fe/ cm^2 . Pour distinguer une trace dans l'émulsion, nous avons trouvé qu'une longueur de trajectoire de 5μ au minimum est nécessaire pour une discrimination satisfaisante des pro-

tons. (Comme seules les traces pénétrant dans l'émulsion sont comptées, les protons du processus $N(n, p)C$ peuvent facilement s'éliminer). Dans ces conditions la fraction des particules α perdue pour l'observation dans le demi-espace de l'émulsion est de $(25 \pm 5) \%$.

Cette correction semble élevée, mais représente un compromis nécessaire avec le rendement qui pour l'épaisseur de $2,4 \mu$ est comparable avec celui fourni par l'émulsion imprégnée. Les résultats obtenus par cette méthode seront forcément moins précis que ceux obtenus par la méthode d'imprégnation.

Dans le cas des protons de 2 MeV la fraction perdue ne serait que de 11%. Cependant cette méthode n'a pas fourni de résultats satisfaisants par suite des très grandes fluctuations statistiques du nombre de protons mesurés, dues à la présence du fond de protons de recul.

b) La méthode d'imprégnation de l'émulsion par une solution de fer permet à la fois la mesure du nombre des traces et la distribution des parcours, c'est-à-dire la distribution d'énergie, une fois connue la relation énergie-parcours de l'émulsion employée. Après quelques essais avec différents sels de fer en solution aqueuse de concentration en fer de l'ordre de 3% (ferricyanure de potassium, chlorure de fer, acétate de fer) sans résultats satisfaisants par suite de l'altération importante de l'émulsion, nous avons retenu deux substances: 1° le *saccharosate de fer*, facilement soluble et dont l'action sur l'émulsion s'est avérée légèrement sensibilisatrice avec un pH de 9,8. Une plaque D_1 par exemple contient après un bain de 30 min. dans une solution à 5% de fer $(7,60 \pm 0,07) \cdot 10^{18}$ atomes Fe/cm², nombre déterminé par pesée différentielle. Cette valeur a été confirmée par analyse chimique quantitative de l'émulsion imprégnée*). D'après les indications du producteur, le saccharosate contient des proportions inférieures au pourcent d'éléments (Na, Al, Si, P, S, Ca et Cu) qui sont pratiquement insensibles aux neutrons thermiques. 2° Le *citrate de fer*, chimiquement pur d'un pH de 6 environ a permis une concentration $n_{Fe} = (4,60 \pm 0,05) \cdot 10^{18}$ atomes Fe/cm² sans modification appréciable de la sensibilité de l'émulsion photographique. (Comme toutes les mesures se sont faites par différence entre les indications des plaques enveloppées ou non dans des écrans de Cd, l'effet des neutrons rapides s'élimine). Des traces éventuelles de Li ou de B ne peuvent pas apporter des perturbations puisque leurs trajectoires α sont très caractéristiques

*) Nous remercions M. CL. PORTNER de l'Institut de Chimie Physique pour cette analyse.

et peuvent être facilement distinguées, ceci d'autant plus que dans le cas du bore le parcours ($8,7 \mu$) tombe au-dessous de la distribution déterminée comme appartenant au fer, dans le cas du Li (43μ) au-dessus.

Le cas très improbable d'autres impuretés perturbatrices nous semble définitivement éliminé par le fait que le dénombrement des traces dans le cas de la couche de fer pur donne une valeur comparable à celle de l'émulsion imprégnée (voir partie V).

IV. Différents dispositifs expérimentaux utilisés.

a) *Source Ra—Be. Détection des neutrons.*

Pour un certain nombre d'essais préliminaires et en particulier l'étude des possibilités de mesure absolue du nombre de neutrons lents par émulsion au Li ou au B, nous avons utilisé une source de 15 mC de Ra—Be, placée dans un écran de Pb au centre d'un bloc de paraffine contenant différentes plaques photographiques dans la disposition suivante:

Coupe horizontale.

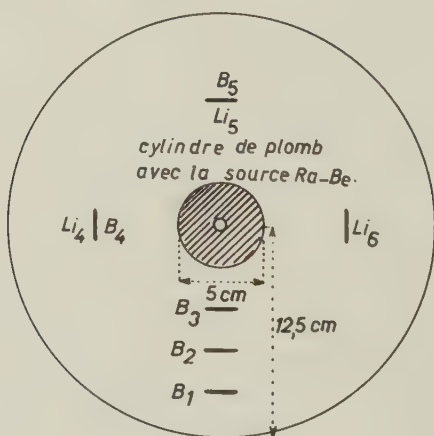


Fig. 2.

Les plaques au Li et au B utilisées étaient soit des plaques Ilford spéciales, soit des émulsions que nous avons chargées par le citrate de lithium ou le borax.

B_3 et Li_5 sont des plaques Ilford E_1 au B et au Li appliquées l'une contre l'autre dans un même paquet, et de même pour Li_4

et B₄, tandis que les autres plaques se trouvent isolément aux distances indiquées. Cette disposition permet d'étudier la distribution des neutrons dans la paraffine et l'absorption des neutrons par les plaques elles-mêmes, effet qui s'est révélé négligeable pour la répartition utilisée. Cependant quand les plaques se trouvent dans une boîte de Cd, nous avons trouvé nécessaire d'intercaler entre elles au moins 3 cm de paraffine pour compenser l'absorption dans le Cd. Les résultats obtenus pour une irradiation totale de 19 h sont indiqués dans le tableau 4.

Tableau 4.

Plaque	Événements /cm ²	Distance de la source (incl. 2,5 cm de plomb)	Nombre de neutrons lents cm ² sec
B ₅	6,13 · 10 ⁸	7,5 cm	235
Li ₅	7,04 · 10 ³	7,5 cm	233
Li ₄	6,55 · 10 ³	7,5 cm	216
B ₄	5,88 · 10 ⁴	7,5 cm	225
B ₃	3,63 · 10 ⁴	5 cm	139
B ₂	5,69 · 10 ⁴	7,5 cm	214
B ₁	3,64 · 10 ⁴	10 cm	139
Li ₆	6,58 · 10 ³	7,5 cm	217

La valeur moyenne du nombre des neutrons lents pour la distance de 7,5 cm du centre (5 cm de paraffine) est de 222/cm² sec mesuré par les plaques au Li et de 225/cm² sec mesuré par les plaques au B, ce qui donne un nombre absolu de (223 ± 4) /cm² sec. On en conclut qu'un flux des neutrons lents peut être déterminé par l'émulsion photographique avec une erreur ne dépassant guère 2%.

La diminution de la densité près de la source et du bord extérieur du bloc de paraffine est très nette, la distance 7,5 cm (incl. 2,5 cm de plomb) correspondant sensiblement au maximum.

Deux mesures effectuées avec des plaques au B dans une enveloppe de Cd de 1 mm d'épaisseur ont donné une fraction enregistrée de neutrons d'énergie supérieur à 0,2 eV (énergie de coupure de Cd) de 1,5% seulement. On peut donc considérer le nombre de neutrons donné par les émulsions après correction de 1,5% comme égal dans les limites d'erreur au nombre véritable de neutrons lents du domaine 0—0,2 eV.

Essais préliminaires avec Fe.

Pour les longues irradiations nécessaires à l'étude du fer le rayon du cylindre central de plomb a été porté à 5 cm, afin de diminuer l'action des γ sur l'émulsion. Dans ces conditions on obtient à 8,5 cm de distance de la source (3,5 cm de paraffine) (290 ± 7) neutrons lents/cm² sec et à 10 cm soit à 2 cm du bord du bloc (158 ± 4) neutrons lents/cm² sec. Les plaques chargées de fer ainsi que les plaques détectrices ont été disposées à 8,5 cm du centre suivant la fig. 3.

L'irradiation d'une durée de 280 hr. correspondait à un flux total de neutrons de $(2,9 \pm 0,1) \cdot 10^8$ /cm². Cette durée nous a fourni

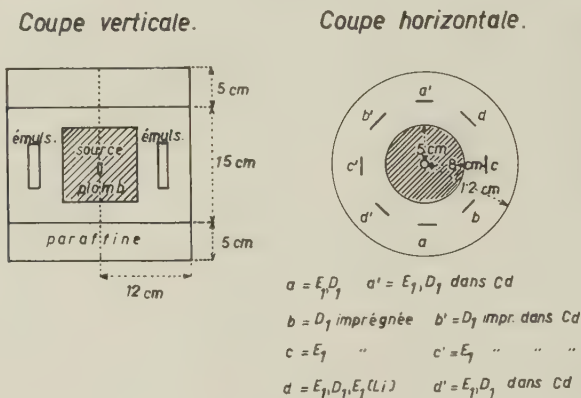


Fig. 3.

une première statistique grossière tout en maintenant le voile dû au γ à une valeur acceptable. Pour éviter dans la mesure du possible l'effet de fading de l'image latente, l'ensemble était disposé à l'intérieur d'une cloche étanche évacuée à quelques mm Hg ou remplie d'une atmosphère d'azote.

La méthode de détermination de la statistique finale des réactions du fer et que nous avons employée pour toutes nos mesures est la suivante:

On détermine les quatre nombres

$$T_{l+r}^{Fe+E}, \quad T_r^{Fe+E}, \quad T_{l+r}^E, \quad T_r^E$$

où les indices inférieurs $l+r$ (lents + rapides) et r (rapides) correspondent aux plaques respectivement libres et enveloppées de Cd et les indices supérieurs $Fe+E$ et E aux plaques respectivement chargées de Fe et avec émulsion seule. On peut s'attendre à trouver

des nombres T_r^E et T_{l+r}^E faibles. Effectivement les valeurs mesurées ont montré que c'était bien toujours le cas.

On forme les différences,

$$D_l^{\text{Fe}+E} = T_{l+r}^{\text{Fe}+E} - T_r^{\text{Fe}+E} \quad \text{et} \quad D_l^E = T_{l+r}^E - T_r^E$$

qui donnent respectivement l'effet des neutrons lents sur l'émulsion chargée de fer et sur l'émulsion seule. Enfin la différence

$$D_l^{\text{Fe}} = D_l^{\text{Fe}+E} - D_l^E$$

effectuée pour chaque intervalle de longueur de traces (donc intervalle d'énergie) fournit la distribution d'énergie des réactions déclenchées par les neutrons lents dans la solution de fer seule.

Pour notre premier essai, les traces ont été observées au microscope à projection (grossissement 1200 \times) et toutes les traces des protons de $\text{N}^{14}(\text{n}, \text{p})\text{C}^{14}$ ainsi que de ceux dus aux reculs étaient éliminés par discrimination visuelle basée sur la distance des grains au début de la trajectoire. Cette méthode conduit à une élimination justifiée dans 75 % des cas environ pour les traces de 7 à 30 μ^*).

Le résultat donne ainsi pour les traces α de toutes les énergies au-dessus de 2,1 MeV :

$$D_l^{\text{Fe}+E} = 47 - 20; \quad D_l^E = 9 - 6 \quad \text{soit}$$

$$D_l^{\text{eF}} = 17 - 3 = 14 \text{ traces } \alpha.$$

Il apparaît donc un premier effet positif pour les traces α .

b) Dispositif pour l'irradiation par cyclotron et source à haute tension.

Les résultats des essais préliminaires étant positifs, une série d'irradiations par des sources de neutrons plus intenses a été effectuée; trois par les neutrons du cyclotron de l'Institut de physique de l'E.P.F. à Zurich (protons de 7,5 MeV sur cible Cu) et deux par la source de neutrons Be-D de l'Institut de physique de l'Université de Bâle**).

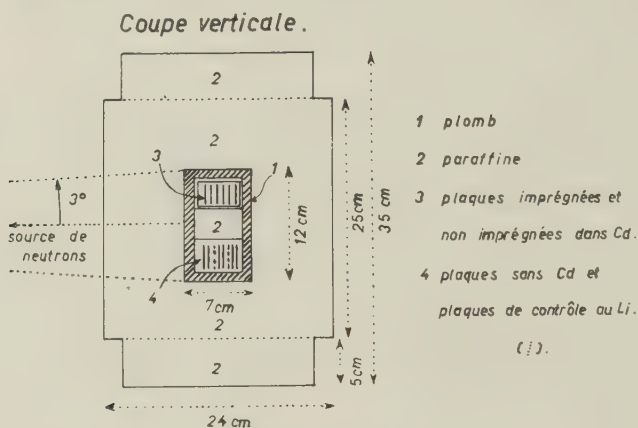
Après quelques essais le dispositif définitif a été choisi de la façon suivante.

Entre les paquets *a* et *b* était disposée une plaque Li- E_1 (solution de Li à 0,05 %) servant d'indicateur de neutrons lents et une même plaque entre les paquets *c* et *d*. A l'extérieur du bloc de paraffine

*) Résultat déterminé par comparaison du procédé exact de mesure de densité des grains, appliqué ultérieurement, et de la discrimination visuelle.

**) Nous exprimons nos sincères remerciements à MM. les professeurs P. SCHERRER et P. HUBER pour leur amabilité ainsi qu'aux équipes des deux accélérateurs.

différentes plaques étaient placées pour le contrôle du fading de l'image latente. Ces plaques E_1 et D_1 (imprégnées au Fe) étaient au préalable impressionnées par un faisceau de particules α de ThC' à incidence rasante. Parallèlement, une plaque imprégnée de nitrate de thorium au début des irradiations (pour le cyclotron 130 h) était conservée pour être ensuite développée avec les autres plaques



et dans les mêmes conditions. Cette plaque permet une détermination précise du fading par ses traces α présentant toute la gradation de densités de grains en fonction du temps. Ce contrôle est d'autant plus nécessaire que la mesure de la densité des grains près de la surface de l'émulsion n'est pas très certaine: la densité pour une trace donnée est à l'intérieur considérablement plus forte qu'au voisinage direct de la surface et ceci malgré un développement homogène par la méthode de température¹⁴).

Le rapport des densités de grains à la surface et à l'intérieur a été trouvé égal à 0,67 (fig. 5).

V. Mesures et résultats.

a) Méthode de séparation de traces α et protons par estimation visuelle.

Les plaques irradiées ont été développées par le procédé suivant, choisi pour une bonne discrimination des différentes traces: 1° Lavage en eau courante, 15 min. 2° 10 min. dans un bain révélateur Ilford ID₁₉ dilué 3 ×, resp. dans bain d'amidol¹⁵) maintenus à 5° C. 3° 10 min. dans le même révélateur dilué 20 × et maintenu à 17° C, resp. chauffage lent à 17° C par contact de la plaque photo-

graphique pendant 5 à 10 min. avec surface métallique chaude.
 4° Rinçage rapide. 5° 10 min. dans bain d'arrêt à 2% acide acétique.
 6° Rinçage rapide et nettoyage de la surface à la peau de daim.
 7° Fixage dans bain à 40% hyposulfite avec brassage permanent.
 8° Rinçage prolongé à l'eau courante et séchage à l'air.

Une série de plaques Ilford E_1 , 100 μ , soumises à une première irradiation par le cyclotron ont été explorées. Pour toutes les traces de projection L_p comprises entre 7 et 13 μ , la mesure a été faite sans essai de distinction (domaine défavorable) tandis que pour toutes celles de $L_p \geq 13 \mu$ une discrimination visuelle entre traces α et protons a été effectuée (domaine favorable).

Les traces de protons dans l'émulsion (protons de recul des neutrons rapides) sont relativement nombreuses et rendent très difficile la mise en évidence d'un effet Fe(n, p)Mn éventuel qui n'a pas été tentée par la méthode visuelle.

Pour l'étude de la distribution d'énergie, seules les traces d'inclinaison $< 60^\circ$ resp. $< 45^\circ$ ont été retenues pour les quatre plaques.

La mesure de l'angle d'inclinaison et de la longueur véritable de la trace dépend du facteur de contraction s dont la détermination doit être faite très soigneusement. La vraie longueur est liée à la projection horizontale L_p et verticale h de la trajectoire par la relation suivante:

$$L = \sqrt{L_p^2 + (s \cdot h)^2}$$

Pour les objectifs à immersion, h peut être pris sans erreur sensible ($n_{\text{émuls.}} \approx n_{\text{huile}}$) comme distance verticale entre les positions de mise au point de l'origine et de l'extrémité de la trajectoire et se mesure sur la vis micrométrique du microscope. Le facteur de contraction s se détermine comme rapport de l'épaisseur initiale à l'épaisseur après développement de l'émulsion sèche, au moyen d'un comparateur micrométrique. Un contrôle a été fait par la méthode des traces α de parcours connu (ThC') et normales à la surface.

Voici un exemple des valeurs déterminées pour s dans les conditions standard de développement indiquées:

Ilford D_1	: 2,00 \pm 0,05 non imprégnée
Ilford E_1	: 2,10 \pm 0,10 non imprégnée
Ilford D_1	: 2,50 \pm 0,05 imprégnée de saccharosate de fer
Ilford E_1	: 2,60 \pm 0,10 imprégnée de saccharosate de fer
Kodak NT ₄	: 2,71 \pm 0,05 non imprégnée
Kodak NT2a:	2,42 \pm 0,05 non imprégnée
Kodak NTB ₃ :	2,47 \pm 0,10 non imprégnée

On peut voir que l'erreur sur le parcours véritable dépend presque uniquement de la précision de la mesure de h . L'étude de cet effet dans notre cas montre que la précision de $0,5 \mu$ de nos mesures de h conduit pour des traces de 16μ de longueur vraie à une erreur moyenne de $\pm 0,15$ MeV sur l'énergie des α .

D'autre part, aux très fortes concentrations de Fe employées, nous avons remarqué une nette dilatation de l'émulsion (25 % env. pour $1,05 \text{ mg Fe/cm}^2$); le facteur de contraction s est naturellement augmenté. Cependant un contrôle effectué avec les α du *Po* n'indique aucune modification mesurable de la relation énergie—parcours.

Les résultats de la mesure des traces α sont indiqués fig. 5 bis (a , b), déjà présentée dans une communication préliminaire¹²). Il faut noter que les fluctuations statistiques sont considérables par suite du fait inévitable que le nombre final s'obtient comme double différence de quatre nombres mesurés; la fluctuation est par conséquent

$$T = \sqrt{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}$$

T_i = nombre des événements par intervalle de longueur.

Pour le saccharosate de Fe, on remarque une différence assez grande dans le nombre de traces pour les plaques enveloppées de Cd, avec et sans imprégnation, ce qui n'est pas le cas pour le citrate. L'augmentation du nombre de traces de protons dans l'émulsion imprégnée s'explique en partie par la présence des atomes d'hydrogènes supplémentaires du saccharosate (5 fois plus que pour le citrate) et qui représente une augmentation de 7% environ pour une solution de 4% de fer. L'effet observé cependant est plus considérable et peut s'interpréter comme réactions produites par les neutrons rapides sur les impuretés du saccharosate.

b) *Méthode de discrimination des traces α et des protons par mesure de la densité des grains.*

Pour obtenir une meilleure séparation des traces α et p une irradiation a été effectuée avec une série de plaques Ilford D_1 (100μ) pour lesquelles toutes les traces de projection $L_p > 7 \mu$ ont été mesurées et le nombre de grains par trace déterminé. Pour la mesure de la longueur, un grossissement de $600 \times$ a été utilisé, tandis que pour le dénombrement des grains il était de $1000 \times$. Les courbes de densités, obtenues pour les traces α de Th et les traces p de reculs, sont données dans la fig. 5. Par suite des fluc-

tuations, on voit qu'une discrimination nette est difficile au-dessous de 16μ . Nous avons choisi comme densité moyenne limite de discrimination entre protons et α , $1,00 \text{ grains}/\mu$.

c) Effet (n, α).

Les résultats obtenus pour les plaques E_1 par estimation visuelle sont donnés dans les histogrammes fig. 5 bis.

Densité des grains
dans l'émulsion D_1 .

Courbe de densité
des grains,
des α dans l'émulsion
+ des α à la surface
o des protons dans l'émulsion

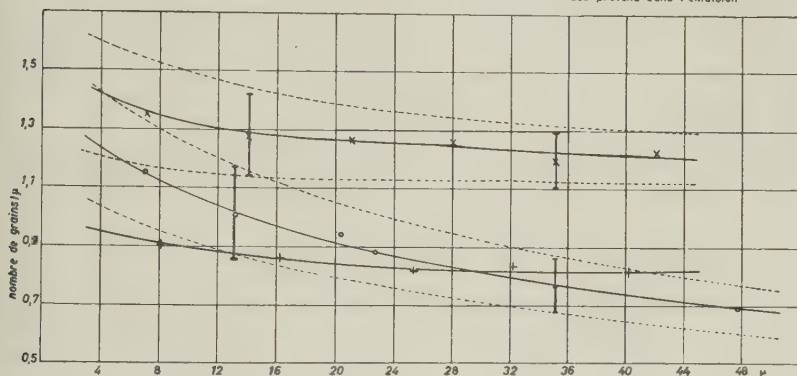


Fig. 5.

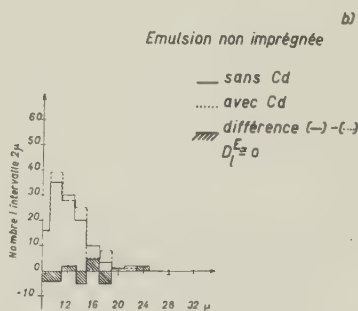
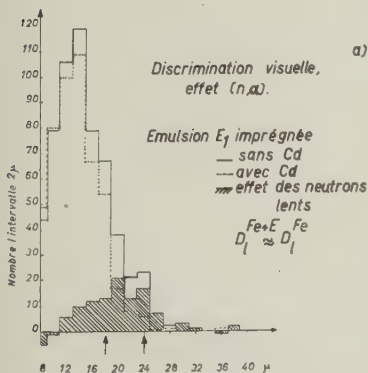


Fig. 5 bis.

On voit en particulier que le spectre correspondant à l'action des neutrons lents sur l'émulsion seule a une valeur moyenne sensiblement nulle, ce qui nous autorisera, sans erreur appréciable, à négliger pour certains histogrammes l'effet de l'émulsion seule. La

mesure avec les plaques D_1 et discrimination α -p par densité des grains conduit aux histogrammes fig. 6. Ici également l'effet des neutrons lents sur l'émulsion seule est nul en moyenne et le spectre final semble confirmer la présence des deux groupes α déjà indiqués par la première mesure.

La fig. 7a donne l'histogramme obtenu pour une série de plaques D_1 irradiées par les neutrons Be-D (accélérateur à haute tension)

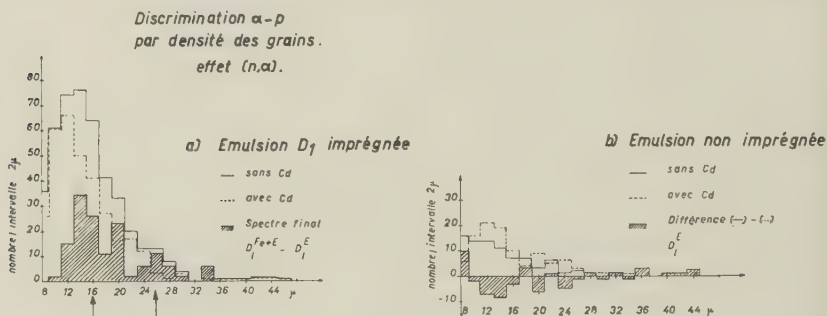


Fig. 6.

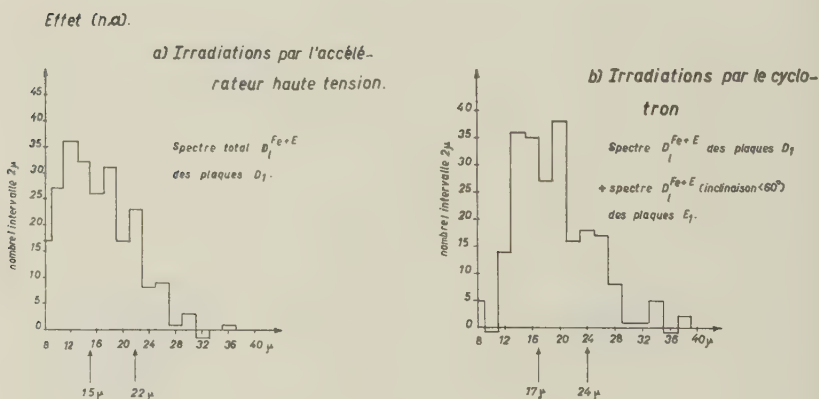


Fig. 7.

et avec discrimination α -p visuelle; la fig. 7b les résultats relatifs à l'irradiation par le cyclotron.

Les histogrammes présentent également les deux groupes déjà mis en évidence précédemment. Dans chaque cas les flèches indiquent approximativement la position des centres de gravité des deux groupes α .

Enfin la fig. 8 relative au citrate de Fe présente, en dépit de la statistique relativement faible, des caractéristiques semblables aux résultats obtenus avec le saccharosate, à l'exception du maximum

à 9 μ très douteux puisque dans une région de contamination possible par le bore.

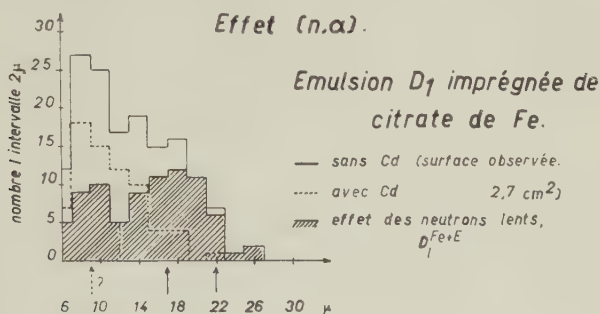


Fig. 8.

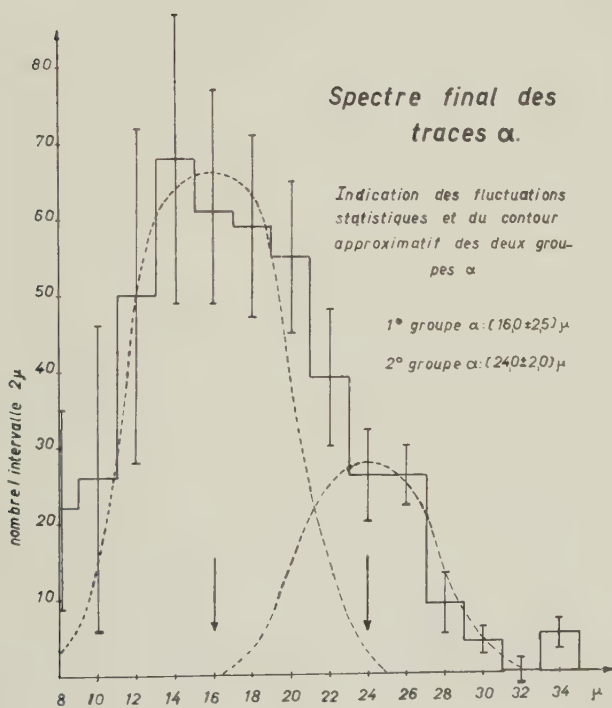


Fig. 9.

En superposant les différentes distributions, on obtient l'histogramme total de la fig. 9. Le contour approximatif des deux groupes décelés y est indiqué.

Sur la base de ces différents résultats, on peut fixer les maxima des deux groupes α à $(16 \pm 2,5) \mu$ et $(24 \pm 2,0) \mu$, ce qui donne pour les énergies de réaction en tenant compte d'une correction de $+7,5\%$ pour le recul du noyau de Cr,

$$Q_1 = (4,5 \pm 0,5) \text{ MeV et } Q_2 = (5,7 \pm 0,3) \text{ MeV.}$$

Section efficace.

Le flux total des neutrons lents a été déterminé par les plaques au Li. Pour l'une des irradiations des plaques D_1 et de l'émulsion avec couche de Fe, on trouve ainsi par exemple un flux total de $(6,85 \pm 0,33) \cdot 10^9$ neutrons lents/cm².

Pour se faire une idée du rapport du nombre des neutrons lents $0 < E < 0,2 \text{ eV}$ à celui des neutrons rapides ($E > 0,4 \text{ MeV}$) qui caractérise les particules agissant sur les plaques dans la paraffine, nous avons déterminé, pour les deux sources utilisées, le spectre

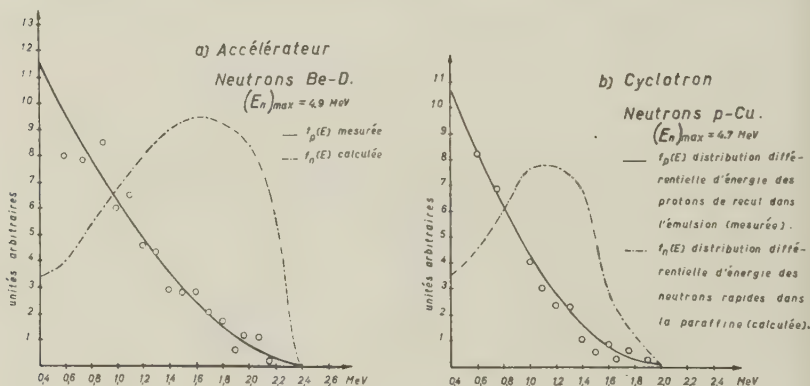


Fig. 10.

des neutrons rapides au moyen des protons de recul dont les distributions sont indiquées dans la fig. 10. A partir de ces spectres on peut, par intégration et en tenant compte de la perte d'énergie du neutron dans la collision élastique ainsi que de la section efficace de collision, déterminer le nombre des neutrons rapides.

Si $f_p^*(E)$ est la fonction de distribution différentielle d'énergie relative aux protons mesurés et $f_p(E)$ la fonction de distribution pour l'ensemble des protons dans l'émulsion, on pourra poser $k f_p^*(E) = f_p(E)$ et écrire pour le nombre total de protons de recul (qu'on peut mesurer) :

$$N_p = k \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} f_p^*(E) dE = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} f_p(E) dE.$$

Cette relation permet de déterminer le facteur géométrique k relatif au domaine angulaire d'orientation des traces effectivement mesurées, et ensuite la fonction de distribution $f_p(E)$.

D'autre part on aura par intervalle d'énergie du proton:

$$f_p(E) dE = n_H \int_{E'=E}^{\infty} f_n(E') P(E', E) dE dE'.$$

Comme la diffusion n-p est isotrope dans le système du centre de gravité pour les énergies considérées, la probabilité $P(E', E) dE$ est simplement égale à $\sigma_H(E') dE/E'$, si bien que, en introduisant dans l'expression ci-dessus et en dérivant par rapport à la limite inférieure E de l'intégrale, on obtient:

$$f_n(E) = - \frac{1}{n_H} \frac{E}{\sigma_H(E)} \frac{df_p(E)}{dE}$$

où $\begin{cases} n_H = \text{nombre de } H/\text{cm}^2 \\ \sigma_H = \text{section efficace de collision n-p} \end{cases}$

pour la fonction de distribution des neutrons rapides et pour leur nombre total

$$N_n = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} f_n(E) dE.$$

La courbe $\sigma_H(E)$ étant donnée dans la littérature¹⁶), il est facile d'effectuer l'intégration graphiquement.

On obtient ainsi, pour les neutrons ralentis dans 10 cm de paraffine, comme rapport des neutrons rapides ($E > 0,4$ MeV) aux neutrons lents ($E < 0,2$ eV):

$$\text{Cyclotron (neutrons p-Cu, } E_{\max} = 4,7 \text{ MeV): } \frac{N_{\text{rapides}}}{N_{\text{lents}}} = 3,3 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{Accélérateur (neutrons D-Be, } E_{\max} = 4,9 \text{ MeV): } \frac{N_{\text{rapides}}}{N_{\text{lents}}} = 2,3 \cdot 10^{-2}.$$

Il est intéressant de comparer ces rapports avec celui mesuré dans la colonne de graphique d'un réacteur nucléaire. Pour la G.L.E.E.P. de Harwell par exemple LOCQUEREUX¹⁷ indique le rapport $4,3 \cdot 10^{-6}$.

Il n'est pas nécessaire d'insister sur les avantages que présenterait l'irradiation par pile pour les investigations du genre présenté ici, en particulier pour l'élimination du fond très gênant des protons de recul.

Le calcul de la section totale de l'effet (n, α) se fait en tenant compte de deux corrections, l'une due aux traces sortant de l'émulsion et qui ne sont pas prises en considération, ce qui pour une énergie α moyenne de 4,5 MeV se monte à 8,75%, l'autre relative aux traces de forte inclinaison et qui sont éliminées, soit 8,5%. De plus comme seules les traces $L_p \geq 5 \mu$ ont été retenues une correction supplémentaire de 10% environ est nécessaire. On obtient ainsi pour l'émulsion imprégnée la section efficace,

$$\sigma_{n, \alpha} = (3,9 \pm 1,0) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2.$$

Pour la plaque avec *couche mince de Fe* la section efficace, compte tenu de la correction de 25% déjà mentionnée plus haut, est trouvée égale à

$$\sigma_{n, \alpha} = (6,8 \pm 2,0) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2.$$

Des valeurs supplémentaires pour $\sigma_{n, \alpha}$ ont été obtenues avec une *feuille épaisse de Fe* en contact avec l'émulsion D_1 et avec deux nouvelles plaques D_1 imprégnées de citrate et saccharosate de Fe. Ces valeurs sont dans l'ordre:

$$\begin{aligned} \sigma_{n, \alpha} &= (7,2 \pm 2,8) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \\ &= (7,4 \pm 1,9) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \\ &= (6,9 \pm 2,2) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

A l'exception de la première de ces 5 valeurs toutes sont compatibles dans les limites d'erreur ε_i . La moyenne pondérée calculée par les formules

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum p_i \sigma_i}{\sum p_i}; \quad p_i = 1/\varepsilon_i^2$$

$$\overline{m} = \sqrt{\frac{\sum p_i (\bar{\sigma} - \sigma_i)^2}{(n-1) \sum p_i}}$$

donne

$$\underline{\bar{\sigma}_{n, \alpha} = (5,4 \pm 0,8) \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2.}$$

d) Effet (n, p) .

Par suite de la présence d'un très grand nombre de protons de recul, la détermination et la mesure d'un effet (n, p) ne peut guère dépasser le stade d'une première estimation. En considérant comme traces de protons celles dont la densité moyenne de grains est inférieure à 1,00 grains/ μ , on obtient pour la plaque D_1 la distribution des longueurs donnée dans la fig. 11 a. Il semble possible de distinguer trois groupes de protons ayant leur centre de gravité approxi-

mativement à $27\ \mu$, $35\ \mu$, et $45\ \mu$ ce qui correspond aux énergies de 1,5; 1,8 et 2,1 MeV. Construisant la distribution statistique pour l'ensemble des traces sans discrimination α -p, on trouve la répartition des longueurs données dans la fig. 11b. On y distingue nettement vers $17\ \mu$, le maximum correspondant aux α et on retrouve au voisinage des mêmes positions que précédemment les trois groupes qu'on peut considérer comme protons. Par suite d'une contamination par les α inévitable pour les longueurs de traces

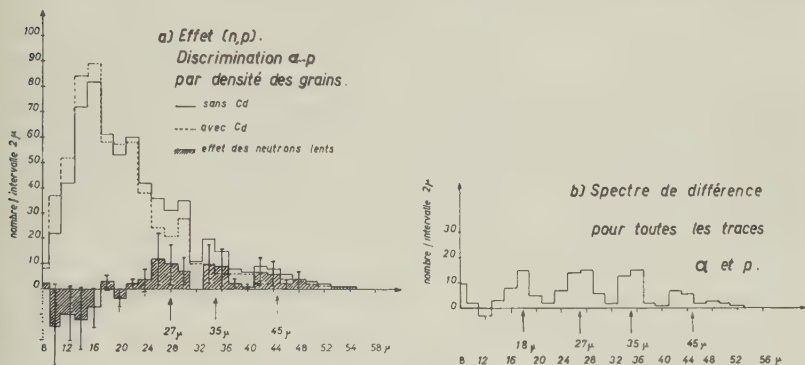


Fig. 11.

jusqu'à $20\ \mu$ et davantage, le groupe de protons de $27\ \mu$ (fig. 11a) est probablement influencé par le groupe α de $24\ \mu$. C'est pourquoi le groupe correspondant de la fig. 11b est relativement peu augmenté.

Section efficace.

L'estimation de la section efficace de l'effet (n, p) après les différentes corrections nécessaires donne la valeur approximative

$$\sigma_{n,p} \cong 2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

VI. Discussion et conclusions.

Les causes d'erreurs pour les mesures effectuées sont assez appréciables et il est bon de les passer en revue pour se rendre compte de la limite de la méthode.

Ces causes sont successivement:

1. Le voile considérable produit par l'action des rayons γ qu'il est difficile d'éviter sans diminuer le flux des neutrons lents.
2. L'action sensibilisatrice des substances d'imprégnation (en particulier pour le saccharosate de Fe) tendant à rendre plus difficile

la discrimination α -p en dépit de l'élimination du sel par lavage consciencieux de l'émulsion avant développement et maintien du pH de la solution à 7,0. (Les plaques non imprégnées étaient également soumises au même lavage pour maintenir des conditions analogues.)

3. Les difficultés de discrimination des traces α et p surtout au-dessous de 15μ et malgré un développement progressif. Cette difficulté est en relation avec les fluctuations de sensibilité de l'émulsion elle-même et l'action non uniforme du révélateur en dépit du procédé de développement utilisé, dit de température.

4. La variation du nombre des neutrons lents enregistrés avec la position de la plaque dans le bloc de paraffine. Cet effet s'il n'est pas soigneusement éliminé empêche la détermination de la section efficace. Nous avons indiqué plus haut comment il était possible par des mesures préliminaires d'obtenir à cet égard des conditions optima.

5. Enfin il est clair que si l'on ne dispose pas d'une pile, la précision statistique reste encore limitée. Remarquons cependant que d'après H. FARAGGI¹⁸⁾ on ne peut dépasser un flux total maximum de 10^{11} neutrons/cm² environ si l'on veut éviter un voile prohibitif dû aux radiations émises par Ag et Br activés par les neutrons lents.

En dépit de ses limitations, la méthode utilisée a donné dans les trois cas étudiés: a) émulsion chargée de saccharosate de Fe; b) émulsion chargée de citrate de Fe; c) émulsion en contact avec une couche de fer métallique, des résultats convergents tant pour la distribution statistique des traces α que pour la section efficace $\sigma_{n,\alpha}$. Ceci nous paraît exclure définitivement un effet produit par des impuretés incontrôlables et confirme les résultats déjà publiés par nous¹²⁾ et mis en doute par H. FARAGGI¹⁸⁾ dans un travail entrepris à la suite de notre communication préliminaire.

Essai d'identification des processus observés.

1. Effet (n, α) .

a) Les valeurs de masses spectrographiques donnent des valeurs de Q en général faiblement positives pour Fe⁵⁴, par contre pour Fe⁵⁶ et Fe⁵⁷ comprises dans le domaine de nos résultats expérimentaux autour de 5 MeV. De plus

b) les estimations semi-théoriques faites en page 526 du rendement relatif des isotopes de Fe pour le processus (n, α) , compte tenu des abondances isotopiques, avantagent fortement Fe⁵⁶.

Ces deux points sont des arguments en faveur de l'attribution du groupe α de $Q_1 = 4,5$ MeV à Fe⁵⁶ et du groupe plus faible de $Q_1 = 5,7$ MeV à Fe⁵⁷. Les valeurs de Q mesurées sont alors compatibles uniquement avec celles déduites des masses spectrographiques de OGATA⁶).

Par suite des très hautes barrières de potentiel (12 MeV) il nous paraît très improbable que le maximum principal de $Q = 4,5$ MeV corresponde à une transition menant du noyau 'compound' de Fe à un niveau excité du noyau final Cr⁵³ ou Cr⁵⁴.

2. Effet (n, p).

Comme la valeur de Q pour un effet (n, p) de Fe⁵⁴ est positive il semble que les protons observés puissent être attribués, en partie du moins, à cet isotope. Cette attribution est supportée par les résultats obtenus par irradiation de Fe dans la pile de OAK RIDGE¹⁹) où la création de l'isotope Mn⁵⁴ radioactif a été mise en évidence.

Notre valeur expérimentale de Q , voisine de 2 MeV, est assez élevée pour qu'il y ait de bonnes chances d'éclaircir ce point de façon satisfaisante par l'émulsion photographique irradié dans le flux des neutrons lents de la pile, pratiquement exempt de neutrons rapides.

Pour le processus (n, α), la section efficace expérimentale est en gros 100 fois plus grande que les estimations semi-théoriques basées sur les sections de capture de Fe. Cette discrédance paraît être due, comme dans le cas de la réaction Cl³⁵(n, p) S³⁵ à une inconséquence théorique qu'il reste à élucider.

Il est évident que d'autres effets (n, p) et (n, α) par neutrons lents sont parfaitement possibles avec des éléments voisins du fer, surtout, semble-t-il, en passant aux noyaux à nombre magique ou doublement magique de protons et neutrons. Une investigation préliminaire entreprise avec le zinc et qui est en progrès confirme ce fait.

Un des buts de ce travail était d'étudier les possibilités de l'émulsion nucléaire pour la mesure des processus à très faible section efficace. Sur la base des résultats obtenus, on peut fixer la limite approximative de détectabilité des effets (n, α) et (n, p) avec neutrons lents à $5 \cdot 10^{-29}$ cm² et $5 \cdot 10^{-28}$ cm² respectivement.

Ce travail a été financé par la Commission Suisse de l'énergie Atomique à laquelle vont nos sincères remerciements.

Institut de Physique de l'Université de Neuchâtel.

Bibliographie.

- ¹⁾ J. MATTAUCH, A. FLAMMERSFELD, *Isotopenbericht* (1949).
 - ²⁾ H. A. BETHE, *Elementary Nuclear Theory* (1947).
 - ³⁾ L. ROSENFELD, *Nuclear Forces* (1948).
 - ⁴⁾ H. FARAGGI, *Annales de physique* **12**, 340 (1951).
 - ⁵⁾ NUCLEAR DATA, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards (1950).
 - ⁶⁾ K. OGATA, *Phys. Rev.* **75**, 200 (1949).
 - ⁷⁾ H. E. DUCKWORTH, H. A. JOHNSON, *Phys. Rev.* **78**, 179 (1950); H. E. DUCKWORTH, H. A. JOHNSON, *Phys. Rev.* **78**, 330 (1950); H. E. DUCKWORTH, H. A. JOHNSON, R. S. PRESTON, R. F. WOODCOCK, *Phys. Rev.* **78**, 386 (1950); H. E. DUCKWORTH, K. S. WOODCOCK, R. S. PRESTON, *Phys. Rev.* **78**, 479 (1950); H. E. DUCKWORTH, R. S. PRESTON, *Phys. Rev.* **79**, 402 (1950); H. E. DUCKWORTH, communications privées (1951).
 - ⁸⁾ H. E. DUCKWORTH, R. S. PRESTON, *Phys. Rev.* **82**, 469 (1951).
 - ⁹⁾ H. A. BETHE, *Rev. of Mod. Physics* **9**, 166 (1937).
 - ¹⁰⁾ B. L. COHEN, *Phys. Rev.* **80**, 105 (1950).
 - ¹¹⁾ H. POMERANCE, J. I. HOOVER, *Phys. Rev.* **73**, 1265 (1948).
 - ¹²⁾ H. HÄNNI et J. ROSSEL, *Helv. Phys. Acta* **23**, 513 (1950).
 - ¹³⁾ H. A. BETHE, *Rev. of Mod. Physics* **9**, 272 (1937).
 - ¹⁴⁾ Bulletin 13a du Centre de Physique Nucléaire, Bruxelles (1950), Ire partie: Le développement.
 - ¹⁵⁾ A. D. DAINTON, A. R. GATTIKER and W. O. LOCK, *Phil. Mag.* **42**, 396 (1951).
 - ¹⁶⁾ C. GOODMAN, *The Science and Engineering of Nuclear Power* (1947).
 - ¹⁷⁾ R. LOCQUENEUX, *Journ. de phys. et le Radium* **11**, 144 (1950).
 - ¹⁸⁾ H. FARAGGI, *Comptes Rendus* **231**, 1475 (1950).
 - ¹⁹⁾ T. ALPER, L. DU PREEZ, *Nature* **165**, 689 (1950).
-

Ein neues Variationsverfahren zur genäherten Berechnung der Eigenwerte hermitescher Operatoren

von Hans J. Maehly (Phys. Institut der ETH., Zürich).

(6. III. 1952.)

—

Summary. A new variation procedure for the approximate computation of eigenvalues is developed. It is well known that the RITZ-Method will give upper bounds for the lowest eigenvalues; by help of our new procedure however, *upper and lower bounds* can be calculated (even for operators whose spectrum extends from $-\infty$ to $+\infty$), if the positions of the neighbouring eigenvalues can roughly be estimated. As an example, the two lowest eigenvalues λ_1, λ_2 of the differential equation (arising in the deuteron-problem)

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \kappa^2 \Phi + \lambda \frac{e^{-x}}{x} \Phi = 0$$

are calculated with high accuracy.

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Methoden zur genäherten Berechnung der Eigenwerte eines hermiteschen Operators \mathbf{A} , also derjenigen Werte λ_i , für welche die Gleichung

$$\mathbf{A} f_i = \lambda_i f_i \quad (1.1)$$

lösbar ist. Die Lösung dieser Gleichung ist bekanntlich äquivalent mit der Aufgabe, diejenigen Funktionen $\psi = f_i$ zu finden, für welche der Erwartungswert von \mathbf{A} , d. h. der Quotient

$$L(\psi) = \frac{(\psi, \mathbf{A} \psi)}{(\psi, \psi)} \quad (1.2)$$

bei allen Variationen von ψ stationär bleibt*), und es ist

$$L(f_i) = \frac{(f_i, \mathbf{A} f_i)}{(f_i, f_i)} = \lambda_i. \quad (1.3)$$

*) Genauer: Für alle zur Variation zugelassenen Funktionen; vgl. hierzu und für einen kurzen Beweis der Äquivalenz der Eigenwertgleichung (1.1) mit dem Variationsproblem das 7. Kapitel dieser Arbeit.

Mit (φ, ψ) bezeichnen wir hier ein „hermitesches Produkt“ mit den Eigenschaften

$$(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)} \quad (1.4)$$

und

$$(\psi, \psi) > 0 \quad \text{für } \psi \neq 0^*); \quad (1.5)$$

die Hermitezität von \mathbf{A} wird dann durch die Gleichung

$$(\varphi, \mathbf{A} \psi) = (\mathbf{A} \varphi, \psi) \quad (1.6)$$

ausgedrückt. — Oft ist das hermitesche Produkt in der Form

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi \bar{\psi} dq \quad (1.7)$$

gegeben; dann lautet die Hermitezitätsbedingung einfach:

$$\int \varphi (\mathbf{A} \bar{\psi}) dq = \int \bar{\psi} (\mathbf{A} \varphi) dq. \quad (1.8)$$

2. Das Ritzsche Verfahren.

Als Grundlage für das im 3. Kapitel zu besprechende neue Verfahren sollen hier kurz die wichtigsten Sätze über das Ritzsche Verfahren zusammengestellt werden. Dieses besteht bekanntlich darin, dass man zum Variationsproblem $\delta L(\psi) = 0$ nur Linearkombinationen von n gegebenen, voneinander linear unabhängigen „Koordinatenfunktionen“ $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ zulässt**). Man setzt also ψ in der Form

$$\psi = \sum_{l=1}^n y_l \psi_l \quad (2.1)$$

an und bestimmt die Koeffizienten y_1, y_2, \dots, y_n so, dass

$$\frac{\partial}{\partial y_m} L(\psi) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Entsprechend den Eigenfunktionen und Eigenwerten des exakten

*) Eine genauere Definition gibt NEUMANN¹⁾, S. 21.

**) Vgl. neben den Originalarbeiten von W. RITZ²⁾ die Abhandlungen von COLLATZ³⁾⁴⁾⁵⁾ und die Diss. des Verf.⁶⁾. HYLLERAAS⁷⁾ hat wohl als erster die Anwendungsmöglichkeiten des Ritzschen Verfahrens zur genäherten Berechnung der Eigenwerte der Schroedinger-Gleichung näher untersucht.

***). Die ψ_l müssen natürlich „zur Variation zugelassene Funktionen“ sein, wie die ψ in (1.2); vgl. (7.6).

Eigenwertproblems (1.1) erhält man auf diese Weise n „Lösungsfunktionen“ g_i ,

$$g_i = \sum_{l=1}^n y_{il} \psi_l, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

und n „Ritzsche Werte“

$$L_i = L(g_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Analog zu einigen Spezialfällen, für welche das Ritzsche Verfahren näher untersucht wurde, kann man ganz allgemein folgende Sätze beweisen:

1. Die Ritzschen Werte sind identisch mit den n (evtl. z. T. mehrfachen) Wurzeln der Säkulargleichung

$$\det[(\psi_l, \mathbf{A} \psi_m) - L_i (\psi_l, \psi_m)] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Diese L_i sind immer reell; wir ordnen sie der Grösse nach, so dass also

$$L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_n. \quad (2.6)$$

2. Die g_i bilden ein Orthogonalsystem und können so normiert werden, dass

$$\left. \begin{aligned} (g_i, g_j) &= \sum_{l,m=1}^n (\psi_l, \psi_m) y_{il} \overline{y_{jm}} = \delta_{ij}, \\ (g_i, \mathbf{A} g_j) &= \sum_{l,m=1}^n (\psi_l, \mathbf{A} \psi_m) y_{il} \overline{y_{jm}} = L_i \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

3. Fügt man dem Ritzschen Ansatz (2.1) noch eine weitere, von den n ersten linear unabhängige Koordinatenfunktion ψ_{n+1} zu, so können die Ritzschen Werte L_1, \dots, L_n nur sinken, aber nie unter den nächst tieferen Wert des alten Systems.

4. Ist der Operator \mathbf{A} nach unten halbbeschränkt und sein Spektrum diskret*), so sind die Ritzschen Werte obere Schranken für die entsprechenden Eigenwerte, d. h. es ist

$$\lambda_i \leq L_i, \quad (2.8)$$

wenn die n kleinsten Eigenwerte analog zu (2.6) geordnet sind:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \quad (2.9)$$

*) Ein Operator heisst nach unten (bzw. oben) halbbeschränkt, wenn $L(\psi)$ für alle zugelassenen Funktionen ψ ein Minimum (bzw. Maximum) besitzt; z. B. ist jeder positiv-definite Operator nach unten halbbeschränkt; vgl. NEUMANN¹⁾, S. 51/52. Für den Fall gemischter Spektren, vgl. Kap. 9.

5. Ist der Operator \mathbf{A} nach *oben* halbbeschränkt und sein Spektrum diskret, so sind die Ritzschen Werte *untere* Schranken für die entsprechenden Eigenwerte, d. h. es ist

$$A_i \geq L_{n-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.10)$$

wenn wir mit A_1, \dots, A_n die n grössten Eigenwerte bezeichnen:

$$A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_n \geq \dots \quad (2.11)$$

Zusammenfassend können wir also sagen: *Das Ritzsche Verfahren liefert „innere Schranken“ für die äussersten Eigenwerte.* — Es ist daher nur dann wirklich brauchbar, wenn es solche äussersten Eigenwerte überhaupt gibt, wenn also \mathbf{A} mindestens halbbeschränkt, oder noch besser (beidseitig) beschränkt ist. Hingegen kann man z. B. für ein reines Punktspektrum, das sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt*) nur sagen, dass die L_i im allgemeinen nicht sehr verschieden von gewissen, meist ungefähr den n absolut genommen kleinsten Eigenwerten sind, doch lässt sich die Unzuverlässigkeit dieses Erfahrungsgesetzes leicht an Beispielen zeigen.

3. Erweiterung des Ritzschen Verfahrens.

Wir wollen nun daran gehen, ein neues Variationsverfahren zu besprechen**), das in vielen Fällen die Berechnung oberer und unterer Schranken ermöglicht, selbst dann, wenn der Operator \mathbf{A} nicht einmal halbbeschränkt ist. Dagegen wollen wir vorläufig voraussetzen, dass das Spektrum von \mathbf{A} diskret sei; für den Fall gemischter (d. h. teils diskreter, teils kontinuierlicher) Spektren verweisen wir nochmals auf das 9. Kapitel am Schlusse dieser Arbeit.

Unser Verfahren besteht im wesentlichen darin, das Ritzsche Verfahren auf den Operator

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} - p \mathbf{1})^{-1} \quad (3.1)$$

anzuwenden; dabei ist p eine reelle Zahl, $\mathbf{1}$ der Einheitsoperator (der jede Funktion in sich selbst überführt) und \mathbf{B} die Inverse von $(\mathbf{A} - p \mathbf{1})$, die durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{A} - p \mathbf{1}) = \mathbf{B}\mathbf{A} - p\mathbf{B} = \mathbf{1} \quad (3.2)$$

*) Solche Spektren können z. B. bei der Berechnung von Streuphasen auftreten, wenn man die Phase (als Parameter) gibt und die „force constant“ als Eigenwert berechnet; vgl. ROSENFELD⁸⁾, S. 81—82, HULTHEN⁹⁾ und MAEHLY¹⁰⁾.

**) Kurz vor der Korrektur machte mich Herr Dr. hab. N. J. LEHMANN auf seine Dissertation¹⁹⁾ aufmerksam, in welcher dieses Verfahren auf Grund der Integralgleichungstheorie beschrieben ist. Trotzdem scheint mir, wegen der Verschiedenheit der Darstellung wie auch des Leserkreises, die vorliegende Publikation nicht ganz überflüssig geworden zu sein.

definiert ist. Aus (1.1) und (3.2) folgt sofort, dass die Eigenfunktionen von **A** und **B** (bis auf einen evtl. Normierungsfaktor) identisch sind und dass die Eigenwerte λ_i von **A** mit den Eigenwerten μ_i von **B** durch die Gleichungen

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - p}; \quad \lambda_i = p + \frac{1}{\mu_i} \quad (3.3)$$

verknüpft sind. Hieraus folgt: *Ist p kein Eigenwert von **A** (und auch nicht ein Häufungspunkt von Eigenwerten), so ist der Operator **B** beschränkt.* Das Ritzsche Verfahren eignet sich daher gut zur genäherten Berechnung der Eigenwerte von **B**: Es liefert innere Schranken für die äussersten Eigenwerte von **B** und damit (durch Rücktransformation in die λ -Skala) „äussere Schranken“ für n aufeinanderfolgende, um den Wert $\lambda = p$ liegende Eigenwerte von **A**. — Diesen Gedankengang wollen wir nun mathematisch formulieren: Wir setzen ψ wieder in der Form

$$\psi = \sum_{i=1}^n y_i \psi_i \quad (3.4)$$

an und bestimmen die stationären Werte von

$$M(\psi) = \frac{(\psi, \mathbf{B} \psi)}{(\psi, \psi)}, \quad (3.5)$$

die nach (2.5) mit den Wurzeln $M = M_1, M_2, \dots, M_n$ der Säkulargleichung

$$\det [(\psi_i, \mathbf{B} \psi_m) - M(\psi_i, \psi_m)] = 0 \quad (3.6)$$

identisch sind. Die entsprechenden Werte in der λ -Skala, die wir l_i nennen wollen:

$$l_i = p + \frac{1}{M_i}, \quad (3.7)$$

können auch direkt aus der Säkulargleichung

$$\det [(\psi_i, \psi_m) - (l - p)(\psi_i, \mathbf{B} \psi_m)] = 0 \quad (3.8)$$

berechnet werden, die aus (3.6) durch Multiplikation jedes Elementes mit $(p - l)$ hervorgeht.

Bevor wir auf die Bedeutung der l_i näher eingehen, bemerken wir, dass sich die Berechnung des Operators **B**, bzw. der Funktionen

$$\varphi_i = \mathbf{B} \psi_i \quad (3.9)$$

leicht umgehen lässt, indem man a priori mit n Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ beginnt und aus diesen die ψ_i nach

$$\psi_i = (\mathbf{A} - p \mathbf{1}) \varphi_i = \mathbf{A} \varphi_i - p \varphi_i \quad (3.10)$$

berechnet. Setzt man dies in (3.8) ein, so erhält man wegen der Hermitezität von \mathbf{A} für die Werte $l = l_1, \dots, l_n$ die Säkulargleichung:

$$\det[(\mathbf{A} \varphi_l, \mathbf{A} \varphi_m) - (p + l)(\varphi_l, \mathbf{A} \varphi_m) + p l (\varphi_l, \varphi_m)] = 0 \quad *). \quad (3.11)$$

Die Bedeutung der l_i -Werte und ihre Abhängigkeit vom Parameter p kann man sich am besten an Hand einer Skizze (Fig. 1) klar machen. Trägt man z. B. p nach rechts und l nach oben auf, so wird die Figur symmetrisch in bezug auf die Winkelhalbierende

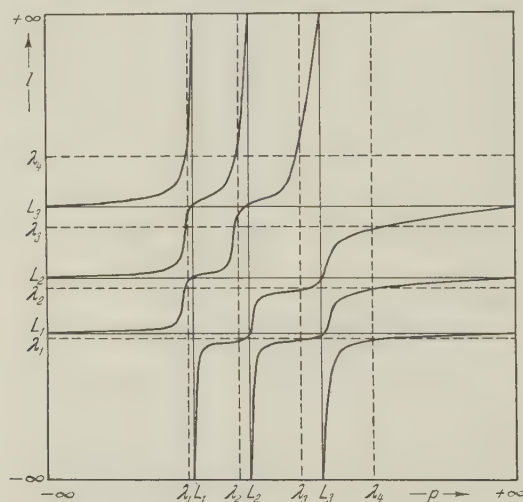


Fig. 1.

Qualitativer Verlauf der Kurven $l_i(p)$ für 3 Koordinatenfunktionen. Um das asymptotische Verhalten der Kurven zu zeigen, sind die Punkte $-\infty$ und $+\infty$ an den Rand der Figur verlegt; es ist also nach rechts eigentlich nicht p , sondern etwa $\operatorname{arctg} p$ oder $Th p$ aufgetragen und analog $\operatorname{arctg} l$ oder $Th l$ nach oben. Ferner sind zur Vereinfachung der Figur nur die ersten 4 Eigenwerte eingezeichnet.

($p = l$), da Gl. (3.11) in p und l symmetrisch ist. Ferner gelten folgende Sätze über den Verlauf der Kurven $l_i(p)$ (die Beweise sind im 8. Kapitel zusammengefasst):

1. Für alle l_i und p ist

$$\frac{dl_i}{dp} \geq 0. \quad (3.12)$$

2. Für $p \rightarrow \infty$ werden die l_i identisch mit den n Wurzeln der Säkulargleichung

$$\det[(\varphi_l, \mathbf{A} \varphi_m) - L(\varphi_l, \varphi_m)] = 0; \quad (3.13)$$

*) Die folgenden Sätze sind nur dann gültig, wenn die Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ den in (7.9) angegebenen Bedingungen ($\varphi_l \in \mathfrak{D}'$) genügen.

ist p keine Wurzel dieser Gleichung ($p \neq L_i$), so sind alle Wurzeln $l_i(p)$ von (3.11) endlich; andernfalls ist (3.11) nur noch vom $(n-1)$ ten Grade in l (bzw. vom $(n-k)$ ten, wenn p eine k -fache Wurzel von (3.13) ist).

3. Ordnet man die L_i und $l_i(p)$ der Grösse nach und ist

$$L_j < p < L_{j+1}, \quad (3.14)$$

so ist

$$\left. \begin{array}{ll} l_i \leq L_i & \text{für } i = 1, 2, \dots, j \\ l_k \geq L_k & \text{für } k = j+1, \dots, n \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

4. Bezeichnen wir mit $\lambda_{N+1}, \dots, \lambda_{N+n}$ n aufeinanderfolgende Eigenwerte, welche (mit derselben Zahl j wie in (3.14)) der Ungleichung

$$\lambda_{N+1} \leq \dots \leq \lambda_{N+j} \leq p \leq \lambda_{N+j+1} \leq \dots \leq \lambda_{N+n}, \quad (3.16)$$

gehörten, so ist

$$\left. \begin{array}{ll} l_i \leq \lambda_{N+i} & \text{für } i = 1, 2, \dots, j \\ l_k \geq \lambda_{N+k} & \text{für } k = j+1, \dots, n \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Wie muss man also vorgehen, um obere und untere Schranken für die Eigenwerte zu berechnen? Ist der Operator \mathbf{A} nach unten halb-beschränkt, so wird man, nach der Wahl geeigneter Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, zuerst aus (3.13) die $L_1 \dots L_n$ berechnen; sie sind nach (2.8) obere Schranken für die n ersten Eigenwerte. Zur Berechnung unterer Schranken für die j ersten Eigenwerte müssen wir für p einen Wert wählen, der zwischen L_j und L_{j+1} liegt: Dann sind die l_1, \dots, l_j untere Schranken für $\lambda_1, \dots, \lambda_j$. Je näher p bei λ_{j+1} liegt, desto grösser und damit genauer werden diese unteren Schranken; ist aber $p > \lambda_{j+1}$, so kann man nur noch behaupten, dass $l_1 < \lambda_2, l_2 < \lambda_3, \dots, l_j < \lambda_{j+1}$. Zur Berechnung unterer Schranken für die ersten j Eigenwerte brauchen wir daher eine möglichst gute untere Schranke für λ_{j+1} . — Bei unbeschränkten Operatoren oder zur Berechnung hoher Eigenwerte mit nur wenigen Koordinatenfunktionen, wo das Ritzsche Verfahren nicht mehr brauchbar ist, kann man das neue Verfahren auch zur Berechnung oberer Schranken anwenden; in diesem Falle braucht man eine obere Schranke für einen „etwas tieferen“ Eigenwert.

Es könnte zunächst erscheinen, als ob die Notwendigkeit, zur Berechnung unterer bzw. oberer Schranken für die interessierenden Eigenwerte zuerst solche für benachbarte (höhere bzw. tiefere) Eigenwerte finden zu müssen, das neue Verfahren völlig wertlos mache. Die Erfahrung zeigt aber, dass bei geschickter Wahl der Koordinatenfunktionen und geeignet gewähltem j der Einfluss von

p auf die gesuchten unteren und oberen Schranken sehr klein ist, so dass es genügt, jene benachbarten Eigenwerte ziemlich roh abzuschätzen, wofür bekanntlich eine ganze Reihe von Methoden zur Verfügung stehen (Störungsrechnung, Differenzenrechnung, WKB-Methode, graphische Verfahren usw.). Selbst dann, wenn diese Hilfswerte nur Näherungswerte für die betreffenden Eigenwerte sind, statt zuverlässige untere, bzw. obere Schranken, liefert das neue Verfahren doch meist bessere Fehlerabschätzungen mit weniger Rechenarbeit als etwa durch die Betrachtung der „Konvergenz“ der Ritzschen Werte bei wachsenden n möglich ist*).

4. Erweiterung des Weinsteinschen Einschliessungssatzes**).

Zum Beweis des Weinsteinschen Satzes wenden wir das im letzten Kapitel beschriebene Verfahren auf eine einzige Koordinatenfunktion φ an. Dann ergibt sich an Stelle von (3.11):

$$(\mathbf{A}\varphi, \mathbf{A}\varphi) - (p + l)(\varphi, \mathbf{A}\varphi) + pl(\varphi, \varphi) = 0, \quad (4.1)$$

oder, unter Verwendung der Abkürzungen:

$$L = \frac{(\varphi, \mathbf{A}\varphi)}{(\varphi, \varphi)}; \quad L' = \frac{(\mathbf{A}\varphi, \mathbf{A}\varphi)}{(\varphi, \mathbf{A}\varphi)}; \quad w^2 = L(L' - L) \quad *** \quad (4.2)$$

nach kurzer Rechnung

$$(l - L)(L - p) = w^2, \quad (4.3)$$

unabhängig von der Wahl des Parameters p . Nun folgt aber aus dem 4. und 5. Satz über das Ritzsche Verfahren, dass L nie ausserhalb aller Eigenwerte liegen kann; es gibt also, von L aus gesehen, einen nächstkleineren und einen nächstgrösseren Eigenwert, die wir mit λ_N bzw. λ_{N+1} bezeichnen. Wählen wir nun in (4.3) $p = \lambda_N$, so ist nach (3.17) $l \geq \lambda_{N+1}$ und somit

$$(\lambda_{N+1} - L)(L - \lambda_N) \leq w^2. \quad (4.4)$$

Hieraus folgt der Weinsteinsche Satz: Für jede positive Zahl α

*) Diese zuletzt erwähnte Methode ist z. B. von HYLLEAAS wiederholt angewandt worden^{7) 11)}, sowie neuerdings von L. HULTHÉN und K. V. LAURIKAINEN¹²⁾ für die im 6. Kap. behandelte Differentialgleichung.

**) Vgl. dazu die Originalarbeit von WEINSTEIN¹³⁾; nach COLLATZ⁴⁾, S. 208, stammt die Idee zu diesem Satz allerdings schon von N. KRYLOFF und N. BOGOLUBOV, Bull. Acad. Sci. URSS., Classe phys. math., Leningrad (1929), p. 471.

***) Wir werden im nächsten Kapitel, Gl. (5.15), sehen, dass $L(L' - L)$ nie negativ ist.

muss im abgeschlossenen Intervall zwischen $L - \alpha w$ und $L + \alpha^{-1} w$ mindestens ein Eigenwert liegen. — Zur Verschärfung dieses Satzes führen wir nochmals zwei Abkürzungen ein:

$$d = \frac{1}{2} (\lambda_{N+1} - \lambda_N); \quad x = L - \frac{1}{2} (\lambda_{N+1} + \lambda_N). \quad (4.5)$$

Dann gilt identisch:

$$\lambda_{N+1} - L = d - x; \quad L - \lambda_N = d + x \quad (4.6)$$

und somit wegen (4.4): $x^2 \geq d^2 - w^2$. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt nun der neue Satz: *Ist $w < d$, so liegt zwischen $L - (d - \sqrt{d^2 - w^2})$ und $L + (d - \sqrt{d^2 - w^2})$ mindestens ein Eigenwert*; dieser Satz gilt, wie man sich leicht überlegt, a fortiori, wenn

$$\frac{1}{2} (\lambda_{N+1} - \lambda_N) \geq d > w. \quad (4.7)$$

Die Anwendung beider Sätze kommt in erster Linie für die Berechnung höherer Eigenwerte in Frage, die des zweiten vor allem dann, wenn $\lambda_{N+1} - \lambda_N$ aus der asymptotischen Eigenwertverteilung abgeschätzt werden kann. Die dadurch gewonnenen unteren Schranken für höhere Eigenwerte können dann als Ausgangspunkt für das im 3. Kapitel dargestellte Verfahren benutzt werden.

5. Das Iterationsverfahren.

In diesem Kapitel sollen kurz diejenigen Sätze über das Verfahren der fortgesetzten Näherungen zusammengestellt werden, welche als Ergänzung zum 3. und 4. Kapitel von Bedeutung sind*).

Das Iterationsverfahren beruht bekanntlich darauf, dass bei definiten Operatoren jede Funktion ψ , die zur ersten Eigenfunktion *nicht* orthogonal ist, durch wiederholte Anwendung des inversen Operators \mathbf{A}^{-1} immer mehr der ersten Eigenfunktion angenähert wird. Da wir uns hier mehr für die *Eigenwerte* als für die *Eigenfunktionen* interessieren, wollen wir vor allem die „Schwarzschen Konstanten“ α_j :

$$\alpha_j(\psi) = (\psi, \mathbf{A}^{-j} \psi), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

*) Eine eingehendere Diskussion dieses Verfahrens findet man z. B. bei COLLATZ (loc. cit.).

**) Über die praktische Berechnung von \mathbf{A}^{-1} lässt sich erst dann etwas aussagen, wenn man über \mathbf{A} Näheres weiss; so ist z. B. bekannt, dass die Berechnung von $\mathbf{A}^{-1}\psi$ auf eine Integralgleichung führt, wenn \mathbf{A} ein Differentialoperator ist.

und die Quotienten

$${}^j L(\psi) = \frac{\alpha_{j-1}(\psi)}{\alpha_j(\psi)} \quad (5.2)$$

untersuchen. Gehört ψ zu den im 7. Kapitel definierten Funktionsräumen \mathfrak{D} bzw. \mathfrak{D}' , so definieren wir sinngemäss α_{-1} und α_{-2} durch

$$\alpha_{-1}(\psi) = (\psi, \mathbf{A}\psi); \quad \alpha_{-2}(\psi) = (\mathbf{A}\psi, \mathbf{A}\psi), \quad (5.3)$$

so dass

$${}^0 L(\psi) = L(\psi); \quad {}^{-1} L(\psi) = L'(\psi). \quad (5.4)$$

Aus der Hermitezität von \mathbf{A} ergibt sich für positives j :

$$\alpha_j(\psi) = (\mathbf{A}^{-i}\psi, \mathbf{A}^{-(j-i)}\psi), \quad i = 0, 1, \dots, j, \quad (5.5)$$

unabhängig von i , also insbesondere wegen (1.5):

$$\alpha_{2k}(\psi) = (\mathbf{A}^{-k}\psi, \mathbf{A}^{-k}\psi) > 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.6)$$

und für alle reellen Werte von x :

$$x^2 \alpha_{2k} - 2x \cdot \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k-2} = ((x - \mathbf{A})\mathbf{A}^{-k}\psi, (x - \mathbf{A})\mathbf{A}^{-k}\psi) \geq 0; \quad (5.7)$$

das Gleichheitszeichen kann also höchstens für einen, nie aber für zwei verschiedene x -Werte gelten, woraus die Ungleichung

$$(\alpha_{2k-1}(\psi))^2 \leq \alpha_{2k}(\psi) \alpha_{2k-2}(\psi) \quad (5.8)$$

folgt. Wir haben noch nachzutragen, dass $\mathbf{A}^{-1}\psi, \mathbf{A}^{-2}\psi, \dots$ und damit $\alpha_1(\psi), \alpha_2(\psi), \dots$ nur dann für alle ψ existieren, wenn $\lambda = 0$ weder ein Eigenwert, noch ein Häufungspunkt von Eigenwerten von \mathbf{A} ist*); wir wollen deshalb für das Folgende annehmen, dass *entweder* \mathbf{A} positiv definit ist: Dann gilt bekanntlich:

$${}^0 L(\psi) \geq {}^1 L(\psi) \geq {}^2 L(\psi) \geq \dots \geq \lambda_1 \quad (5.9)$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} {}^j L(\psi) = \lambda_1 \quad \text{falls} \quad (\psi, f_1) \neq 0, \quad (5.10)$$

wobei λ_1 den ersten Eigenwert, f_1 die zugehörige Eigenfunktion bezeichnet; oder aber es gebe zwei *aufeinanderfolgende* Eigenwerte λ_0 und λ_1 , für welche

$$\lambda_0 < 0 < \lambda_1: \quad (5.11)$$

*) Im ersten Fall kann man sich von dieser Einschränkung dadurch befreien, dass man alle Vergleichs- bzw. Koordinatenfunktionen ψ zu der zum Eigenwert Null gehörigen Eigenfunktion f_0 orthogonalisiert, d. h. $(\psi, f_0) = 0$ verlangt. Ist $\lambda = 0$ ein mehrfacher Eigenwert, so muss ψ natürlich zu *allen* zugehörigen Eigenfunktionen orthogonal sein. Vgl. Lit. Nr. 6), S. 410/411.

Dann liegen alle Eigenwerte von \mathbf{A}^{-1} zwischen $1/\lambda_0$ und $1/\lambda_1$; nach dem 4. und 5. Satz über das Ritzsche Verfahren ist also

$$\frac{1}{\lambda_0} \leq \frac{1}{2^{k-1}L(\psi)} \leq \frac{1}{\lambda_1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.12)$$

Aus (5.8) und (5.12) ergibt sich nach kurzer Rechnung: Es ist *entweder*:

$$\lambda_0 \geq 2^{k-1}L(\psi) \leq 2^kL(\psi) < 0 \quad (5.13)$$

oder*):

$$\lambda_1 \leq 2^{k-1}L(\psi) \geq 2^kL(\psi) > 0, \quad (5.14)$$

also stets:

$$2^kL(\psi) (2^{k-1}L(\psi) - 2^kL(\psi)) \geq 0. \quad (5.15)$$

Ferner ergibt sich durch Anwendung von (5.9) auf den Operator \mathbf{A}^2

$$2^{k-1}L(\psi) 2^kL(\psi) \geq 2^{k+1}L(\psi) 2^{k+2}L(\psi) \geq \text{Min} \{\lambda_0^2, \lambda_1^2\}. \quad (5.16)$$

und schliesslich kann man noch beweisen, dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} {}^jL(\psi) = \begin{cases} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{cases} \quad \text{je nachdem ob} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}, \quad (5.17)$$

falls ψ nicht zufällig zu den Eigenfunktionen von λ_0 bzw. λ_1 orthogonal ist; in diesem Falle wäre λ_0 bzw. λ_1 durch den nächsttieferen bzw. nächsthöheren Eigenwert λ_i zu ersetzen, für welchen $(\psi, f_i) \neq 0$.

*Will man nicht nur den (absolut) kleinsten, sondern auch die zweit-, dritt-, ... -kleinsten Eigenwerte von \mathbf{A} berechnen, so kann man das Iterationsverfahren mit dem Ritzschen kombinieren**); die Wurzeln ${}^jL = {}^jL_i$ der Determinanten*

$$\det [(\psi_i, \mathbf{A}^{-(j-1)}\psi_m) - {}^jL_i(\psi_i, \mathbf{A}^{-j}\psi_m)] = 0 \quad (5.18)$$

streben nämlich im allgemeinen gegen die n absolut kleinsten Eigenwerte***). Bei positiv-definitem \mathbf{A} gilt ausserdem****):

$$L_i \geq {}^1L_i \geq {}^2L_i \geq \dots \geq \lambda_i \quad i = 1, \dots, n \quad (5.19)$$

*) Die erste Möglichkeit scheint SVARTHOLM¹⁴⁾ in seiner Ungleichung (2.21) übersehen zu haben.

**) Vgl. hierzu die „Variation-Iteration-Method“ von SVARTHOLM¹³⁾, sowie die Diss. des Verf.⁶⁾, S. 421.

***) Ausser wenn eine der zu diesen absolut kleinsten Eigenwerten gehörenden Eigenfunktionen zu *allen* ψ_1, \dots, ψ_n orthogonal ist; dann scheidet der betreffende Eigenwert natürlich aus.

****) Dies ist nicht etwa mit (5.9) identisch, da die Koeffizienten y_{il} von (2.3) bei der Iteration im allgemeinen geändert werden.

Für die Wurzeln ${}^j l = {}^j l(p)$ der Determinanten

$$\det [(\psi_l, \mathbf{A}^{-(j-2)} \psi_m) - (p + {}^j l) (\psi_l, \mathbf{A}^{-(j-1)} \psi_m) + {}^j l p (\psi_l, \mathbf{A}^{-j} \psi_m)] = 0 \quad (5.20)$$

gelten alle im 3. Kapitel für die l_i abgeleiteten Sätze sicher dann, wenn j gerade ist, bei positiv-definitem \mathbf{A} aber auch für ungerade j . Dagegen ist noch nicht allgemein untersucht worden, unter welchen Bedingungen die so erhaltenen unteren bzw. oberen Schranken durch die Iteration verbessert werden.

6. Anwendungsbeispiel.

Als Beispiel für die Anwendung des im 3. Kapitel beschriebenen Verfahrens behandeln wir die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \kappa^2 \Phi + \lambda \frac{e^{-x}}{x} \Phi = 0 \quad (6.1)$$

im Grundgebiet $x = 0$ bis ∞ und mit der Randbedingung

$$\Phi(0) = 0^{**}, \quad (6.2)$$

wobei κ ein Parameter, λ der gesuchte Eigenwert ist. Dieses Eigenwertproblem hat bekanntlich für die Berechnung der Bindungsenergie des Deuterons eine grosse Rolle gespielt (bis die Entdeckung seines Quadrupolmomentes zu komplizierteren Kraftansätzen führte) und ist daher von verschiedenen Autoren behandelt worden*). Die genauesten Rechnungen sind bisher von HULTHÉN ausgeführt worden, der für verschiedene κ -Werte nach dem Ritzschen Verfahren obere Schranken für die drei ersten Eigenwerte berechnet hat¹²⁾. Als Koordinatenfunktionen verwendet HULTHÉN die ersten Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \kappa^2 \psi + \lambda' \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \psi = 0, \quad (6.3)$$

welche exakt gelöst werden kann und ein Potential enthält, das mit e^{-x}/x in den wesentlichen Punkten qualitativ übereinstimmt¹⁵⁾. Die Eigenwerte von (6.3) sind

$$\lambda_n' = n(n + 2\kappa), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.4)$$

*) Alle diese Arbeiten sind im letzten Artikel von HULTHÉN und LAURIKAINEN¹²⁾ zitiert.

**) Das Verhalten von Φ für $\kappa \rightarrow \infty$ wird durch die Forderung $(\Phi, \Phi) < \infty$ bestimmt; vgl. (6.6) und (7.6).

und die drei ersten Eigenfunktionen lauten, abgesehen von einem willkürlichen Normierungsfaktor:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= e^{-\kappa x}(1 - e^{-x}) \\ \psi_2 &= e^{-\kappa x}(1 - e^{-x}) \left((3 + 2\kappa)(1 - e^{-x}) - 2 \right) \\ \psi_3 &= e^{-\kappa x}(1 - e^{-x}) \left((5 + 2\kappa)(2 + \kappa)(1 - e^{-x})^2 - 6(2 + \kappa)(1 - e^{-x}) + 3 \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Für das Eigenwertproblem (6.1)–(6.2) sind das hermitesche Produkt und der Operator **A** durch

$$(\varphi, \psi) = \int_0^\infty \varphi(x) \psi(x) \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{A} = x e^x \cdot \left(\kappa^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \quad (6.7)$$

gegeben, so dass also

$$(\varphi, \mathbf{A} \psi) = \int_0^\infty \varphi \left(\kappa^2 \psi - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) dx, \quad (6.8)$$

$$(\mathbf{A} \varphi, \mathbf{A} \psi) = \int_0^\infty \left(\kappa^2 \varphi - \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \left(\kappa^2 \psi - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) x e^x dx. \quad (6.9)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} M^{(n)}(1 + 2\kappa) &= \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-x})^n}{x} e^{-(1+2\kappa)x} dx \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot \ln(k + 1 + 2\kappa) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

so erhält man mit den Koordinatenfunktionen (6.5):

$$\left. \begin{aligned} (\psi_1, \psi_1) &= \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-x})^2}{x} e^{-(1+2\kappa)x} dx = M^{(2)}(1 + 2\kappa) \\ (\psi_1, \psi_2) &= (3 + 2\kappa) M^{(3)}(1 + 2\kappa) - 2 M^{(2)}(1 + 2\kappa) \\ (\psi_2, \psi_2) &= (3 + 2\kappa)^2 M^{(4)}(1 + 2\kappa) - \\ &\quad - 4(3 + 2\kappa) M^{(3)}(1 + 2\kappa) + 4 M^{(2)}(1 + 2\kappa) \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

und so fort. Ferner ergibt sich nach einiger Rechnung:

$$(\psi_l, \mathbf{A} \psi_m) = \frac{\delta_{lm} \cdot m^2}{2(m+\kappa)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(1+\kappa)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2+\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2(3+\kappa)} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

$$(\mathbf{A} \psi_l, \mathbf{A} \psi_m) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+\kappa} & \frac{3}{(1+\kappa)(3+2\kappa)} \\ \frac{1}{1+\kappa} & 8 & \frac{3 \cdot (11+6\kappa)}{(3+2\kappa)(2+\kappa)} \\ \frac{3}{(1+\kappa)(3+2\kappa)} & \frac{3 \cdot (11+6\kappa)}{(3+2\kappa)(2+\kappa)} & 27 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Aus diesen Matrizen wurden die Ritzschen Werte L_i und die „Grammelschen Werte“ L_i' *) als Wurzeln der Säkulargleichungen

$$\det [(\psi_l, \mathbf{A} \psi_m) - L(\psi_l, \psi_m)] = 0 \quad (6.14)$$

und

$$\det [(\mathbf{A} \psi_l, \mathbf{A} \psi_m) - L'(\psi_l, \mathbf{A} \psi_m)] = 0 \quad (6.15)$$

für $\kappa = 0, 0,1, \dots, 1$ berechnet (siehe Tabelle 1).

Zur Berechnung *unterer Schranken* für λ_1 und λ_2 nach dem im 3. Kapitel geschilderten Verfahren benötigen wir zuerst eine grobe untere Schranke für den 3. oder 4. Eigenwert. Hiefür verwenden wir die *WKB-Methode***) in folgender vereinfachter Weise: Wir schreiben zuerst die Differentialgleichungen (6.1) und (6.3) in der Form:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \chi^2 \Phi = 0; \quad \chi = \sqrt{\lambda \frac{e^{-x}}{x} - \kappa^2}, \quad (6.16)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \chi'^2 \psi = 0; \quad \chi' = \sqrt{\lambda' \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \kappa^2}. \quad (6.17)$$

Integriert man χ' von 0 bis zu demjenigen Wert x_1' , bei welchem $\chi' = 0$ wird, so ergibt sich nach einiger Rechnung:

$$\int_0^{x_1'} \chi' dx = \int_0^{x_1'} \sqrt{n(n+2\kappa) \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \kappa^2} dx = n\pi. \quad (6.18)$$

*) Gl. (6.15) entspricht der Gl. (5.18) mit $j = -1$; analog zu (5.19) muss $L_i' - L_i \geq 0$ sein und die Grösse dieser Differenz gibt einen Anhaltspunkt für den „Fehler“ $L_i - \lambda_i$; vgl. hierzu auch die Diss. des Verf.⁶⁾.

**) Eine ausführliche Darstellung dieser Methode findet sich bei KEMBLE¹⁶⁾, eine kürzere z. B. bei SCHIFF¹⁷⁾.

Wegen der Ähnlichkeit der Potentiale in (6.16) und (6.17) ist zu erwarten, dass die Werte Λ_n , für welche

$$\int_0^{x_1} \chi \, dx = \int_0^{x_1} \sqrt{\Lambda_n \frac{e^{-x}}{x} - \kappa^2} \, dx = n\pi, \quad (6.19)$$

$\chi(x) > 0$ nur für $0 < x < x_1$

Tabelle 1.

Näherungswerte für die Eigenwerte der Differentialgleichung (6.1).

$\kappa = 0,0$	κ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$L_3 = 16,6292$	L'_3	19,8616	20,3572	20,8663	21,3862	21,9150
${}^1L_3 = 15,4559$	L_3	16,6292	17,3819	18,1056	18,8081	19,4946
$\Lambda_3 = 14,137$	Λ_3	14,137	14,95	15,71	16,45	17,17
$L_2 = 6,44851$	L'_2	6,45664	6,93767	7,40885	7,87200	8,32851
${}^1L_2 = \mathbf{6,44758}$	L_2	6,44851	6,93156	7,40335	7,86647	8,32267
${}^1l_2 = \mathbf{6,44700}$	l_2	6,44169	6,92648	7,39916	7,86270	8,31907
${}^1L_2 - {}^1l_2 = ,00058$	$L_2 - l_2$,00682	,00508	,00419	,00377	,00360
$\Lambda_2 = 6,283$	Λ_2	6,283	6,81	7,31	7,79	8,25
$L_1 = 1,679853$	L'_1	1,681753	1,905142	2,124869	2,341791	2,556509
${}^1L_1 = \mathbf{1,679810}$	L_1	1,679853	1,904002	2,124151	2,341321	2,556191
${}^1l_1 = \mathbf{1,679806}$	l_1	1,679697	1,903901	2,124083	2,341274	2,556158
${}^1L_1 - {}^1l_1 = ,000004$	$L_1 - l_1$,000156	,000101	,000068	,000047	,000033
$\Lambda_1 = 1,571$	Λ_1	1,571	1,82	2,06	2,29	2,51

κ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
L'_3	22,4511	22,9933	23,5408	24,0928	24,6487	25,2080
L_3	20,1686	20,8327	21,4887	22,1381	22,7820	23,4212
Λ_3	17,87	18,57	19,26	19,94	20,60	21,25
L'_2	8,77945	9,22569	9,66790	10,10663	10,54233	10,97538
L_2	8,77322	9,21907	9,66093	10,09937	10,54386	10,96775
l_2	8,76965	9,21545	9,65724	10,09559	10,53997	10,96377
$L_2 - l_1$,00357	,00362	,00369	,00378	,00389	,00398
Λ_2	8,71	9,16	9,61	10,05	10,49	10,93
L'_1	2,769459	2,980961	3,191261	3,400551	3,608982	3,816674
L_1	2,769237	2,980802	3,191146	3,400466	3,608917	3,816624
l_1	2,769212	2,980784	3,191132	3,400455	3,608909	3,816617
$L_1 - l_1$,000025	,000018	,000014	,000011	,000008	,000007
Λ_1	2,73	2,95	3,16	3,37	3,58	3,79

gute Näherungen für die Eigenwerte λ_n von (6.16) sind. Dies wird durch Tab. 1 bestätigt; die Abweichung von den Ritzschen Werten ist aber doch so gross (verglichen mit $L_n' - L_n$), dass wir mit Sicherheit behaupten können: Für $n = 1, 2$ und $0 \leq \kappa \leq 1$ ist

$$A_n < \lambda_n \quad (6.20)$$

Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass diese Ungleichung auch für $n = 3$ gilt: Dann sind nach (3.15)–(3.18) die beiden kleinsten Wurzeln (l_1 und l_2) von

$$\det [(\mathbf{A} \psi_l, \mathbf{A} \psi_m) - (A_3 + l) (\psi_l, \mathbf{A} \psi_m) + A_3 l (\psi_l, \psi_m)] = 0 \quad (6.21)$$

untere Schranken für λ_1 und λ_2 .

Aus Tabelle 1 ist ersichtlich, dass die Differenz zwischen den oberen und unteren Schranken am grössten wird, wenn $\kappa = 0$ ist. Gerade in diesem Falle ist es aber leicht möglich, beide Schranken durch *Iteration* zu verbessern. Da nämlich nach (6.7) für $\kappa = 0$ einfach

$$\mathbf{A}_0 = -x e^x \cdot \frac{d^2}{dx^2} \quad (6.22)$$

ist, folgt nach bekannten Sätzen über Integralgleichungen:

$$\mathbf{A}_0^{-1} \psi(x) = \int_0^\infty G(x, x') \frac{e^{-x'}}{x'} \psi(x') dx' \quad (6.23)$$

mit

$$G(x, x') = \begin{cases} x, & \text{wenn } x < x' \\ x', & \text{wenn } x > x' \end{cases}. \quad (6.24)$$

$(\varphi, \mathbf{A}_0^{-1} \psi)$ lässt sich in der symmetrischen Form:

$$(\varphi, \mathbf{A}_0^{-1} \psi) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, x') \frac{e^{-(x+x')}}{x \cdot x'} \varphi(x) \psi(x') dx dx' \quad (6.25)$$

schreiben; dies ist hier wichtig, weil für unsere Koordinatenfunktionen (6.5) das Integral (6.23) nicht geschlossen ausgewertet werden kann, wohl aber das Doppelintegral in (6.25). Es ist nämlich — unter Benutzung der Abkürzung $M^{(n)}$ aus (6.10) —

$$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-x})^j}{x} e^{-x} \left[\int_0^x (1-e^{-x'})^k e^{-x'} dx' \right] dx = \frac{M^{k-j+1}}{k+1} (1) \quad (6.26)$$

und folglich wegen der Symmetrie des Integrals (6.25):

$$((1-e^{-x})^j, \mathbf{A}_0^{-1} (1-e^{-x})^k) = \left(\frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1} \right) M^{k+j+1} (1), \quad (6.27)$$

womit die $(\psi_i, \mathbf{A}_0 \psi_m)$ leicht berechnet werden können. Ersetzen wir nun in den Säkulargleichungen (6.14), (6.15) und (6.21) (ψ_i, ψ_m) , $(\psi_i, \mathbf{A} \psi_m)$ und $(\mathbf{A} \psi_i, \mathbf{A} \psi_m)$ durch $(\psi_i, \mathbf{A}_0^{-1} \psi_m)$, (ψ_i, ψ_m) und $(\psi_i, \mathbf{A}_0 \psi_m)$, so erhalten wir an Stelle von L_i' , L_i und l_i , die um einen „halben Iterationsschritt“ verbesserten Werte L_i , 1L_i und 1l_i , welche in der ersten Kolonne von Tabelle 1 eingetragen sind. Man sieht daraus, dass der Abstand der Fehlerschranken durch diese Iteration für den zweiten Eigenwert auf etwa ein Zehntel, für den ersten sogar auf ein Vierzigstel des alten Wertes heruntergedrückt werden konnte.

7. Zulassungsbedingungen für die Koordinatenfunktionen.

R. COURANT¹⁸⁾ hat für elliptische Differentialgleichungen untersucht, welche Funktionen zum Variationsproblem (7.1) zugelassen werden dürfen, wenn dieses mit dem Eigenwertproblem (1.1) äquivalent sein soll. Leider sind diese mathematisch exakten Kriterien für die praktische Rechnung wenig geeignet; wir wollen deshalb versuchen, allgemein gültige und leicht kontrollierbare Bedingungen für die Äquivalenz von (1.1) und (7.1) zu finden.

Den linearen Raum der zum Variationsproblem

$$\delta L(\psi) = 0 \quad (7.1)$$

zugelassenen Funktionen ψ wollen wir, in Anlehnung an COURANT-HILBERT¹⁸⁾, mit \mathfrak{D} bezeichnen und für „ ψ gehört zu \mathfrak{D} “ kurz $\psi \in \mathfrak{D}$ schreiben. — (7.1) bedeutet: Ist $\psi - f_i$ eine Lösung dieses Variationsproblems, so muss in erster Näherung gelten:

$$\delta L(\psi) = L(f_i + \delta \psi) - L(f_i) = 0, \quad \text{wenn } \delta \psi \in \mathfrak{D}, \quad (7.2)$$

oder, was offenbar dasselbe bedeutet:

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(f_i + \varepsilon \varphi) = 0 \quad \text{für } \varepsilon = 0, \quad \text{wenn } \varphi \in \mathfrak{D}. \quad (7.3)$$

Nach der Definition von $L(\psi)$ führt dies auf die Gleichung:

$$(\varphi, \mathbf{A} f_i) + (f_i, \mathbf{A} \varphi) - L(f_i) \{(\varphi, f_i) + (f_i, \varphi)\} = 0. \quad (7.4)$$

Andrerseits folgt aus der Eigenwertgleichung (1.1) für jede Funktion φ , für welche das hermitesche Produkt definiert ist*):

$$(\varphi, \mathbf{A} f_i) + (\mathbf{A} f_i, \varphi) - \lambda_i \{(\varphi, f_i) + (f_i, \varphi)\} = 0, \quad (7.5)$$

*) Also für jedes $\varphi \in \mathfrak{H}$, wenn \mathfrak{H} den zugehörigen Hilbertschen Raum bezeichnet; vgl. NEUMANN¹⁾, S. 21.

Die beiden letzten Gleichungen, und damit das Variationsproblem (7.1) und das Eigenwertproblem (1.1) sind offenbar dann äquivalent, wenn wir den Funktionsraum \mathfrak{D} wie folgt definieren:

$$\varphi \in \mathfrak{D}, \text{ wenn } \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \varphi) < \infty, (\varphi, \mathbf{A} \varphi) < \infty^* \\ \text{und } (f_i, \mathbf{A} \varphi) = (\mathbf{A} f_i, \varphi) \end{array} \right\}. \quad (7.6)$$

Da das Ritzsche Verfahren auf dem Variationsprinzip (7.1) beruht, müssen, damit die Sätze des 2. Kapitels gültig sind, die Koordinatenfunktionen φ_i in (2.1) diesen Bedingungen ($\varphi_i \in \mathfrak{D}$) genügen. Die letzte Bedingung in (7.6) scheint zunächst unbrauchbar zu sein, da wir ja die Eigenfunktionen f_i noch nicht kennen; in den meisten Fällen ist es aber leicht, das qualitative Verhalten der Eigenfunktionen in allen wichtigen Punkten (am Rande, im Unendlichen, in singulären Punkten usw.) so weit zu bestimmen, dass die Gültigkeit von (7.6) (d. h. bei Differentialoperatoren: Das Verschwinden der Randterme bei der partiellen Integration) nachgeprüft werden kann.

Oft ist es möglich, $(\varphi, \mathbf{A} \varphi)$ durch partielle Integration in eine symmetrische Gestalt zu bringen**), die wir mit $(\varphi \mathbf{A} \varphi)$ — ohne Komma — bezeichnen wollen. Dann genügen für die Äquivalenz des Variationsproblems

$$\delta \frac{(\varphi \mathbf{A} \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = 0 \quad (7.7)$$

mit (1.1) die etwas schwächeren Bedingungen:

$$\varphi \in \mathfrak{D}_s, \text{ d. h. } \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \varphi) < \infty, (\varphi \mathbf{A} \varphi) < \infty \\ \text{und } (f_i \mathbf{A} \varphi) = (\mathbf{A} f_i, \varphi) \end{array} \right\}. \quad (7.8)$$

*) Dies soll bedeuten: (φ, φ) und $(\varphi, \mathbf{A} \varphi)$ — oft sind dies uneigentliche Integrale — existieren, d. h. divergieren nicht.

**) Beispiele: 1. Für $\mathbf{A} = -d^2/dx^2$, also $\mathbf{A} \varphi = -\varphi''$, ergibt sich

$$(\varphi, \mathbf{A} \varphi) = - \int_a^b \varphi \varphi'' dx = \int_a^b (\varphi')^2 dx = (\varphi \mathbf{A} \varphi),$$

wenn am Rande ($x = a, x = b$)

$$\varphi = 0 \text{ oder } \varphi' = 0.$$

2. Für den Operator

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x, y, z) \right)$$

ergibt sich aus dem Greenschen Satz (falls die Randterme verschwinden):

$$(\varphi \mathbf{A} \varphi) = \iiint \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\text{grad } \varphi|^2 + V(x, y, z) \cdot \varphi^2 \right) dx dy dz.$$

Für weitere Beispiele vgl. COURANT-HILBERT II¹⁸), Kap. VII, sowie die Diss. des Verf.⁶).

Auch für das Ritzsche Verfahren genügen dann die Bedingungen $\psi_i \in \mathfrak{D}_s$, wenn wir überall $(\psi_i, \mathbf{A} \psi_m)$ durch $(\psi_i, \mathbf{A} \varphi_m)$ ersetzen.

Analog kann man zeigen, dass für die Anwendung des erweiterten Ritzschen Verfahrens in der Form (3.11) und für den Weinsteinischen Einschliessungssatz, also überall da, wo der Ausdruck $(\mathbf{A} \varphi, \mathbf{A} \varphi)$ auftritt, die Bedingungen:

$$\varphi \in \mathfrak{D}' \text{ d. h. } \varphi \in \mathfrak{D} \text{ und } (\mathbf{A} \varphi, \mathbf{A} \varphi) < \infty \quad (7.9)$$

erfüllt sein müssen.

8. Beweise zum erweiterten Ritzschen Verfahren.

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, wie die vier Sätze des 3. Kapitels (Gl. (3.12)–(3.17)) bewiesen werden können, doch werden wir die Beweise nicht bis in alle Einzelheiten durchführen. — Es ist für das Folgende vorteilhaft, die Hilfsfunktion

$$l(p, \varphi) = \frac{(\mathbf{A} \varphi, \mathbf{A} \varphi) - p(\varphi, \mathbf{A} \varphi)}{(\varphi, \mathbf{A} \varphi) - p(\varphi, \varphi)} \quad (8.1)$$

einzuführen, welche für alle $\varphi \in \mathfrak{D}'$ definiert ist. Man überlegt sich leicht, dass $l(p, \varphi)$ für jede Eigenfunktion stationär und gleich dem zugehörigen Eigenwert wird. Beschränken wir uns aber auf einen durch den Ansatz

$$\varphi = \sum_{i=1}^n z_i \varphi_i, \quad \varphi_i \in \mathfrak{D}' \quad (8.2)$$

aufgespannten (n -dimensionalen) Funktionenraum \mathfrak{D}_n' , so wird $l(p, \varphi)$ in \mathfrak{D}_n' genau dann stationär, wenn

$$\frac{\partial l(p, \varphi)}{\partial z_m} = \frac{\partial l(p, z, \dots, z_n)}{\partial z_m} = 0 \quad \text{für } m = 1, \dots, n, \quad (8.3)$$

oder, wie sich nach kurzer Rechnung ergibt*):

$$\sum_{i=1}^n \{(\mathbf{A} \varphi_i, \mathbf{A} \varphi_m) - (p + l)(\varphi_i, \mathbf{A} \varphi_m) + p l(\varphi_i, \varphi_m)\} z_i = 0. \quad (8.4)$$

Dieses Gleichungssystem für die z_i ist genau dann lösbar, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet: Die stationären Werte von $l(p, \varphi)$ in \mathfrak{D}_n' sind also identisch mit den Wurzeln $l_i(p)$ von (3.11). Für jeden dieser Werte gibt es eine Lösung $z_{i1}(p), \dots$,

*) Vgl. Lit. Nr. 6, Gl. (62)–(65).

$z_{in}(p)$, (die wir als „Lösungsvektor“ in \mathfrak{D}_n' ansehen können) und eine zugehörige „Lösungsfunktion“ $h_i(p)$:

$$h_i(p) = \sum_{l=1}^n z_{il}(p) \varphi_l, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.5)$$

welche für $p \rightarrow \infty$ in eine der Ritzschen Lösungsfunktionen übergeht. — Aus Gl. (8.3) ergibt sich nun, dass

$$\frac{dl_i}{dp} = \frac{\partial l(p, h_i)}{\partial p} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial l(p, h_i)}{\partial z_m} \frac{dz_m}{dp} = \frac{\partial l(p, h_i)}{\partial p}; \quad (8.6)$$

weiter aus der Definition von $l(p, \varphi)$ und der Ungleichung (5.8):

$$\frac{\partial l(p, \varphi)}{\partial p} = \frac{(\varphi, \varphi) \cdot (\mathbf{A}\varphi, \mathbf{A}\varphi) - (\varphi, \mathbf{A}\varphi)^2}{\{(\varphi, \mathbf{A}\varphi) - p(\varphi, \varphi)\}^2} \geq 0 \quad (8.7)$$

für jedes $\varphi \in \mathfrak{D}'$, also insbesondere für jedes h_i , womit der erste Satz bewiesen ist.

Der erste Teil des zweiten Satzes ergibt sich sofort aus (3.11), wenn wir jedes Element der Determinante durch p dividieren und $1/p$ gegen Null streben lassen; der zweite Teil folgt, wie man am besten aus Fig. 1 abliest, aus der Symmetrie dieser Figur bezüglich Vertauschung von p und l .

Den dritten Satz beweisen wir zuerst für $p = 0$ (wir werden weiter unten sehen, dass dies genügt): Dann ist einfach

$$l(\varphi) = l(0, \varphi) = \frac{(\mathbf{A}\varphi, \mathbf{A}\varphi)}{(\varphi, \mathbf{A}\varphi)}, \quad (8.8)$$

und die h_i können, da $(\mathbf{A}h_i, \mathbf{A}h_i)$ stets positiv ist, durch

$$(\mathbf{A}h_i, \mathbf{A}h_j) = \delta_{ij}, \quad (h_i, \mathbf{A}h_j) = \frac{1}{l_i} \delta_{ij} \quad (8.9)$$

normiert werden, was sich am schnellsten durch Anwendung des Ritzschen Verfahrens — insbesondere von Gl. (2.7) — auf den Operator \mathbf{A}^{-1} und mit den Koordinatenfunktionen $\mathbf{A}\varphi_l$ ergibt. Die h_i wie auch die „gewöhnlichen“ Ritzschen Lösungsfunktionen g_i von (2.3) bilden je ein vollständiges Funktionensystem in \mathfrak{D}_n' ; man kann also jede Funktion $\psi \in \mathfrak{D}_n'$ als Linearkombination der g_i oder der h_i darstellen:

$$\psi = \sum_{m=1}^n x_m g_m = \sum_{m=1}^n \kappa_m h_m. \quad (8.10)$$

Für unseren Beweis brauchen wir nun insbesondere ein solches ψ , für welches

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{j-1} = 0; \quad \kappa_{j+1} = \dots = \kappa_n = 0. \quad (8.11)$$

Das sind $(n-1)$ homogene Gleichungen für n unabhängige Unbekannte; es gibt also sicher für jedes j eine solche Funktion, und

da wir sowohl die L_i wie auch die l_i der Grösse nach geordnet haben, ist

$$l(\psi) = \sum_{m=i}^n \kappa_m^2 \left(\sum_{m=i}^n \frac{1}{l_m} \kappa_m^2 \right)^{-1} \geq l_i, \quad (8.12)$$

$$L(\psi) = \sum_{m=1}^i l_m x_m^2 \left(\sum_{m=1}^i x_m^2 \right)^{-1} \leq L_i. \quad (8.13)$$

Ist nun $L_i < 0$, so folgt aus (8.13), (8.8) und (5.15):

$$l(\psi) \leq L(\psi), \quad (8.14)$$

und aus den letzten drei Ungleichungen $l_i \leq L_i$, womit die erste Zeile von (3.15) für $p = 0$ bewiesen ist; ganz analog verläuft der Beweis für die zweite Zeile. Ist aber $p \neq 0$, so kann das Problem durch die Transformation

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - p \cdot \mathbf{1}, \quad \bar{L}_i = L_i - p, \quad \bar{l}_i = l_i - p \quad (8.15)$$

auf den Spezialfall $p = 0$ zurückgeführt werden.

Der vierte Satz endlich ergibt sich durch Anwendung des Ritzschen Verfahrens, insbesondere Gl. (2.8)–(2.11), auf den zu Beginn des 3. Kapitels definierten Operator \mathbf{B} mit den Eigenwerten μ_i und Rücktransformation in die λ -Skala gemäss Gl. (3.3). Auf die Wiedergabe dieser elementaren, aber etwas umständlichen Rechnungen soll hier verzichtet werden, da man sich den Sachverhalt leichter an Hand einer Skizze (als rechnerisch) klarmachen kann.

9. Zwei Ergänzungen.

1. Alle oben beschriebenen Methoden lassen sich fast unverändert auch dann anwenden, wenn neben den diskreten Eigenwerten ein Kontinuum auftritt, indem man nämlich dieses Streckenspektrum als Limes eines sehr dichten Linienspektrums auffasst*). Besteht z. B. das Gesamtspektrum eines Operators \mathbf{A} aus zwei diskreten Eigenwerten λ_1, λ_2 und einem Kontinuum mit der Untergrenze $\lambda' > \lambda_2$, so gelten für die Ritzschen Werte die Ungleichungen:

$$\lambda_1 \leq L_1, \quad \lambda_2 \leq L_2, \quad \lambda' < L_3 \leq \dots \leq L_n. \quad (9.1)$$

Kennt man $\lambda'^{**})$ und ist $L_2 < \lambda'$, so wird man für das erweiterte Ritzsche Verfahren mit Vorteil $p = \lambda'$ wählen; dann ist nämlich

$$l_1 \leq \lambda_1, \quad l_2 \leq \lambda_2, \quad \lambda' < l_3 \leq \dots \leq l_n, \quad (9.2)$$

*) Dies ergibt sich aus einer unpublizierten Untersuchung des Verf. mit Hilfe des hierfür besonders geeigneten Neumannschen Formalismus¹⁾.

**) Z. B. bei der Berechnung von Bindungsenergien, wo $\lambda' = 0$ ist.

wodurch die beiden diskreten Eigenwerte in Schranken eingeschlossen sind.

2. Oft ist es mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden möglich, die gesamte Menge der Eigenfunktionen in Teilmengen einzuteilen, die sich durch ihre Symmetrieeigenschaften unterscheiden; dann wird man natürlich auch den Raum \mathfrak{D} bzw. \mathfrak{D}' der zulässigen Koordinatenfunktionen in die entsprechenden invarianten Teilräume aufspalten, d. h. von den Koordinatenfunktionen jeweils dieselben Symmetrieeigenschaften fordern, welche der gesuchten Eigenfunktion zukommen.

Diese Arbeit ist in der Hauptsache bei der Vorbereitung und Durchführung numerischer Berechnungen von Bindungsenergien und Streuphasen entstanden, welche leider wegen der augenblicklichen Unsicherheit in den Kraftansätzen eingestellt werden mussten. Der Anwendungsbereich der hier geschilderten Methoden geht aber sicher weit über diese speziellen Anwendungen hinaus.

Herrn Prof. Dr. PAUL SCHERRER möchte ich für die Unterstützung und Förderung dieser Arbeit herzlich danken. Ausserdem bin ich Herrn ALFRED AEPPLI, dipl. math. ETH., für die kritische Durchsicht des ersten Entwurfes zu Dank verpflichtet.

Literatur.

- 1) J. v. NEUMANN, Math. Grundlagen der Quantenmechanik, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 38.
- 2) W. RITZ, J. f. reine und angew. Math. **135**, 1—61 (1909); Annalen d. Physik (4), **28**, 737—786 (1909) oder: Gesammelte Werke (S. 192—316), Paris 1911.
- 3) L. COLLATZ, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **19**, 224 (1939).
- 4) L. COLLATZ, Eigenwertprobl. u. ihre num. Behandlung, Leipzig 1945.
- 5) L. COLLATZ, Eigenwertaufgaben mit techn. Anwendungen, Leipzig 1949.
- 6) H. J. MAEHLY, Erg. der ex. Naturw. **24**, 402 (1951).
- 7) E. A. HYLLERAAS, Zeitschr. f. Physik **48**, 469 (1928).
- 8) L. ROSENFELD, Nuclear Forces, Amsterdam 1948.
- 9) L. HULTHEN, C. R., 10e Congrès des Math. Scand., 201 (1946).
- 10) H. J. MAEHLY, Nuovo Cimento **8**, 466 (1951).
- 11) E. A. HYLLERAAS, Zeitschr. f. Physik **65**, 209 (1930).
- 12) L. HULTHEN und K. V. LAURIKAINEN, Rev. of Mod. Physics **23**, 1 (1951).
- 13) D. H. WEINSTEIN, Proc. Nat. Acad. Sci. of USA. **20**, 529 (1934).
- 14) N. SVARTHOLM, Dissertation Lund 1945.
- 15) L. HULTHEN, Arkiv f. mat. astr. och fysik **28** A, No. 5 (1942).
- 16) E. C. KEMBLE, The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, McGraw-Hill 1937.
- 17) L. I. SCHIFF, Quantum Mechanics, McGraw-Hill 1949.
- 18) R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. II; Grndl. der math. Wissensch., Bd. 48.
- 19) N. J. LEHMANN, Diss. T. H. Dresden 1948, publ. in Z. angew. Math. u. Mech. **29**, 341 (1949) und **30**, 1 (1950).

Bemerkungen zur skalaren Paartheorie

von Gregor Wentzel

Institute for Nuclear Studies University of Chicago, Chicago, Ill. (U.S.A.)

(12. V. 52).

Die im Titel genannte Theorie hat neues Interesse auf sich gelenkt dadurch, dass in den pseudoskalaren Yukawa-Theorien, durch Transformationen nach DYSON¹⁾ oder FOLDY²⁾, Wechselwirkungsterme vom Paartheorie-Typus isoliert werden können, derart, dass die (pseudo-) skalare Paartheorie als eine „nullte Näherung“ zur pseudoskalaren Yukawa-Theorie gelten kann³⁾. Dieser Zusammenhang hat den Verfasser veranlasst, frühere Untersuchungen über die Sättigungseigenschaften der Kernkräfte nach der Paartheorie⁴⁾ weiterzuführen. Die folgende Analyse soll zeigen, dass die Sättigung nach dieser Theorie als Folge der Mehrkörperkräfte zustande kommt, während die Austauschkräfte eine untergeordnete Rolle spielen.

Die Theorie sei charakterisiert durch die Hamilton-Funktion:

$$H = \int dX \left[\Phi^* \frac{-\Delta}{2M} \Phi + \pi^* \pi + \psi^* (\mu^2 - \Delta) \psi + \lambda \Phi^* \Phi \psi^* \psi \right] \quad (1)$$

(Φ = Nukleonfeld, nonrelativistisch, 4 Komponenten für Spin und Ladung; ψ = Mesonfeld, komplex; neutrale Mesonen bleiben ausser Betracht. Die im Wechselwirkungsterm benötigte „Abschneidung“ wird erst später eingeführt. \hbar und $c = 1$ gesetzt.) Die früheren Untersuchungen⁴⁾ betrafen die „statische Näherung“:

$$\Phi^* \Phi \rightarrow \sum_s N_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s),$$

und zwar wurden die Nukleonen in einem oder in zwei Raumpunkten fixiert angenommen, oder es wurde eine periodische Gitteranordnung vorausgesetzt. Für diese Probleme wurden strenge Lösungen abgeleitet, und in der Abhängigkeit von den lokalen Besetzungszahlen N_s bzw. von der Gitterkonstante (Nukleonendichte) traten typische Sättigungserscheinungen zutage.

Gegen die Anwendung der statischen Näherung auf dichte Kernmaterie kann folgender Einwand erhoben werden. Betrachten wir, für den Augenblick, die Wechselwirkung als schwach, so beschreibt sie Meson-Nukleon-Streuprozesse sowie die Erzeugung und Vernichtung von Mesonpaaren bei Nukleon-Nukleon-Stößen. Bei Anwesenheit vieler Nukleonen sind viele dieser (virtuellen) Prozesse

durch das Pauli-Prinzip verboten, weil die betreffenden Nukleon-Endzustände besetzt sind. Dieses Verbot bleibt in der statischen Näherung unberücksichtigt, weil die Zustandsänderung der Nukleonen ignoriert wird; mit anderen Worten, die zugelassenen Impulsänderungen des Mesonfeldes werden *nicht* durch Gesamtimpulserhaltung plus Pauli-Prinzip eingeschränkt. Freilich möchte man vermuten, dass die Einbeziehung des Pauli-Prinzips die Sättigungstendenzen nicht beeinträchtigt, sondern eher verstärkt, denn die betrachteten Kräfte sind ja anziehend und können durch das Wegfallen von Termen nur verringert werden. Tatsächlich ist die Sachlage aber verwickelter wegen der vorzunehmenden Selbstenergie-Subtraktionen.

Es mag daher angezeigt sein, die Frage nach dem Sättigungscharakter der Kräfte wieder aufzunehmen, auf Grund eines Kernmodells, das dem Pauli-Prinzip Rechnung trägt, nämlich des *Fermiongas-Modells*. Zur Vereinfachung soll aber noch „statisch“ gerechnet werden, insofern, als die Nukleon-Rückstöße *energetisch* vernachlässigt werden: die kinetische Energie der Nukleonen, d. h. der erste Term in H (1), gilt als vertauschbar mit den übrigen Termen und wird als additive Konstante geführt:

$$H_{\text{kin}} = N \cdot \frac{3}{10} \frac{p_F^2}{M}$$

(N = Nukleonen-Gesamtzahl, p_F = Radius der Fermikugel im Impulsraum). Die Vernachlässigung der Nukleon-Rückstossenergien bringt natürlich einen Fehler mit sich, der namentlich ins Gewicht fallen kann, wenn hohe Meson-Impulse ($\gg \mu$) eine Rolle spielen, doch wird die „Abschneidung“ dieser Impulse dafür sorgen, dass keine qualitative Fälschung der Resultate eintritt.

Die nächstliegende Methode zur Behandlung des mathematischen Problems bestände darin, die in I berechneten Zwei- und Mehrkörperpotentiale zu übernehmen und den Erwartungswert der Energie (einschliesslich Austauschenergie) für den Grundzustand des Nukleongases auszurechnen. Es zeigt sich indessen, dass man einen günstigeren Ausgangspunkt für die folgende Diskussion gewinnt, indem man auf die Hamilton-Funktion (1) zurückgeht und beachtet, dass sie, nach Abzug von H_{kin} , ein System linear gekoppelter Oszillatoren darstellt.

Wie in I sei

$$\varphi = V^{-\frac{1}{2}} \sum_t q_t e^{itx}, \quad \pi = V^{-\frac{1}{2}} \sum_t p_t e^{-itx};$$

ferner

$$\Phi^* \Phi = \varrho = \sum_t \varrho_t e^{itx} \quad \left(\varrho_0 = \frac{N}{V} = \frac{2}{3\pi^2} p_F^3 \right). \quad (2)$$

Alle Operatoren $q_{\mathfrak{f}}$ kommutieren untereinander und können daher wie c -Zahlen behandelt werden. Die Hamilton-Funktion lautet nun:

$$H = H_{\text{kin}} = \sum_{\mathfrak{f}} p_{\mathfrak{f}}^* p_{\mathfrak{f}} + Q(q), \quad Q(q) = \sum_{\mathfrak{f}} \omega_{\mathfrak{f}}^2 q_{\mathfrak{f}}^* q_{\mathfrak{f}} + \lambda \sum_{\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'} q_{\mathfrak{f}}^* q_{\mathfrak{f}'} \quad (3)$$

($\omega_{\mathfrak{f}}^2 = \mu^2 + \mathfrak{f}^2$), und das mathematische Problem reduziert sich auf das Eigenwertproblem der quadratischen Form Q .

Wir diskutieren zunächst ein vereinfachtes Problem, das dadurch entsteht, dass in der Doppelsumme in (3) alle Ausserdiagonalterme ($\mathfrak{f} \neq \mathfrak{f}'$) weggelassen werden. Die Eigenwerte der Matrix Q sind dann

$$\Omega_{\mathfrak{f}}^2 = \omega_{\mathfrak{f}}^2 + \lambda q_0 = \omega_{\mathfrak{f}}^2 + \lambda N/V. \quad (4)$$

Um die potentielle Energie U des Nukleonengases zu berechnen, hat man (wie in I) die Änderung der Nullpunktsenergie des Mesonfeldes infolge adiabatischer Einschaltung der Kopplung λ zu berechnen:

$$\sum_{\mathfrak{f}} (\Omega_{\mathfrak{f}} - \omega_{\mathfrak{f}}), \quad (5)$$

und hiervon ist noch die Selbstenergie der N isolierten Nukleonen, d. h. N mal der Wert von (5) für ein einziges Nukleon, abzuziehen. Im Limes $V \rightarrow \infty$, $q_0 = \text{const}$:

$$U = \sum_{\mathfrak{f}} \left[\sqrt{\omega_{\mathfrak{f}}^2 + \lambda q_0} - \omega_{\mathfrak{f}} - \frac{\lambda q_0}{2 \omega_{\mathfrak{f}}} \right]. \quad (6)$$

Ohne Abschneidung würde diese Summe logarithmisch divergieren. Nach Abschneidung ($|\mathfrak{f}| < A$) wird U (6) volum-proportional (weil $\sum_{\mathfrak{f}} = V(2\pi)^{-3}$ mal \mathfrak{f} -Raumintegral), und U/N ($= U/Vq_0$) als Funktion von q_0 zeigt dieselben Sättigungseigenschaften wie sie in I für die Energie eines Nukleon-Kristallgitters grosser Dichte diskutiert wurden (vgl. I, p. 124/25). Insbesondere:

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} \frac{U}{N} = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{V} \sum_{\mathfrak{f}} \frac{1}{\omega_{\mathfrak{f}}}, \quad (7)$$

d. h. bei unendlicher Kompression der Kernmaterie wird gerade die Selbstenergie der Nukleonen frei.

Im Falle schwacher Kopplung oder geringer Dichte ($\lambda q_0 \ll \mu^2$) kann man nach λ entwickeln:

$$U = -\frac{\lambda^2}{8} q_0^2 \sum_{\mathfrak{f}} \frac{1}{\omega_{\mathfrak{f}}^3} + \dots \quad (8)$$

Diesen Grenzfall kann man aber auch leicht für das vollständige Problem (3) behandeln, indem man die Ausserdiagonalterme $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{k}'$ in einer zweiten Näherung berücksichtigt:

$$\Omega_{\mathfrak{k}}^2 = \omega_{\mathfrak{k}}^2 + \lambda \varrho_0 - \lambda^2 \sum_{\mathfrak{k}'} \frac{\varrho_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'} \varrho_{\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}}}{\mathfrak{k}'^2 - \mathfrak{k}^2} + \dots,$$

$$\Omega_{\mathfrak{k}} = \omega_{\mathfrak{k}} + \lambda \frac{\varrho_0}{2 \omega_{\mathfrak{k}}} + \lambda^2 \left[-\frac{\varrho_0^2}{8 \omega_{\mathfrak{k}}^3} - \frac{1}{2 \omega_{\mathfrak{k}}} \sum_{\mathfrak{k}'} \frac{\varrho_{\mathfrak{k}-\mathfrak{k}'} \varrho_{\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}}}{\mathfrak{k}'^2 - \mathfrak{k}^2} \right] + \dots \quad (9)$$

Hier ist der letzte Term ein Operator, und in (5) ist sein Erwartungswert für den Grundzustand des Nukleongases einzusetzen. Sei $N(\mathfrak{p}, \sigma)$ die Besetzungszahl des Nukleonzustandes \mathfrak{p}, σ (\mathfrak{p} = Impuls, $\sigma = 1 \dots 4$ numeriert die Spin- und Ladungszustände), also

$$N(\mathfrak{p}, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathfrak{p}| < p_F, \\ 0 & \text{für } |\mathfrak{p}| > p_F. \end{cases}$$

Auf Grund der Definition (2) wird dann der Erwartungswert

$$\langle \varrho_{-\mathfrak{k}} \varrho_{\mathfrak{k}} \rangle = V^{-2} \sum_{\mathfrak{p}, \sigma} N(\mathfrak{p}, \sigma) [1 - N(\mathfrak{p} + \mathfrak{k}, \sigma)]$$

($\mathfrak{k} \neq 0$). Setzt man dies in (9) ein, und verwendet man statt \mathfrak{k}' die neue Variable $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} + \mathfrak{k}' - \mathfrak{k}$, so folgt:

$$\Omega_{\mathfrak{k}} = \omega_{\mathfrak{k}} + \lambda \frac{\varrho_0}{2 \omega_{\mathfrak{k}}} + \lambda^2 \left[-\frac{\varrho_0^2}{8 \omega_{\mathfrak{k}}^3} - \frac{1}{2 \omega_{\mathfrak{k}}} \cdot 4 V^{-2} \sum_{\substack{|\mathfrak{p}| < p_F \\ |\mathfrak{p}'| > p_F}} \frac{1}{(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p} + \mathfrak{k})^2 - \mathfrak{k}^2} \right] + \dots \quad (10)$$

Die Doppelsumme ist natürlich durch ein sechsfaches Integral zu ersetzen, und da die Terme $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$ in (9) fehlen, ist bei der Integration über Nullstellen des Nenners der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ($||\mathfrak{k}'| - |\mathfrak{k}|| > \varepsilon \rightarrow 0$).

Wir bilden wiederum die Nullpunktsenergie-Änderung (5) und subtrahieren die Selbstenergie der N Nukleonen. Bei dieser Subtraktion hebt sich der Term erster Ordnung in λ wieder fort (wegen $\varrho_0 = N/V$), während von ϱ_0^2 nur ein verschwindend kleiner Bruchteil ($1/N$) abgeht. Von der Doppelsumme in (10) ist eine Doppelsumme mit dem gleichen Summanden abzuziehen, bei der aber die Beschränkung $|\mathfrak{p}'| > p_F$ fortfällt, denn für ein isoliertes Nukleon \mathfrak{p}, σ sind ja *alle* „Endzustände“ $\mathfrak{p}', \sigma' - \sigma$ durch das Pauli-Prinzip gestattet. Nach der Subtraktion bleibt eine Doppelsumme übrig,

bei der sowohl \mathbf{p} als \mathbf{p}' auf das Innere der Fermikugel beschränkt sind:

$$S_{\mathbf{f}} = V^{-2} \sum_{\substack{|\mathbf{p}| < p_F \\ |\mathbf{p}'| < p_F}} \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p} + \mathbf{f})^2 - \mathbf{f}^2}. \quad (11)$$

Somit wird die potentielle Energie:

$$U = \lambda^2 \sum_{\mathbf{f}} \left[-\frac{\varrho_0^2}{8 \omega_{\mathbf{f}}^3} + \frac{2 S_{\mathbf{f}}}{\omega_{\mathbf{f}}} \right]. \quad (12)$$

Wir haben $S_{\mathbf{f}}$ für die Grenzfälle $\mathbf{f} = 0$ und $|\mathbf{f}| \gg p_F$ berechnet; beide Werte werden korrekt dargestellt durch die Interpolationsformel

$$S_{\mathbf{f}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{p_F^6}{p_F^2 + 9 \mathbf{f}^2} = \frac{9}{64} \frac{\varrho_0^2}{p_F^2 + 9 \mathbf{f}^2}. \quad (13)$$

$S_{\mathbf{f}}$ ist positiv, d. h. das korrigierte Potential (12) ist algebraisch grösser als der Wert (8) oder (6), der aus der vereinfachten Theorie folgte. Trotzdem bleibt U im ganzen negativ. Der Summand in (12) ist nämlich, nach (13), negativ definit für $p_F > 3/2 \mu$, und die \mathbf{f} -Summe ist auch für kleinere p_F -Werte negativ, wenn nur der Abschneideradius im \mathbf{f} -Raum gross genug gewählt wird.

Vergleicht man mit den Ergebnissen der früheren Arbeit I, so zeigt sich, dass U (12) die Energie der Zweikörperkräfte ist, sofern man diese nach λ entwickelt und nur den führenden Term beibehält. Der Term mit $S_{\mathbf{f}}$ ist die Austauschenergie. [Vgl. I, Abschn. 2, speziell Gl. (10).]

Um den Charakter der Entwicklung nach λ besser zu überblicken, haben wir noch die λ^3 -Korrekturen zu U berechnet. Zunächst liefert die Ausgangsnäherung (6) den Term

$$+ \frac{1}{16} (\lambda \varrho_0)^3 \sum_{\mathbf{f}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{f}}^5}, \quad (14)$$

der das Eintreten der Sättigung bei wachsender Dichte erkennen lässt; er rührt offenbar von Dreikörperkräften her. Von den übrigen Termen lässt sich ein Ausdruck abspalten, der bis auf einen negativen Faktor mit (12) übereinstimmt (der also positiv ist, wenn die Zweikörperkräfte anziehend sind). Er stellt die λ^3 -Korrektur zu den Zweikörperpotentialen dar, die nach I eine reduzierte Kopplungskonstante enthalten:

$$U_2 = \lambda_A^2 \sum_{\mathbf{f}} \left[-\frac{\varrho_0^2}{8 \omega_{\mathbf{f}}^3} + \frac{2 S_{\mathbf{f}}}{\omega_{\mathbf{f}}} \right], \quad \lambda_A = \frac{\lambda}{1 + \lambda A/4\pi}; \quad (15)$$

hier ist A der durch I (11) quantitativ definierte Abschneideimpuls⁵⁾. Schliesslich kommt noch ein Dreikörperterm hinzu, der gleichfalls positiv ist.

Über die höheren Näherungen kann man nun die folgenden allgemeinen Feststellungen machen. Schreiben wir die gesamte potentielle Energie als Summe der Beiträge der n -Körperkräfte

$$U = \sum_{n=2}^N U_n,$$

so wissen wir aus I, dass die λ -Abhängigkeit von U_n durch den Faktor λ_A^n bestimmt ist. Ferner können wir in U_n die gewöhnliche (Nichtaustausch-) Energie abspalten, nämlich

$$U_n^0 = \left(\frac{1}{2}\right) (\lambda_A \varrho_0)^n \sum_t \omega_t^{-(2n-1)} \quad (n \geq 2). \quad (16)$$

Der Beweis für diese Formel ergibt sich daraus, dass der λ^n -Term aus der Entwicklung des Ausdruckes (6) in U_n^0 enthalten sein muss, und zwar kann er nur aus dem ersten Term der Reihe

$$\lambda_A^n = \lambda^n (1 - n \lambda A / 4 \pi + \dots)$$

hervorgehen. Für $n = 2, 3$ und 4 haben wir die Formel (16) verifiziert mittels der strengen Lösungen nach I⁶⁾. In

$$U = U^0 + U' \quad (17)$$

lässt sich nun $U^0 = \sum_n U_n^0$ aufsummieren:

$$U^0 = \sum_t \left[\sqrt{\omega_t^2 + \lambda_A \varrho_0} - \omega_t - \frac{\lambda_A \varrho_0}{2 \omega_t} \right]. \quad (18)$$

Die Bedingung $\lambda_A \varrho_0 < \mu^2$ garantiert die Konvergenz der n -Summe, doch muss (18) unabhängig hiervon gültig sein. Als Funktion von ϱ_0 zeigt U^0 bzw. U^0/N die gewünschte Sättigungstendenz; die Sättigung setzt ein, wenn ϱ_0 sich dem Werte

$$\varrho_s = \frac{\mu^2}{\lambda_A} = \mu^2 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{A}{4\pi} \right)$$

nähert (z. B. für $A = 2 \pi \mu$ und $\lambda \gg \mu^{-1}$: $\varrho_s = \frac{1}{2} \mu^3$). Ähnlich wie in (7) kommt⁷⁾:

$$\lim_{\varrho_0 \rightarrow \infty} \frac{U^0}{N} = -\frac{\lambda_A}{2} \frac{1}{V} \sum_t \frac{1}{\omega_t}. \quad (19)$$

Was andererseits die Austauschenergie U' anlangt, so sind schon die Einzeltermine $n > 3$ schwierig zu berechnen, und ihre Summie-

rung in geschlossener Form scheint unmöglich. Man darf aber wohl vermuten, dass U' (als Ganzes) die Eigenschaften hat, die sich sowohl für U'_2 als für U'_3 aus den obigen Rechnungen ergeben haben, nämlich, dass U' positiv ist und bei zunehmender Dichte, im Vergleich zu U^0 , immer bedeutungsloser wird [für $n = 2$, vgl. (15), (13)]. Der Sättigungswert ϱ_s der Dichte mag hierdurch etwas grösser werden, aber es ist kaum anzunehmen, dass die Austauschkräfte das schliessliche Eintreten der Sättigung verhindern können.

Ein stützendes Argument kann man noch aus der folgenden qualitativen Überlegung gewinnen. Im Grenzfall grosser Dichte, nämlich wenn $\lambda \varrho_0 \gg \mu^2 + A^2$, wird es erlaubt sein, in (1) die Terme mit $\psi^* (\mu^2 - A) \psi$ zu vernachlässigen. Dadurch wird $H - H_{\text{kin}}$ additiv (separiert) in den Beiträgen der Volumelemente $dX = V_i$:

$$H - H_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^z (p_i^* p_i + \lambda \varrho_i q_i^* q_i). \quad (20)$$

Hier bedeuten q_i, p_i die kanonischen Variablen des Mesonfeldes in der i^{ten} Raumzelle und ϱ_i das räumliche Mittel der Nukleondichte in dieser Zelle. Wir wählen als Volumen einer Zelle $V_i = 6 \pi^2 A^{-3}$, damit die Anzahl der Freiheitsgrade des Mesonfeldes dieselbe ist wie nach der oben verwendeten Abschneidevorschrift [$Z = V/V_i = V (2\pi)^{-3} (4\pi/3) A^3$]. Die gemittelten Dichten ϱ_i können als konstant gelten, und der Grundzustand des Nukleongases hinsichtlich der kinetischen Energie ($\sim \sum_i V_i \varrho_i^{5/3}/M$) ist die homogene Verteilung: $\varrho_i = \varrho_0 = N/V$ (sofern $\varrho_0 V_i \gg 1$). Die Nullpunktsenergie des Mesonfeldes wird damit

$$Z \sqrt{\lambda \varrho_0} = N \frac{A^3}{6 \pi^2} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho_0}}; \quad (21)$$

dies ersetzt die Grösse (5) in der früheren Rechnung. Hiervon ist wiederum die Selbstenergie der Nukleonen ($N \cdot \text{const}$) abzuziehen, und diese überwiegt um so mehr, je grösser die Dichte ϱ_0 . Damit haben wir das Ergebnis (19) wiedergewonnen⁸⁾. In dieser Näherung treten keine Terme auf, die den Austauschenergien U' entsprechen, was darauf schliessen lässt, dass letztere bei grosser Dichte belanglos sind.

Die hier versuchten Näherungen sprechen also übereinstimmend dafür, dass das Paulische Ausschlussprinzip bzw. die daraus resultierende Austauschenergie für die Bindungsenergie und ihre Ab-sättigung mit zunehmender Dichte keine entscheidende Bedeutung

hat. Daraus erklärt sich, warum bereits ein statisches Modell, welches Austausch effekte ignoriert, ein qualitativ zutreffendes Bild liefert.

Anmerkungen.

- 1) F. J. DYSON, Phys. Rev. **73**, 929 (1948); K. M. CASE, Phys. Rev. **76**, 14 (1949).
- 2) L. L. FOLDY, Phys. Rev. **84**, 168 (1951).
- 3) G. WENTZEL, Phys. Rev., **86**, 802 (1952).
- 4) G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **15**, 111 (1942), im folgenden als I zitiert; Prog. Theor. Physics **5**, 584 (1950), Abschn. II, III.
- 5) In (15) sowie in (16), (18) und (19) sind die Beiträge der höchsten $|\mathfrak{f}|$ -Werte ($\geq A$) nicht ganz konsequent behandelt (indem der Imaginärteil des Ausdruckes I (14) vernachlässigt wurde). Es lohnt sich aber nicht, die genaue \mathfrak{f} -Abhängigkeit auf Grund einer bestimmten Abschnidevorschrift anzuschreiben.
- 6) Für $n = 4$ muss man bereits die Zweikörperkräfte in zweiter Ordnung berücksichtigen, d. h. die Terme, die sich aus I (10) bei Weiterentwicklung des Logarithmus ergeben. Diese Terme heben sich gegen gewisse Vierkörperterme (oder besser: Zweipaarterme), die nicht die Form (16) haben. Auch bei höheren n -Werten müssen sich solche Terme (die nicht einmal volumproportional sind) allgemein wegheben, da sie in der obigen Störungsrechnung [λ^n -Terme von (9)] überhaupt nicht auftreten.
- 7) Die rechte Seite von (19) stellt wiederum die freigewordene Nukleon-Selbstenergie dar. Vgl. I (8), wo der „arc tg“ für nicht zu hohe κ -Werte durch sein Argument ersetzt werden darf; bezüglich der Beiträge $\kappa \geq A$ beachte man Anmerkung 5. Die Ähnlichkeit von U^0 mit der in I, Abschn. 3, berechneten Gitterenergie ist natürlich nicht überraschend.
- 8) Vgl. Anmerkung 7. Für ein einziges, isoliertes Nukleon ergibt (20) die Selbstenergie $\sqrt{\lambda \varrho_i} = \sqrt{\lambda/V_i}$, vorausgesetzt, dass $\lambda/V_i \gg A^2$, d. h. $\lambda A \gg 6\pi^2$ („starke Kopplung“). Vergleicht man mit I (8) (oder mit (19), wo $\lambda_A \approx 4\pi/A$), so scheint der Selbstenergiewert $\sqrt{\lambda/V_i}$ um einen Faktor der Ordnung $\sqrt{\lambda A}$ zu hoch. Man hat den Eindruck, dass in (20) λ durch λ_A ersetzt werden sollte, doch kann ich keine Begründung hierfür angeben.

Théorème H et unitarité de S

par E. C. G. Stueckelberg*) (Lausanne et Genève).

(17. III. 1952.)

Summary: If the entropy $S = S[w]$, $\delta S = -\sum_i g_i[w] \delta w_i$, is expressed as a functional of a probability distribution $w = w_i$, *monotony* of the derivative $(g_i - g_k)(w_i - w_k) \geq 0$, *definiteness* and *normalization* of the transition probability $A_{ik} \geq 0$, $\sum_k A_{ik} - \sum_k A_{ki} = 1$, are sufficient conditions to demonstrate BOLTZMANN's theorem in the form $S'' - S' \geq 0$. Definiteness and normalization follow from the unitarity of the transition amplitude $S_{ik} \rightarrow S$, $S^\dagger S = \mathbf{1}$, $A_{ik} = |S_{ik}|^2$. Thus no contradiction can occur between thermodynamics and quantum theory.

M. W. PAULI a attiré mon attention sur le fait que la démonstration très générale du théorème H de BOLTZMANN, exposée dans le présent article, ne se trouve nulle part dans la littérature**). En effet, BOLTZMANN¹⁾ a d'abord démontré que l'entropie $-H$ augmente à la suite de collisions élastiques entre molécules considérées comme des sphères. Le nombre moyen A_{ik} de chocs $i \leftarrow k$ (par unité de l'espace des vitesses) est, dans ce cas, égal au nombre moyen des chocs inverses $k \leftarrow i$. La démonstration semble ainsi dépendre du principe d'équilibre détaillé $A_{ik} = A_{ki}$. Dans la deuxième partie de son ouvrage²⁾, BOLTZMANN doit considérer des chocs entre molécules ayant des degrés de liberté internes. Il généralise alors sa démonstration à des cas où $A_{ik} \neq A_{ki}$. La méthode qu'il emploie est très analogue à la nôtre. Au lieu de discuter la contribution d'un seul choc et de son inverse $i \rightleftharpoons k = (ik)$, il doit le faire pour des *cycles de chocs* $i \leftarrow k, k \leftarrow l, \dots, p \leftarrow q, q \leftarrow i$, soit $(c) = (ikl \dots pq) = (qik \dots p)$. La même difficulté s'est présentée pour calculer le freinage de rayonnement (matrice S) des particules à spin; l'équilibre détaillé n'était pas valable³⁾4), les quanta ayant un degré de liberté interne. La nécessité d'une preuve générale s'impose surtout si l'on considère une masse de gaz sans paroi: Il

*) Recherche subventionnée par la Commission Suisse d'énergie Atomique (C.S.A.).

**) L'auteur s'est servi de cette démonstration dans ses cours depuis quelque temps et tient ici à remercier tout particulièrement M. J.-P. JAN (Lausanne) qui a contribué à la mettre au point.

n'est alors pas même permis de choisir des états de translation du type BOLTZMANN; car, en terme de paquets d'onde, deux quanta en collision quittent leurs paquets initiaux pour aboutir dans deux paquets finaux où ils n'ont plus aucune chance de se retrouver. Le « choc inverse » n'existe alors pas.

Le problème se pose donc de démontrer le théorème d'entropie en se basant seulement sur l'unitarité de la matrice \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} \leftarrow S_{ik}, \quad A_{ik} = |S_{ik}|^2 \rightarrow \mathbf{A} \quad (1)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = \mathbf{1}, \quad \sum_k A_{ik} = \sum_k A_{ki} = 1 \quad (2)$$

où l'index i, k, l, \dots à valeurs de 1 à n dénombre n états différents d'un système qu'un micro-observateur peut distinguer. Alors un état thermodynamique est donné par une fonction de probabilité dans l'espace d'état $w = w_i$ s'étendant sur n points. Les changements d'état $w'' \leftarrow w'$ sont caractérisés par des matrices $\mathbf{1}, \mathbf{A}, \dots$ reliant deux fonctions w par

$$w'' = \mathbf{A} w' \leftarrow w_i'' = \sum_k A_{ik} w_k' \quad (3)$$

et formant un groupe continu.

L'observateur thermodynamique mesure une grandeur, l'entropie S ($= -H$ de BOLTZMANN), qui est fonctionnelle $S = S[w]$ de la fonction w . Sont à trouver les conditions que l'on doit imposer à la fonctionnelle $S[w]$ afin d'obtenir le théorème

$$S'' - S' = S[w''] - S[w'] \geq 0. \quad (4)$$

Si $-g_i[w]$ est la dérivée partielle (ou fonctionnelle) de S

$$\delta S = - \sum_i g_i \delta w_i, \quad (5)$$

cette condition est la *monotonie de la dérivée* $-g_i$ de S :

$$(g_i - g_k) (w_i - w_k) \geq 0 \quad (6)$$

Démonstration: Vu que le groupe des \mathbf{A} est continu, il suffit de démontrer la propriété postulée pour l'élément infinitésimal qui est une matrice positive pour $d\lambda^{(c)} \geq 0$

$$\mathbf{A} = \mathbf{1} + \sum_{(c)} (\mathbf{c}) d\lambda^{(c)} \quad \text{avec} \quad \sum_k (c)_{ik} = \sum_k (c)_{ki} = 0, \quad (7)$$

si les éléments non diagonaux des matrices (\mathbf{c}) sont positifs. La condition (2) montre que le groupe dépend de $(n-1)^2$ paramètres.

Il s'agit alors à trouver $(n-1)^2$ matrices linéairement indépendantes **(c)**. Les **(c)** peuvent être définis en terme des cycles $(c) = (ik \dots pq) = (qik \dots p)$ dans lesquels la suite ik apparaît $N_{ik}^{(c)}$ fois. Alors on a

$$(\mathbf{c}) \leftarrow (c)_{ik} = -\delta_{ik} N_i^{(c)} + N_{ik}^{(c)}; \quad N_i^{(c)} = \sum_k N_{ik}^{(c)}. \quad (8)$$

On doit chercher les cycles linéairement indépendants parmi lesquels aucune relation du type $N_{ik}^{(124)} + N_{ik}^{(423)} - N_{ik}^{(1234)} - N_{ik}^{(24)} = 0$ n'existe. Ces cycles sont les $\frac{1}{2}n(n-1)$ biangles (ik) complétés par $(n-1)^2 - \frac{1}{2}n(n-1)$ triangles (ikl) . On le démontre par l'induction suivante: Si l'on ajoute aux n points de l'espace d'état le point $(n+1)$, les n biangles $(i, n+1)$ et les $(n-1)$ triangles $(i, i+1, n+1)$ sont les seuls parcours nouveaux qui soient linéairement indépendants entre eux. Si $f(n)$ est le nombre de cycles indépendants dans l'espace à n points, on arrive ainsi à l'équation: $f(n+1) - f(n) = 2n-1$. Vu qu'on a $f(2) = 1$, la solution est $f(n) = (n-1)^2$.

En vertu de (2), la variation

$$w_i'' - w_i' = \sum_k (A_{ik} w_k' - w_i' A_{ik}) \equiv \delta w_i \quad (9)$$

ne fait intervenir que les $A_{i \pm k}$ infinitésimaux $(-\delta A_{ik})$, ce qui permet d'écrire la variation (5) dans la forme

$$\delta S = \sum_i \sum_k \delta A_{ik} g_i (w_i - w_k) = \sum_i \sum_k \delta A_{ik} (g_k - g_i) w_k. \quad (10)$$

En y faisant intervenir les $(c)_{i \pm k} = 0, 1$ des biangles et des triangles, on trouve

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{(ik)} \delta \lambda^{(ik)} (g_i - g_k) (w_i - w_k) \\ &+ \sum_{(ikl)} \delta \lambda^{(ikl)} ((g_i - g_k) (w_i - w_k) + (g_k - g_i) (w_i - w_l)) \geq 0. \end{aligned}$$

Si la monotonie (6) est satisfaite et chaque paramètre $\delta \lambda^{(i)}$ positif, on constate que $\delta S \geq 0$. En effet, tout parcours (ikl) peut être choisi dans le sens $w_i \leq w_k \leq w_l$ donc, vu (6), $g_i \leq g_k \leq g_l$.

Le choix $S = -\sum_k w_k \log w_k$; $g_i = \log w_i + 1$, est possible, mais non nécessaire. Dans ce cas, M. PAULI a trouvé une démonstration plus simple que la nôtre que nous donnons en note*).

*) Pour $x, y \geq 0$, la fonction

$$L(x, y) = x \int_1^{y/x} dt \log t = y (\log y - \log x) - y + x \geq 0$$

est positive. Donc on a pour (10) la valeur

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_i \sum_k \delta A_{ik} w_k (\log w_k - \log w_i) = \\ &= \sum_i \sum_k \delta A_{ik} L(w_i, w_k) + \sum_i \sum_k (w_k - w_i) \delta A_{ik}, \text{ qui est positive} \end{aligned}$$

pour $\delta A_{ik} \geq 0$ et $\sum_k \delta A_{ik} = \sum_k \delta A_{ki}$.

Ce choix particulier ne présente que l'avantage formel d'une entropie additive: $S^{(1)} + S^{(2)} = S$ pour $w_{i\mu} = w_i^{(1)} \cdot w_\mu^{(2)}$ pour des systèmes indépendants. Nous avons tout de même tenu à donner notre démonstration plus longue, vu qu'elle donne une signification physique à la double normalisation (2): la double normalisation exprime que les collisions doivent se faire en satisfaisant soit le principe d'équilibre détaillé, soit un principe d'équilibre cyclique envisagé par BOLTZMANN.

Institut de Physique de l'Université de Genève.

Bibliographie.

- ¹⁾ L. BOLTZMANN, Théorie des gaz. Vol. I, chap. I, 5, Paris 1921.
 - ²⁾ L. BOLTZMANN, Id., Vol. II, chap. VII, 81.
 - ³⁾ J. HAMILTON et H. W. PENG, Proc. Roy. Ir. Acad. A **49**, 197 (1944).
 - ⁴⁾ W. HEITLER, Quantum Theory of Radiation, 2nd éd., Oxford 1944.
 - ⁵⁾ F. COESTER, Phys. Rev. **84**, 1259 (1951).
-

Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse.

II. Abseparierung der virtuellen Zustände. Korrekturen zweiter Ordnung

von E. Arnous*) und K. Bleuler

(Seminar für theoretische Physik, Universität Zürich).

(15. V. 52).

Abstract. In continuation of a previous paper (I) the radiative corrections to the form and breadth of an emission line are treated. General expressions for these corrections are obtained with the help of a canonical transformation which eliminates the virtual processes. This makes essentially use of a "finite energy shell" the extension of which is interpreted as the extension of the exciting spectrum. Some of the corrections depend explicitly on the excitation conditions. It is proved that, to a very great accuracy, the displacement of the line maximum is given by the level shifts (\sim self energies) as usually calculated (independent of the excitation conditions). The corrections to the classical line shape are worked out explicitly, as far as the e^2 -effects are concerned (§ 5). The e^4 -corrections are worked out in the subsequent paper III.

Einleitung.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit des gleichen Titels¹⁾ (im folgenden als I zitiert) wurde eine allgemeine Lösungstheorie der quantenelektrodynamischen Wellengleichung für gebundene Zustände entwickelt, die geeignet ist, das Problem der Linienform- und Breite der Spektrallinien einer exakten Lösung im Sinne der Quantenelektrodynamik entgegenzuführen. Die Hauptresultate sind in § 1 zusammengestellt. Es wurde gezeigt, dass die Wellengleichung (1) mit vorgegebener, bei einer *endlichen* Zeit liegenden Anfangsbedingung exakt gelöst werden kann und auf eine Integralgleichung für die physikalisch interessierenden Grössen U und I führt. Diese Theorie ist lediglich mit der Lösung von (1) beschäftigt und macht in keiner Weise davon Gebrauch, was die „ungestörte Hamilton-Funktion H_0 “ und die „Wechselwirkung H “ ist. Statt das übliche ungestörte H_0 , das Elektronen und Photonen ohne Wechselwirkung beschreibt und H in (1) einzusetzen, kann man

*) Chargé de Recherches au Centre National de la Recherche scientifique, Paris.

ebensogut eine transformierte Hamilton-Funktion K_0 , K in den allgemeinen Rahmen der Theorie I einsetzen, wobei z. B. $K_0 + K$ aus $H_0 + H$ durch eine kanonische Transformation hervorgeht. Dies wird im folgenden tatsächlich geschehen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit und der folgenden Arbeit III ist, die höheren strahlungstheoretischen Näherungen zur Linienform zu bestimmen. Es wird sich erweisen, dass diese sehr klein und mit der gegenwärtigen Genauigkeit der Messungen kaum erfassbar sind²⁾. Dagegen hat das Problem theoretisches Interesse: Die grossen Fortschritte, die in den letzten Jahren in der Handhabung und Auswertung der Quanten-Elektrodynamik erzielt wurden, liegen fast ausschliesslich auf dem Gebiet der Stösse zwischen freien Partikeln und Lichtquanten. Die einzige Ausnahme ist die Berechnung der Niveauverschiebung gebundener Zustände. Um Eindeutigkeit in den Resultaten zu erreichen, ist es bekanntlich notwendig, explizit Gebrauch von der relativistischen Covarianz des Resultates Gebrauch zu machen. Eine covariante Formulierung der Quantenelektrodynamik für gebundene Zustände ist aber allgemein nur möglich (wie wir unten sehen werden), wenn man expliziten Gebrauch von der Lorentzbedingung (mit Ladungsglied!) macht, was sehr kompliziert ist. Die Frage der eindeutigen Berechenbarkeit solcher Grössen wie der Linienbreite (in höherer Näherung) ist also keineswegs von vornherein ganz trivial. Die Situation wird weiter dadurch verschärft, dass man erstens auch verlangen muss, Rechenschaft über den *zeitlichen* Ablauf des Emissionsvorgangs zu erhalten (denn dieser ist durchaus messbar), und zweitens dadurch, dass die höheren Näherungen zur Linienform explizit von den Anregungsbedingungen abhängen (wie wir sehen werden). Beides kann kaum in covarianter Weise formuliert werden. Wir werden daher im folgenden mit der Coulombeichung operieren, d. h. mit derjenigen Version der Theorie, in der die longitudinalen und skalaren Photonen eliminiert und durch die Coulomb-Wechselwirkung ersetzt sind.

Bevor wir den Formalismus I zur Berechnung der höheren Näherungen verwenden können, muss erst noch das folgende, prinzipielle Problem gelöst werden: Wie bekannt, stellt ein freies, ungestörtes Elektron keinen stationären Zustand im Sinne der Quantenelektrodynamik dar. Das Teilchen ist stets von virtuellen Zuständen begleitet (mit Photonen und Paaren), die ein Ausdruck für das das Teilchen begleitende Nahefeld sind. Der wahre Zustand des Teilchens geht aus dem ungestörten durch die Bloch-Nordsieck-Transformation hervor. Bei Anwesenheit mehrerer Teilchen ist ein

solcher transformierter Zustand immer noch stationär, solange nur *endliche* Zeitintervalle betrachtet werden. Die zeitliche Änderung des Zustandsvektors ist dann nur durch die tatsächlich stattfindenden Stossprozesse bedingt, die (im Grenzfall unendlich grossen Volumens) eine unendlich lange Zeit brauchen. Die wahren Übergänge können streng von den virtuellen separiert werden. Dies geschieht am besten im Energieraum, wo die wahren Übergänge unter strenger Erhaltung der Energie (in der man die Selbstenergie, d. h. die Massenkorrektur, einschliessen soll) statt, während virtuelle Zustände solche mit verschiedener Energie sind. Die „Energieschale“, auf der allein die wahren Übergänge stattfinden, kann unendlich dünn angenommen werden.

Dies ist bei gebundenen Zuständen anders. Die Lebensdauer eines angeregten Atomzustands ist endlich. Es kann folglich keine Transformation geben, die einen angeregten Atomzustand streng stationär macht. Im Energieraum drückt sich das dadurch aus, dass eine endliche Linienbreite existiert. Übergänge finden nur mit näherungsweise Energieerhaltung statt, im Prinzip auch zwischen Zuständen mit stark verschiedener Energie. Eine eindeutige Unterscheidung zwischen virtuellen Zuständen und Zustände, in die wahre Übergänge stattfinden können, lässt sich also nicht durchführen. Eine Ausnahme bildet nur der Grundzustand, der scharf ist, und also im Sinne der Quantenelektrodynamik streng definiert werden kann. Die Mehrdeutigkeit in der Definition eines angeregten Atomzustands muss offenbar darauf zurückzuführen sein, dass dieser Zustand in Wirklichkeit von den *Anregungsbedingungen* abhängt. Schon in erster Näherung hängt ja die Linienform von der Anregung ab. Wenn man von der natürlichen Linienform spricht (d. h. der klassischen Linienform, die auch in der Näherung der Weisskopf-Wignerschen-Theorie erhalten wurde), so ist damit Anregung durch ein kontinuierliches Spektrum gemeint. Wenn sich dieses etwa über ein Frequenzintervall $k_1 \dots k_2$, wobei $k_2 - k_1$ gross gegen die Linienbreite ist, erstreckt, so ist die natürliche Linie jedenfalls an den Stellen k_1 und k_2 abgeschnitten. Ein anregendes Spektrum, das sich ins Unendliche erstreckt, kann natürlich nicht existieren. Es ist deshalb auch durchaus zu erwarten, dass die virtuellen Zustände, die dem angeregten Atomzustand beigemischt sind, bis zu einem gewissen Grade von der Art der Anregung abhängen werden. Eine vollständige Lösung des Problems der Linienbreite erfordert also eine Behandlung der Lichtemission im Zusammenhang mit der Anregung, also des ganzen Prozesses der Resonanzfluoreszenz. Dieses kompliziertere Programm ist hier noch

nicht durchgeführt. Man kann nämlich, statt die Anregung explizit zu berücksichtigen, einen „angeregten Atomzustand“ durch eine verallgemeinerte Bloch-Nordsieck-Transformation definieren und dabei eine gewisse, die verschiedenen Anregungsbedingungen widerspiegelnde Willkür walten lassen. Wir werden die folgende Methode verwenden:

Wir ordnen jedem angeregten Atomzustand, der die Niveaubreite γ haben möge, eine *endliche Energieschale* der Dicke 2ε zu, wobei wir $\varepsilon \gg \gamma$, aber klein gegen die Niveaubstände wählen. Zustände ausserhalb dieser Energieschale sind virtuelle Zustände, die durch die kanonische Transformation wegetransformiert werden, so dass neue Atomzustände entstehen. Diese sind dann stationär gemacht, soweit es möglich ist: Wahre Übergänge finden nur noch auf der Energieschale statt. Diese umfassen den grössten Teil der natürlichen Linie. Letztere ist nur an den Grenzen $\pm \varepsilon$ zu beiden Seiten des Maximums abgeschnitten. Die willkürliche Grösse ε kann also als Mass für die Ausdehnung des anregenden Spektrums betrachtet werden. Es wird sich zeigen, dass ein Teil der Korrekturen zur Linienform- und Breite von ε unabhängig sind. Die von ε abhängigen Korrekturen verschwinden im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow \infty$, und man darf diesen Fall wohl als idealisierten Grenzfall wirklich kontinuierlicher Anregung betrachten.

Vom Standpunkt der Quanten-Elektrodynamik wird sich zeigen, dass, trotz der oben erwähnten Schwierigkeiten einer covarianten Formulierung, alle Korrekturen *eindeutig* und *endlich* sind, wenn man von der üblichen Massen- und Ladungs-Renormalisation Gebrauch macht.

§ 1. Die wichtigsten Resultate der Arbeit I.

Die Arbeit I kann kurz folgendermassen zusammengefasst werden: Es handelt sich um eine Lösungstheorie der Schrödingergleichung in Wechselwirkungsdarstellung:

$$i \frac{\partial S(t)}{\partial t} = K(t) S(t), \quad K(t) = e^{itK_0} K e^{-itK_0} \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung, gültig zu einer Anfangszeit t_0 ,

$$S(t_0) = 1 \quad (2)$$

Hierbei ist K_0 eine „ungestörte Energie“, K eine „Wechselwirkung“. In der Lösung von (1) und (2) spielen die speziellen Eigenschaften von K_0 und K vorderhand keine Rolle. Tatsächlich wird in (1) eine transformierte Hamilton-Funktion eingesetzt werden.

In der Lösung von (1), (2) kommt die singuläre Funktion

$$\begin{aligned}\xi(E - K_0) &= -i \int_0^{\infty} dt e^{it(E-K_0)} = \frac{P}{E - K_0} - i\pi \delta(E - K_0) = \\ &= -2\pi i \delta_+(E - K_0)\end{aligned}\quad (3)$$

vor. P bezeichnet den Hauptwert. Die exakte Lösung von (1), mit der Anfangsbedingung (2), ist

$$\begin{aligned}S(t, t_0) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dE e^{-it(E-K_0)} (1 + \xi(E - K_0) U(E) \times \\ &\times (E - K_0 + \frac{i}{2} \Gamma(E))^{-1} e^{it_0(E-K_0)}\end{aligned}\quad (4)$$

Hier und im folgenden ist das Vorkommen des Operators K_0 im Argument von ξ , δ usw. so zu verstehen, dass in einer Darstellung, wo K_0 diagonal ist, derjenige Eigenwert von K_0 einzusetzen ist, der der Position des Faktors ξ entspricht

$$(\xi(E - K_0) U)_{nm} = \xi(E - E_n) U_{nm} \text{ etc.}$$

U ist (in der Darstellung K_0 diagonal) ein Operator mit nur nicht diagonalen Elementen, Γ ist rein diagonal. U befriedigt die Integralgleichung

$$U(E) = K_{nd} + (K \xi U)_{nd}, \quad \xi \equiv \xi(E - K_0) \quad (5)$$

und Γ ist bestimmt durch

$$\frac{1}{2i} \Gamma(E) = K_d + (K \xi U)_d \quad (6)$$

(nd = nicht diagonal, d = diagonal)

(4) kann als geeignete Zusammenfassung gewisser Terme in der üblichen Entwicklung von S

$$S(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t K(t') dt' + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' K(t') K(t'') + \dots$$

aufgefasst werden, doch ist diese Entwicklung für Probleme mit endlicher Linienbreite ungeeignet.

Wenn $t \rightarrow \infty$, was der am meisten interessierende Fall ist, vereinfacht sich (4) mit Hilfe von

$$\frac{i}{2\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-itx} \xi(x) = \delta(x)$$

Das Matricelement von S für den Anfangszustand 0, Endzustand A , wird

$$\langle A | S(\infty, t_0) | 0 \rangle = \frac{\langle A | U(E_A) | 0 \rangle}{E_A - E_0 + \frac{i}{2} \Gamma_{0/0}(E_A)} \quad (7)$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Endzustände A

$$w_{A0} = |\langle A | S(\infty, t_0) | 0 \rangle|^2 = \frac{|\langle A | U(E_A) | 0 \rangle|^2}{\left[E_A - E_0 - \frac{1}{2} \text{Im} \Gamma_{0/0}(E_A) \right]^2 + \frac{1}{4} [\text{Re} \Gamma_{0/0}(E_A)]^2} \quad (8)$$

Es sei z. B. O der erste angeregte Atomzustand, A der Grundzustand plus emittierten Lichtquant. Da die Zustände A zum kontinuierlichen Spektrum gehören, so sieht man, dass selbst nach völligem Ablauf des Emissionsvorgangs ($t \rightarrow \infty$) U und Γ an *jeder Stelle* E gebraucht werden. Die Näherungslösung von WEISSKOPF-WIGNER erhält man, indem man (a) U durch die erste Näherung, d. h. K (in diesem Fall wird $K = H$) ersetzt, ebenso Γ , und (b) Γ durch den Wert an der Stelle $E_A = E_0$ (exakte Energieerhaltung) ersetzt. In einer exakten Theorie der Linienform treten also zwei Typen von Korrekturen auf: (a) die eigentlichen strahlungstheoretischen Korrekturen, die auf den höheren Näherungen in der Entwicklung nach e^2 von U und Γ beruhen, und (b) Korrekturen, die darauf beruhen, dass U , Γ von E oder E_A , d. h. der Energie des emittierten Lichtquants, abhängen. Die letzteren haben kein Analogon in der Theorie freier Partikel, wo $E_A = E_0$ (exakt). Es sei betont, dass auch der zeitliche Ablauf nach (4) völlig erfasst ist, wenn U , Γ an jeder Stelle E bekannt sind. Zwischen U und Γ besteht noch die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \text{Re} \Gamma(E) = (U^\dagger(E) \delta(E - K_0) U(E))_d \quad (9)$$

Alle Beziehungen (1)–(9) sind *exakt*. Wenn $E = E_0$, so ist die rechte Seite von (9) die totale Übergangswahrscheinlichkeit, doch hat dieser Begriff keine exakte Gültigkeit.

Im allgemeinen ist es nicht im Sinne dieser Theorie, U aus (5) durch Entwicklung zu berechnen. Für Probleme in denen zwei oder mehr Quantensprünge vorkommen, hängt U empfindlich von E ab und hat selbst einen oder mehrere Resonanznenner vom gleichen Typ, wie er schon in (1) in jedem Fall auftritt³). Wir werden uns aber im folgenden auf den einfachen Fall eines *einzelnen* Übergangs vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand

beschränken. In erster Näherung sind dann U und Γ sehr langsam veränderliche Funktionen von E . Auch in höherer Näherung treten, wie sich im Verlauf dieser Arbeit ergeben wird, keinerlei neue Resonanzen auf. U kann dann ohne Gefahr aus (5) entwickelt werden:

$$U = K_{nd} + (K \xi K_{nd})_{nd} + (K \xi (K \xi K_{nd})_{nd})_{nd} + \dots \quad (10)$$

$$\frac{1}{2i} \Gamma = \{K + K \xi K_{nd} + K \xi (K \xi K_{nd})_{nd} + \dots\}_d \quad (10')$$

§ 2. Wahl der Wechselwirkung, Elimination der virtuellen Zustände.

Die quantenelektrodynamische Hamilton-Funktion besteht aus der ungestörten Energie H_0 und der Wechselwirkung H . Für Stöße freier Partikel kann H in covarianter Form geschrieben werden, so dass alle vier Typen von Photonen in symmetrischer Weise vorkommen. Die Lorentz-Bedingung kann dann ignoriert werden, vorausgesetzt, dass nur Übergänge zwischen Zuständen ohne longitudinale und skalare Photonen berechnet werden⁴⁾. Wir werden unten explizit sehen, dass dieses Verfahren für gebundene Zustände *im allgemeinen* falsch ist. Der Grund ist der, dass die Lorentz-Bedingung (mit Ladungsglied!) explizit berücksichtigt werden muss. Wir werden deshalb mit der „Coulombbeichung“ der Potentiale operieren. Die Wechselwirkung ist dann $H^{tr} + H_c$, wo H^{tr} die Wechselwirkung mit dem transversalen Feld, H_c die Coulombwechselwirkung darstellt. Wie wir ferner sehen werden (siehe unten und die folgende Arbeit III), gibt es einen Spezialfall, wo auch bei gebundenen Zuständen die gesamte Wechselwirkung $H^{tr} + H_c$ in 4-dimensionaler Weise zusammengefasst werden kann, wie wenn die Lorentz-Bedingung ohne Belang wäre (abgesehen von einem endlichen, von ε abhängigen Zusatz; siehe III). Dies ist der Fall für $E = E_0$, aber an keiner anderen Stelle $E \neq E_0$. Derselbe Fall trat schon bei der Berechnung der Linienverschiebung durch FRENCH und WEISSKOPF⁵⁾ ein. Der tiefere Grund, warum das gerade für $E = E_0$ der Fall ist, ist uns aber unbekannt.

Wir wollen auch von Anfang an schon die Massenkorrektion in die Wechselwirkung einbeziehen. Es sei H_s der Massenoperator, so dass $H_0 + H_s$ formal dieselben Eigenzustände (auch für gebundene Partikel) hat wie H_0 , nur mit der korrigierten, also experimentellen Masse. Wir werden in Zukunft wieder H_0 für $H_0 + H_s$ schreiben. Die Wechselwirkung enthält dann ein Zusatzglied $-H_s$, d. h.

$$H = H^{tr} + H_c - H_s \quad (11)$$

H_s wurde explizit von FRENCH und WEISSKOPF bestimmt und kann in 4-dimensionaler Weise (in symmetrisierter Form) geschrieben werden.

$$\left. \begin{aligned} H_s &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} [\bar{\psi}(\mathbf{r}) M(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{r})], \quad \bar{\psi} = \psi^* \gamma_4 \\ M(\mathbf{p}) &= \frac{e^2}{32\pi^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{k} \gamma_4 (A(\mathbf{p}, \mathbf{k}) + A^+(\mathbf{p}, \mathbf{k})) \\ A(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \sum_{\mu=1}^4 \{ \alpha_{\mu} H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \alpha_{\mu} ((\alpha \mathbf{p}) + \beta m - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - k)^{-1} + \\ &\quad + \alpha_{\mu} H^-(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \alpha_{\mu} ((\alpha \mathbf{p}) + \beta m + E(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + k)^{-1} \} \\ \alpha_{\mu} &= i \gamma_4 \gamma_{\mu}, \quad \mathbf{p} = -i \text{ grad}, \quad E(\mathbf{p}) = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta \equiv \gamma_4 \\ H^{\pm}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{(\alpha \mathbf{p}) + \beta m}{E(\mathbf{p})} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wenn H_s auf die Eigenfunktion eines freien Partikels ψ_p mit Impuls \mathbf{p} wirkt, so reduziert sich (12) auf den bekannten Operator der Selbstenergie und liefert nach der Integration:

$$H_s \psi_p = \delta m \beta \psi_p$$

wo δm die invariante (divergente) Massenkorrektur bedeutet. Dasselbe ist der Fall, wenn H_s auf eine gebundene Eigenfunktion ψ_0 wirkt

$$H_s \psi_0 = \delta m \beta \psi_0 \quad (13)$$

wie man sofort sieht, wenn man ψ_0 nach freien Eigenfunktionen ψ_p entwickelt. In (13) hat δm denselben Wert wie für freie Partikel. Dies muss natürlich verlangt werden, wenn H_s eine universelle Massenkorrektur beschreiben soll.

Eine entsprechende Ladungskorrektur muss auch noch vollzogen werden, um Konvergenz zu erzielen, doch ist es einfacher, diese in einem späteren Stadium (siehe III) vorzunehmen.

Bevor wir den Formalismus von § 1 zur Berechnung der höheren Näherungen von Γ benutzen können, ist es notwendig, die Atomzustände neu zu definieren: In höherer Näherung ist ein Atomzustand von virtuellen Photonen usw. begleitet. Wenn wir Übergänge zwischen verschiedenen Atomzuständen betrachten, so handelt es sich sicher um Übergänge zwischen Zuständen mit Einschluss dieser virtuellen Beimischungen. Die neudefinierten Atomzustände ψ' entstehen aus den alten, ungestörten Zuständen durch eine kanonische Transformation: $\psi = T\psi'$. Dann transformiert sich die Hamilton-Funktion

$$K_0 + K = T^{-1} (H_0 + H^{tr} + H_c - H_s) T \quad (14)$$

Wäre die Lebensdauer der Atomzustände unendlich, die Niveaubreite also null, so wären T und K dadurch bestimmt, dass K (in der Darstellung, wo K_0 diagonal ist) nur Matrixelemente zwischen zwei Zuständen exakt gleicher Energie haben soll. Zwischen solchen finden dann die realen, unendlich langsam verlaufenden Übergänge statt⁶⁾.

Im Sinne des in der Einleitung Gesagten verallgemeinern wir nun die kanonische Transformation T für endliche Niveaubreite in folgender Weise, indem wir explizit Gebrauch von der Kleinheit der Linienbreite machen: Wir ordnen zunächst jedem Atomzustand 0 (in Abwesenheit von Lichtquanten) eine „Energieschale“ der endlichen Dicke $\varepsilon(0)$ zu. Dabei soll $\varepsilon(0) \gg \gamma$, aber klein gegen die Niveaubstände sein. Jeder andere Zustand n (z. B. Atom im Grundzustand plus emittiertes Lichtquant) liegt dann entweder innerhalb oder ausserhalb der Energieschale $\varepsilon(0)$ von 0. Es ist keineswegs angenommen, dass alle diese Energieschalen gleich sind. Im Gegenteil, um den Grundzustand G wirklich stationär zu machen, wollen wir speziell festsetzen, dass für diesen Fall ε verschwinden soll, $\varepsilon(G) = 0$. Für alle andern Paare von Zuständen n, m ist es nur nötig, festzusetzen, dass diese sich entweder auf oder ausserhalb einer Energieschale befinden. Insbesondere sollen die beiden Zustände auf der Energieschale liegen, wenn $E_n - E_m$. Auf diese Weise sind alle Paare von Zuständen in zwei Klassen eingeteilt. Zustandspaare auf und Zustandspaare ausserhalb einer Energieschale⁷⁾. Es wird sich erweisen, dass die Grösse dieser Energieschalen vollständig aus den physikalisch interessierenden Grössen herausfällt, mit Ausnahme der beiden Energieschalen $\varepsilon(0)$ und $\varepsilon(G)$, für die Zustände 0 und G , zwischen denen der betrachtete Übergang liegt. Dies ist zu erwarten, denn ein physikalischer Effekt kann nicht davon abhängen, wie man zuerst eine Hamilton-Funktion transformiert, wohl aber hängt der Übergang $0 \rightarrow G$ davon ab, wie die Zustände 0 und G definiert sind, und dies hängt von $\varepsilon(0)$ und $\varepsilon(G)$ ab.

Ein beliebiger Operator Q kann dann in zwei Teile \underline{Q} und \tilde{Q} zerlegt werden, wobei (in der Darstellung, wo K_0 diagonal ist) \underline{Q} und \tilde{Q} nur Matrixelemente haben sollen für je zwei Zustände, die auf, bzw. ausserhalb ihrer Energieschale liegen.

$$Q = \underline{Q} + \tilde{Q}$$

Wir verlangen nun von der Transformation (14), dass K nur Elemente auf der Energieschale haben soll: $K = \underline{K}$, $\tilde{K} = 0$. Auf diese Weise werden wir erreichen, dass ein angeregter Atomzustand

relativ stabil wird und seine zeitliche Änderung nur durch die realen Übergänge bedingt wird. Diese können nur auf der Energieschale stattfinden; die Linie ist also zu beiden Seiten an den Stellen $\pm \varepsilon$ abgeschnitten. Die Willkür, die in der Wahl von ε liegt, ist offenbar der Ausdruck für die Tatsache, dass der angeregte Atomzustand von der Anregung abhängt.

Wir entwickeln T nach Potenzen von e

$$T = 1 + T_1 + T_2 + \dots, \quad T^{-1} = 1 - T_1 - T_2 + T_1^2 + \dots \quad (15)$$

$$T_1 + T_1^\dagger = 0, \quad T_2 + T_2^\dagger = T_1^2 \quad (15')$$

und beachten, dass H^{tr} von erster, H_c und H_s von zweiter Ordnung sind. Ebenso $K = K_1 + K_2 + K_3 + \dots$. Wir erhalten bis zur dritten Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= H_0 \\ K_1 &= H^{tr} + [H_0 T_1] \\ K_2 &= H^{tr} T_1 - T_1 K_1 + [H_0 T_2] + H_c - H_s \\ K_3 &= H^{tr} T_2 - T_1 K_2 - T_2 K_1 + (H_c - H_s) T_1 + [H_0 T_3] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wir spalten dann jede dieser Gleichungen in die $--$ und \sim -Bestandteile auf. Für die letzteren verschwindet die linke Seite. Da $[H_0 T_i] = [H_0 \underline{T}_i]$, so erhalten wir zunächst sukzessive Bestimmungsgleichungen für \underline{T}_i in jeder Ordnung. Diese sind von der Form

$$[H_0 \underline{T}_i] = -Q \quad (17)$$

Diese Gleichung kann am besten in Form eines Integrals gelöst werden. Da $[\underline{T}_i H_0] = -[\underline{T}_i, E - H_0]$ und $(E - H_0) \frac{P}{E - H_0} = 1$, $(E - H_0) \delta(E - H_0) = 0$, so ist die Lösung von (17)

$$\underline{T}_i = - \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{P}{E - H_0} Q \delta(E - H_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dE \delta(E - H_0) Q \frac{P}{E - H_0} \quad (18)$$

In Energiedarstellung ist die Integration sofort auszuführen, und man erhält die gewöhnlichen Formeln der elementaren Störungstheorie.

Die Teile von (16), die auf der Energieschale liegen, bestimmen \underline{K} sukzessive. Unbestimmt bleibt zunächst noch \underline{T}_i . Wir können über \underline{T}_i verfügen, vorausgesetzt, dass die Unitaritätsbedingungen (15') erfüllt sind. Wir setzen also einfach

$$\underline{T}_1 = 0, \quad \underline{T}_2 = \underline{T}_2^\dagger = \frac{1}{2} (\underline{T}_1)^2 \quad (19)$$

Damit ist auch \underline{T} bestimmt und folglich K . Zu beachten ist, dass $[H_0 \underline{T}_2] \neq 0$, wenn die Energieschale endlich ist. Dagegen werden wir K_3 nur für solche Zustandspaare brauchen, die *genau* die gleiche Energie haben. Dann ist $[H_0 \underline{T}_3] = 0$. Für die Doppelintegrale, die bei der Bestimmung von \underline{T}_2 erstmalig auftreten, sei noch bemerkt, dass

$$\begin{aligned} \int \int dE dE' \delta(E - H_0) \delta(E' - H_0) Q(E, E') = \\ = \int dE \delta(E - H_0) Q(E, E) \end{aligned} \quad (20)$$

Man erhält ohne Schwierigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \underline{T}_1 &= \int P \underline{H}^{tr} \delta \quad \left(P \equiv \frac{P}{E - H_0}, \quad \delta \equiv \delta(E - H_0) \right) \\ \underline{T}_2 &= \int P (\underline{H}_c - \underline{H}_s) \delta + \int P \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} \delta - \int \delta \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} P \\ \underline{T}_2 &= -\frac{1}{2} \int P \underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr} P \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Man verifiziert leicht, dass $\underline{T}_2 + \underline{T}_2^\dagger = (\underline{T}_1)^2$, wie es sein muss. Ferner:

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= H_0, \quad K_1 = \underline{H}^{tr} \\ K_2 &= \underline{H}_c - \underline{H}_s + [H_0 \underline{T}_2] + \int \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} \delta - \int P \underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr} \\ K_3 &= \int H^{tr} P (\underline{H}_c - \underline{H}_s + \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr}) \delta + \\ &+ \int \delta (\underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} + \underline{H}_c - \underline{H}_s) P \underline{H}^{tr} + \\ &+ \int \delta \underline{H}^{tr} P (\underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} + \underline{H}_c - \underline{H}_s) + \int (\underline{H}_c - \underline{H}_s) P \underline{H}^{tr} \delta - \\ &- \int H^{tr} \delta \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} P - \int P \underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} - \\ &- \int P \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr} + \int \delta \underline{H}^{tr} P [H_0 \underline{T}_2]_{nd} - \\ &- \frac{1}{2} \int H^{tr} P \underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr} P + \frac{1}{2} \int P \underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} . \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Alle Doppelintegrale reduzieren sich allgemein auf einfache, mit Hilfe von (20), mit Ausnahme von

$$\int \int dE dE' \delta(E - H_0) \underline{H}^{tr} \frac{P}{E - H_0} \underline{H}^{tr} \frac{P}{E' - H_0} \underline{H}^{tr} \delta(E' - H_0) .$$

Da aber K_3 nur für exakte Energieerhaltung gebraucht wird, kann dieses Integral auch

$$\int \delta \tilde{H}^{tr} P \underline{H^{tr} P H^{tr}}$$

geschrieben werden (ein Faktor δ ganz links hat dann denselben Effekt wie ein δ ganz rechts). Das Glied $[H_0 \underline{T}_3]$ in K_3 ist weglassen. Der Kommutator $[H_0 \underline{T}_2]$ in K_2 ist notwendig, damit K_2 hermitisch ist.

§ 3. Darstellung: „Verschobene Niveaus“.

Bevor wir die obigen Resultate zur Berechnung der physikalisch interessierenden Grössen benutzen, ist es angezeigt, eine Änderung der Darstellung vorzunehmen. K_2 hat offenbar auch reine Diagonalelemente K_{2d} (während $K_{3d} = 0$):

$$K_{2d} = (H_c - H_s)_d + \int (H^{tr} P \tilde{H}^{tr})_d \delta. \quad (23)$$

Das letzte Glied von K_2 (22) und der Kommutator haben keine Diagonalelemente, da $(\tilde{H}^{tr} P \underline{H}^{tr})_d = 0$. Mit der Neudefinition der Atomzustände ist naturgemäss auch eine Energieverschiebung verbunden. Wenn wir Übergänge zwischen verschiedenen Niveaus betrachten, so sind damit selbstverständlich Übergänge zwischen den verschobenen Niveaus gemeint, und es ist sinnlos, zu sagen, dass das Atom zur Zeit t_0 in einem unverschobenen angeregten Zustand war. Wir werden daher unsere Darstellung so abändern, dass an Stelle der Eigenwerte von H_0 die verschobenen Energiewerte auftreten. Hierbei ist aber eines zu beachten: Die Niveauverschiebung ist experimentell einzig und allein durch die Verschiebung des *Maximums der Linie* definiert. Dieses ist aber nach (8) durch $Jm\Gamma$ bestimmt, und nicht allein (wie wir sofort sehen werden) durch K_{2d} . Wenn E'_A, E'_0 die Energien der verschobenen Niveaus sind, so liegt nach (8) das Maximum der Linie dann bei $E'_A = E'_0$ (E'_A = verschobene Energie des Grundzustands + Lichtquant), wenn $Jm\Gamma(E'_0) = 0$ (wenn man die schwache E -Abhängigkeit von $Re\Gamma$ vernachlässigt). Wir zeigen, dass dies die Niveauverschiebung wie folgt bestimmt⁸⁾:

$$H_L = (H_c - H_s)_d + \int (H^{tr} P H^{tr})_d \delta \quad (24)$$

(24) ist nichts anderes als die Selbstenergie, wie sie von FRENCH und WEISSKOPF⁴⁾ berechnet wurde. H_L unterscheidet sich von K_{2d} durch das Fehlen von \sim in einem Faktor H^{tr} . Wir ändern somit

unsere Darstellung folgendermassen: Statt H_0 betrachten wir $H'_0 = H_0 + H_L$ als die „ungestörte Energie“. Die Eigenwerte, E'_n , sind die verschobenen Niveaus. Die Eigenfunktionen bleiben aber unverändert, da H_L diagonal ist. In der Wechselwirkung tritt dann das Zusatzglied $-H_L$ auf, also

$$K' = K - H_L. \quad (25)$$

Alles frühere bleibt unverändert, wenn H'_0 durch H_0 und K durch K' ersetzt wird. Insbesondere treten in (8) die verschobenen Energien auf:

$$w_{A0} = \frac{|\langle A | U(E'_A) | 0 \rangle|^2}{\left[E'_A - E'_0 - \frac{1}{2} Jm \Gamma_{0/0}(E'_A) \right]^2 + \frac{1}{4} [Re \Gamma_{0/0}(E'_A)]^2}. \quad (26)$$

(genau genommen, müssten auch die Indizes A und 0 einen Strich tragen). Auch die Energieschalen sind neu definiert, insbesondere bezieht sich $\varepsilon(0')$ auf die Nachbarschaft des verschobenen Niveaus E'_0 . Um zu zeigen, dass die Linienverschiebung tatsächlich durch (24) gegeben ist, berechnen wir $\Gamma_{0/0}(E)$ mit (24) bis zur zweiten Ordnung. Nach (25) und (23), (24) ist jetzt

$$\begin{aligned} K'_{2d} &= K_{2d} - H_L = \int (H^{tr} P \tilde{H}^{tr} \delta)_d - \int (H^{tr} P H^{tr} \delta)_d = \\ &= - \int (\underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} \delta)_d; \end{aligned} \quad (27)$$

ferner nach (10') und (22)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \Gamma_{20/0}(E) &= K'_{2d} + (K'_1 \xi K'_1)_d = K'_{2d} + (\underline{H}^{tr} \xi \underline{H}^{tr})_d = \\ &= -i\pi (\underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr})_d + (\underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr})_d - \int (\underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr})_d \delta, \end{aligned}$$

und nach Ausführung der Integration im letzten Glied explizit:

$$\frac{1}{2} Jm \Gamma_{20/0}(E) = \left\{ \underline{H}^{tr} \frac{P}{E - H'_0} \underline{H}^{tr} - \underline{H}^{tr} \frac{P}{E'_0 - H'_0} \underline{H}^{tr} \right\}_d \quad (28)$$

$$\frac{1}{2\pi} Re \Gamma_{20/0}(E) = (\underline{H}^{tr} \delta \underline{H}^{tr})_d. \quad (28')$$

Wir sehen, dass tatsächlich

$$Jm \Gamma_{20/0}(E'_0) = 0. \quad (29)$$

Wenn es erlaubt ist, $Re \Gamma$ als unabhängig von E'_A zu betrachten, und wir werden sehen, dass dies in sehr guter Näherung der Fall ist, so folgt aus (26) und (29) streng, dass das Linienmaximum jetzt

bei $E'_A - E'_0$ liegt. Hiermit ist der Beweis dafür erbracht (was bisher nur sehr plausibel war), dass die *übliche Berechnung der Niveauverschiebung* durch (24) tatsächlich die *Verschiebung des Linienmaximums* liefert. Ganz exakt ist das nicht der Fall, da $Re\Gamma$ von E'_A , wenn auch nur sehr schwach, abhängt (siehe § 5). Die Verschiebung H_L ist *unabhängig* von ε , also *unabhängig von den Anregungsbedingungen* (vorausgesetzt natürlich, dass $\varepsilon \gg \gamma$).

Für den Grundzustand G (ohne Lichtquanten) verschwindet $Im\Gamma$ an jeder Stelle E , da die Energieschale unendlich klein ist und H^{tr} also nur ein Photon unendlich kleiner Energie emittieren könnte. Trotz des Auftretens von $\Gamma_{0/0}$ in (26) ist die Formel also symmetrisch in Anfangs- und Endzustand (auch $Re\Gamma_{G,G} = 0$).

Wir werden die E -Abhängigkeit von $Re\Gamma$ und $Im\Gamma$ in § 5 genauer untersuchen.

§ 4. Strahlungstheoretische Korrekturen zu $Re\Gamma$.

Das Hauptziel dieser Untersuchungen ist die Berechnung der strahlungstheoretischen Korrekturen zur Linienbreite, also $Re\Gamma_4$. Die explizite Berechnung erfolgt in der folgenden Arbeit III; hier werden wir nur die Ausgangsformel ableiten und zeigen, dass sie nur von der Grösse der Energieschale $\varepsilon(0)$ abhängt. Wir werden in § 5 sehen, dass $Re\Gamma_2$ sehr schwach von E abhängt. Dasselbe wird sich für $Re\Gamma_4$ erweisen. Da $Re\Gamma_4$ sowieso eine kleine Korrektur darstellt, werden wir uns darauf beschränken, $Re\Gamma_4$ nur an einer Stelle, nämlich $E = E_0$ zu berechnen. Die ohnehin sehr komplizierten expliziten Rechnungen werden dadurch sehr wesentlich vereinfacht. Die Stelle $E = E_0$ spielt in mehrfacher Hinsicht eine ausgezeichnete Rolle.

Wenn wir U ebenfalls wie K entwickeln, $U = U_1 + U_2 + U_3$, so wird nach (9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} Re\Gamma_{40/0}(E'_0) &= \langle 0 | U^\dagger \delta_0 U | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | U_3^\dagger \delta_0 U_1 + U_1^\dagger \delta_0 U_3 + U_2^\dagger \delta_0 U_2 | 0 \rangle, \quad \delta_0 \equiv \delta(E'_0 - H'_0) \end{aligned} \quad (30)$$

und nach (10) (man bemerke, dass $H_{Lnd} = 0$ und $K_1 = H^{tr}$ keine Diagonalelemente hat)

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= K_1 \\ U_2(E'_0) &= K_{2nd} + (K_1 \xi_0 K_1)_{nd} \\ U_3(E'_0) &= K_{3nd} + (K_1 \xi_0 K_{2nd})_{nd} + ((K_2 - H_L) \xi_0 K_1)_{nd} \\ &\quad + (K_1 \xi_0 (K_1 \xi_0 K_1)_{nd})_{nd}, \quad \xi_0 \equiv \xi(E_0 - H'_0). \end{aligned} \right\} \quad (30')$$

Explizit ist zunächst

$$U_2(E'_0) = \underline{H}_c - \underline{H}_s + [H_0 \underline{T}_2] + \left\{ \int H^{tr} P \underline{H}^{tr} \delta + \int \delta \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} \right\}_{nd} + \\ + (\underline{H}^{tr} P_0 \underline{H}^{tr})_{nd} - i\pi (\underline{H}^{tr} \delta_0 \underline{H}^{tr})_{nd}.$$

Wenn U auf den Zustand $|0\rangle$ wirkt und von links mit δ_0 multipliziert ist (siehe (30)),

$$\int H^{tr} P \underline{H}^{tr} \delta |0\rangle = H^{tr} P_0 \underline{H}^{tr} |0\rangle - \delta_0 \int \delta \underline{H}^{tr} P \underline{H}^{tr} |0\rangle - \delta_0 \underline{H}^{tr} P_0 \underline{H}^{tr} |0\rangle \\ \delta_0 [H_0 \underline{T}_2] |0\rangle = 0,$$

wird also

$$\delta_0 U_2(E'_0) |0\rangle = \delta_0 \{ \underline{H}_c - \underline{H}_s + H^{tr} P_0 \underline{H}^{tr} + \underline{H}^{tr} P_0 \underline{H}^{tr} + \underline{H}^{tr} P_0 \underline{H}^{tr} - \\ - i\pi \underline{H}^{tr} \delta_0 \underline{H}^{tr} \} |0\rangle = \delta_0 \{ \underline{H}_c - \underline{H}_s + H^{tr} P_0 \underline{H}^{tr} - i\pi \underline{H}^{tr} \delta_0 \underline{H}^{tr} \} |0\rangle. \quad (31)$$

Die Glieder $H^{tr} P H^{tr}$ kombinieren sich so, dass die Energieschale völlig herausgefallen ist. Das Glied $-i\pi$ wird durch die anderen Glieder in $U_3^\dagger \delta_0 U_1$ usw. kompensiert (ausser im Produkt $\sim \pi^2$). Ebenso werden sich die Glieder $\underline{H}_c - \underline{H}_s$ so ergänzen, dass die Energieschale herausfällt.

In ähnlicher Weise sind $U_3^\dagger \delta_0 U_1$ und $U_1^\dagger \delta_0 U_3$ zu berechnen. Es zeigt sich, dass in fast allen Gliedern die Energieschale herausfällt⁹⁾. K_3 kommt nur in U_3 vor, und dies ist mit δ_0 multipliziert, was exakte Energieerhaltung bedeutet. Das Schlussresultat ist (nach einiger Rechnung):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \Gamma_{40/0}(E'_0) = \\ & = \langle 0 | \{ (H^{tr} P_0 H^{tr} + H_c - H_s) \delta_0 (H^{tr} P_0 H^{tr} + H_c - H_s)_{nd} - \\ & - \pi^2 H^{tr} \delta_0 H^{tr} \delta_0 (H^{tr} \delta_0 H^{tr})_{nd} + [H^{tr} \delta_0 H^{tr} P_0 (H^{tr} P_0 H^{tr} + H_c - H_s)_{nd} \\ & + H^{tr} \delta_0 (H_c - H_s - H_L) P H^{tr} - \frac{1}{2} H^{tr} \delta_0 (\underline{H}^{tr} P_0^2 \underline{H}^{tr})_d H^{tr} - \\ & - \frac{1}{2} H^{tr} \delta_0 H^{tr} (\underline{H}^{tr} P_0^2 \underline{H}^{tr})_d + \text{konj. compl.} \} |0\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Die Energieschale kommt nur noch in den „Renormalisationstermen“ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und den „quadratischen Nennern“ P_0^2 vor. Im ersten Renormalisationsterm, wo $(\underline{H}^{tr} P_0^2 \underline{H}^{tr})_d$ in der Mitte steht, bezieht sich dieser Faktor offenbar auf den Grundzustand, da links der Faktor $H^{tr} \delta_0$ steht, der bei exakter Energieerhaltung vom Ausgangsniveau nur zum Grundzustand führen kann. Da

$\varepsilon(G) = 0$, so kann man hier auch die \sim -Restriktion weglassen. Dagegen ist diese Restriktion im zweiten Renormalisationsterm nötig, da sonst divergente Beiträge entstehen würden. Der Faktor $(\tilde{H}^{tr} P_0^2 \tilde{H}^{tr})_d$ bezieht sich hier auf das angeregte Niveau 0 und der Faktor \tilde{H}^{tr} rechts kann zum Grundniveau führen. Ohne die \sim -Restriktion würde dann P_0^2 quadratisch divergieren. Es ist also zu erwarten, dass auch $Re \Gamma_{4\ 0/0}$ ε -abhängige Beiträge hat. Dies werden wir in III auch finden. Man sieht aber auch schon aus der Struktur dieses Gliedes, dass die ε -abhängigen Beiträge für $\varepsilon \rightarrow \infty$ verschwinden, ähnlich wie das für $Jm \Gamma_2(E)$ der Fall war. Wir werden in III $Re \Gamma_4$ explizit auf Konvergenz und Eindeutigkeit hin untersuchen und die Grössenordnung abschätzen.

§ 5. Bestimmung von $Jm \Gamma_2(E)$ und $Re \Gamma_2(E)$.

Wir untersuchen zum Schluss die E -Abhängigkeit von Γ in zweiter Näherung. Es genügt völlig, dies in nichtrelativistischer Näherung zu tun. Wir bemerken zuerst, dass nur *transversale* Photonen zu $Jm \Gamma_2$ beitragen (28). Daraus erhellt sofort, dass es im allgemeinen nicht möglich ist, $\Gamma(E)$ in 4-dimensionaler Weise zu berechnen, ohne die Lorentz-Bedingung explizit zu berücksichtigen. Dies ist nur an der Stelle $E = E_0$ möglich¹⁰).

Da in (28) nur \underline{H}^{tr} auf der Energieschale vorkommt, so tragen nur Übergänge von 0 in den Grundzustand G mit Emission von k bei, wobei k mit der Resonanzfrequenz $E'_0 - E'_G$ nahezu (d. h. innerhalb ε) übereinstimmt. Das Matricelement \underline{H}^{tr} für diesen Übergang ist proportional zu $1/\sqrt{k}$, also $\underline{H}^{tr} = B/\sqrt{k}$. Nennen wir die Resonanzfrequenz $E'_0 - E'_G = k_0$, so ist

$$2\pi |B|^2 \varrho_{k_0}/k_0 = Re \Gamma_{2\ 0/0}(E'_0) \equiv \gamma$$

die gewöhnliche Linienbreite zweiter Ordnung. ϱ_k ist die Dichtefunktion für Lichtquanten der Frequenz k . (28) ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Jm \Gamma_{2\ 0/0}(E) &= |B|^2 \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} \frac{\varrho_k}{k} dk \left(\frac{P}{E-E'_G-k} - \frac{P}{k_0-k} \right) = \\ &= -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{E-E'_G}{k_0} \cdot \log \left| \frac{E'_0-E+\varepsilon}{E'_0-E-\varepsilon} \right| \end{aligned} \quad (32)$$

Dies verschwindet, wie es sein muss, für $E = E'_0$. $Jm \Gamma_2(E)$ verschwindet auch in den beiden Grenzfällen $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varepsilon \rightarrow \infty$. Für den Grundzustand ist also $Jm \Gamma_{2G/G} = 0$. Setzen wir $E = E'_A \equiv E'_G + k$ (Linienform für $t \rightarrow \infty$), so stellt (32) eine von ε abhängige

Modifikation der Linienform dar (ohne das Maximum zu verschieben). Betrachten wir Werte von k , die in der Nähe des Maximums $k_0 = E'_0 - E'_G$ liegen, so können wir nach $(k_0 - k)/\varepsilon$ entwickeln und erhalten

$$\frac{1}{2} Jm \Gamma_{20/0}(E'_G + k) = -\frac{\gamma}{\pi} \frac{k}{k_0} \frac{k_0 - k}{\varepsilon} \quad (33)$$

Dies ist proportional zu $k_0 - k - E'_A - E'_0$. Setzt man dies in (26) ein, so sieht man, dass (33) in dieser Näherung als Korrektur zur Linienbreite aufgefasst werden kann. In dem idealisierten Grenzfall einer wirklich kontinuierlichen Anregung (die sich bis ins Unendliche erstreckt) geht $\varepsilon \rightarrow \infty$ und die Korrektur $Jm \Gamma_2(E) \rightarrow 0$. Wir werden in der folgenden Arbeit III sehen, dass die Korrektur vierter Näherung aus zwei Teilen besteht, von denen der erste von ε unabhängig ist (Größenordnung $\gamma/137^3$ für Wasserstoff), der zweite, ähnlich wie (33), proportional zu $1/\varepsilon$ ist. (Größenordnung γ^2/ε). In dem idealen Grenzfall kontinuierlicher Anregung sind also der ε -unabhängige Teil von $Re \Gamma_4$ und ferner die E -Abhängigkeit von $Re \Gamma$ die einzigen Korrekturen.

Wir betrachten schliesslich noch die E -Abhängigkeit von $Re \Gamma_2$. Wir erhalten aus (28')

$$\begin{aligned} Re \Gamma_{20/0}(E) &= 2\pi \underline{H}_{0A}^{tr} \delta(E - E'_G - k) \underline{H}_{A0}^{tr} = 2\pi |B|^2 \frac{Q_k}{k} \Big|_{E'_G + k = E} = \\ &= \gamma \frac{E - E'_G}{k_0}, \quad k_0 = E'_0 - E'_G \end{aligned} \quad (34)$$

wo wieder $\gamma = Re \Gamma_2(E'_0)$. Für $E = E'_A = E'_G + k$ heisst das, dass γ mit dem Faktor k/k_0 zu multiplizieren ist. Die Abweichung von γ ist also (wenn $k_0 - k \sim \gamma$) von der Größenordnung γ^2/k_0 . Wenn $\varepsilon \ll k_0$, wie ursprünglich angenommen war, dann ist die Korrektur von $Jm \Gamma_2(E)$ viel grösser. Wenn wir in (26) den Zähler durch die erste Näherung \underline{H}^{tr} ersetzen und den Grenzfall $\varepsilon \rightarrow \infty$ betrachten, so wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der emittierten Lichtquanten

$$w(k) dk = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{k}{k_0} \frac{dk}{(k_0 - k)^2 + \gamma^2 k^2/4 k_0^2}.$$

Die zu H_L zusätzliche Verschiebung des Maximums, die von der k -Abhängigkeit von $Re \Gamma_2$ und auch von $U(E'_A)$ herrührt, ist

$$\Delta k_{\max} = -\gamma^2/8 k_0.$$

Für das $2P$ -Niveau von Wasserstoff ist $\gamma = 6.3 \times 10^8 \text{ sec}^{-1} = 100 \text{ Meg. c.}$ Für den Radiofrequenz-Übergang $2P_{3/2} \rightarrow 2S_{1/2}$ ($2S$ ist stark metastabil und unsere Betrachtungen können auch hier an-

gewandt werden), ist $k_0 = 10^4$ Meg. c. und $\Delta k_{\max} \simeq 10^{-3}$ Meg. c. Dies ist noch rund 1000mal kleiner als die gegenwärtige Messgenauigkeit der Linienverschiebung (ca. 1 Meg. c). Natürlich müssten auch erst die höheren Näherungen von H_L ($\sim e^4$ usw.) bestimmt werden, bevor diese Verschiebung in Betracht gezogen wird.

$Re\Gamma_4$ wird in der folgenden Arbeit III abgeschätzt werden.

Wir wünschen, Herrn Prof. W. HEITLER für das grosse Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, und für die vielen Ratschläge herzlich zu danken.

Literatur.

- 1) E. ARNOUS und S. ZIENAU, Helv. Phys. Acta **24**, 279 (1951).
- 2) Es ist zu hoffen, dass mit der Weiterentwicklung der Radiofrequenzmethoden auch exaktere Messungen der natürlichen Linienform und -breite in Wasserstoff möglich sein werden.
- 3) Beispiele hierfür finden sich in W. HEITLER und S. T. MA, Proc. Roy. Ir. Ac. **52**, 109 (1949).
- 4) Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens: J. M. JAUCH und F. COESTER, Phys. Rev. **78**, 149 (1950).
- 5) J. FRENCH und V. WEISSKOPF, Phys. Rev. **75**, 1240 (1949).
- 6) Näheres z. B. in W. HEITLER, Quantum Theory of Radiation, 3. Aufl., Oxford, im Druck.
- 7) Es ist keineswegs verlangt, dass wenn die Paare (n, m) und (n, l) je innerhalb einer Energieschale liegen, dann auch (m, l) innerhalb einer Energieschale liegen.
- 8) Genauer: In (24) ist nur der Null-Photonenteil und die Summe der Ein- und Null-Elektronenteile zu nehmen.
- 9) Folgende Punkte sind bei der Berechnung von $U_3^\dagger \delta_0 U_1$ usw. zu beachten: Der Kommutator $[H_0', T_2]$ hat sicher nur nichtdiagonale Elemente. Er kommt in folgendem Zusammenhang vor:

$$\begin{aligned} \delta_0 [H_0' T_2] \xi_0 &= \delta_0 [H_0' - E_0', T_2]_{n\bar{a}} \xi_0 = -\delta_0 T_{2n\bar{a}} (H_0' - E_0') \xi_0 (E_0' - H_0') = \\ &= +\delta_0 T_{2n\bar{a}}, \text{ da } \delta_0 (H_0' - E_0') = 0. \end{aligned}$$
 Ebenso $\xi_0 [H_0' T_2] |0\rangle = \xi_0 [H_0' - E_0', T_2] |0\rangle = -T_{2n\bar{a}}$, da $(H_0' - E_0') |0\rangle = 0$. Einige Glieder in U_3 heben sich explizit weg, wenn man sie in Energiedarstellung aufschreibt.
- 10) Auch bei der Berechnung der Linienverschiebung (24) handelt es sich im wesentlichen um $Jm\Gamma(E_0)$ vor der Änderung der Darstellung, § 3.

Relative Wirkungsquerschnitte für die Anregung von Isomeren- und Grundzuständen durch die (pn)-Reaktion

von F. Boehm¹⁾, P. Marmier²⁾ und P. Preiswerk.

(24. V. 1952.)

Bei den (pn)-Reaktionen mit der Protonenenergie von rund 7 MeV treten die speziellen Kerneigenschaften im allgemeinen nicht stark in Erscheinung, und die Voraussetzungen, die bei der Beschreibung der Reaktion mit der statistischen Kerntheorie gemacht werden, scheinen recht gut erfüllt zu sein. So haben die systematischen Untersuchungen der (pn)-Reaktion gezeigt, dass die Wirkungsquerschnitte für 6,7 MeV Protonen in Funktion der Ordnungszahl einen glatten Verlauf haben³⁾. Ausnahmen treten nur bei Kernen, deren Protonen- und Neutronenschalen zugleich abgeschlossen sind, auf. Ferner geht aus den Anregungskurven hervor, dass, sofern die Protonenenergie genügend hoch über dem Schwellenwert der Reaktion liegt, es für die Grösse des Wirkungsquerschnittes nicht mehr speziell auf den Spin des Endkernes ankommt⁴⁾. Das ist verständlich: die Reaktion verläuft zur Hauptsache über angeregte Niveaux des Endkernes, und es stehen dem Zerfall des Zwischenkernes zahlreiche Kanäle offen.

Immerhin zeigen gerade die erwähnten Ausnahmefälle, dass die Voraussetzungen der statistischen Theorie nur bedingt erfüllt sind. Es schien uns daher nützlich, noch auf eine etwas andere Weise zu prüfen, wie weit diese Näherungsbetrachtung angewandt werden kann. Man wird nach dem, was wir über den Spin des Endkernes sagten, erwarten können, dass der Wirkungsquerschnitt für die Anregung der tiefsten Niveaux des Endkernes nicht wesentlich verschieden sein wird von dem für die Bildung des Endkernes im Grundzustand, natürlich nur, wenn die Anregungsenergie gegenüber der den Neutronen zur Verfügung stehenden Energie klein ist.

¹⁾ Jetzt: Pupin Physics Laboratories, Columbia University, New York, N. Y.

²⁾ Jetzt: California Institute of Technology, Pasadena 4, Cal.

³⁾ J. P. BLASER, F. BOEHM, P. MARMIER und P. SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **24**, 441, 1951.

⁴⁾ J. P. BLASER, F. BOEHM, P. MARMIER und D. C. PEASLEE, *Helv. Phys. Acta* **24**, 3, 1951.

Diese Vermutung lässt sich bei der Anregung isomerer Zustände prüfen. Eine Reihe von Isomeren kann durch die (pn)-Reaktion erzeugt und der Wirkungsquerschnitt derselben bestimmt werden. Wir haben die relativen Wirkungsquerschnitte für die Bildung des isomeren und des Grundzustandes durch monochromatische Protonen von 6,7 MeV gemessen. Als Target wurden dünne Folien, in welchen der Energieverlust der Protonen weniger als 100 keV betrug, verwendet.

Tabelle 1.

Relative Wirkungsquerschnitte für die Anregung von Isomeren durch die (pn)-Reaktion mit 6,7 MeV Protonen.

Iso- mer	$\sigma^*/\sigma \text{ exp.}$	Übergangs- energie $E \text{ (keV)}$	Spinzuordnung ¹⁾			
			Aus- gangs- kern	Endkern $I_{I_s} \quad I_{I_f} \quad I_{I_t}$		
$^{44}_{21}\text{Sc}$	$0,077 \pm 0,010$	271	0	$(6^+, 7^+) \quad (2^+, 3^+)$		
$^{52}_{25}\text{Mn}$	12 ± 3	390	0	$(1^+, 2^+) \quad (5^+, 6^+)$		
$^{80}_{35}\text{Br}$	$0,35 \pm 0,05$	49/37	0	$5^- \quad 2^- \quad 1^+$		
$^{79}_{36}\text{Kr}$	$0,5 \pm 0,2$	127	3/2	$p \ 1/2 \quad 7/2^+$		
$^{85}_{38}\text{Sr}$	$0,25 \pm 0,15$	7,5/225	5/2	$p \ 1/2 \ 7/2^+ \ g \ 9/2$		
$^{87}_{39}\text{Y}$	$0,42 \pm 0,06$	384	9/2	$g \ 9/2 \ p \ 1/2$		
$^{89}_{40}\text{Zr}$	$0,42 \pm 0,06$	588	1/2	$p \ 1/2 \ g \ 9/2$		
$^{95}_{43}\text{Tc}$	$0,55 \pm 0,15$	39	5/2	$p \ 1/2 \ g \ 9/2$		
$^{104}_{45}\text{Rh}$	$0,45 \pm 0,08$	52	0	$(4^-) \quad (1^+)$		
$^{110}_{47}\text{Ag}$	$0,85 \pm 0,15$	116	0	$(5^-) \quad (1^+)$		
$^{114}_{49}\text{In}$	$0,76 \pm 0,25$	192	0	$(5^+) \quad (1^+)$		
$^{121}_{52}\text{Te}$	$1,33 \pm 0,30$	82/213	5/2	$h \ 11/2 \ d \ 3/2 \ s \ 1/2$		
$^{127}_{54}\text{Xe}$	$1,2 \pm 0,2$	175/96	5/2	$h \ 11/2 \ d \ 5/2 \ s \ 1/2$		
$^{197}_{80}\text{Hg}$	$0,27 \pm 0,06$	164/133	3/2	$i \ 13/2 \ f \ 5/2 \ p \ 1/2$		

In Tabelle 1 sind die erhaltenen relativen Wirkungsquerschnitte eingetragen, und zwar σ^*/σ , das Verhältnis des Wirkungsquerschnittes für die Bildung des Isomers zu dem des Grundzustandes. Ausserdem wurde die Energie des isomeren Überganges und die Spinzuordnung aufgeführt.

σ^*/σ ist ferner als Funktion der Kernladungszahl Z in Figur 1 aufgetragen.

¹⁾ Vgl. M. GOLDBABER, R. D. HILL, Rev. mod. Phys. 1952.

Beim Vergleich der Verhältnisse wäre streng genommen zu beachten, dass bei einigen Kernen – wir haben sie in Figur 1 besonders markiert – ein weiteres Niveau zwischen dem Isomeren- und dem Grundzustand liegt. Dadurch erhöht sich das effektive Gewicht des Grundzustandes, weil dieser auch über das Zwischenniveau gebildet werden kann.

Bei den leichteren Kernen wurde das Verhältnis σ^*/σ für ^{44}Sc und ^{52}Mn gemessen. Beim ^{52}Mn wird der isomere Zustand gegenüber

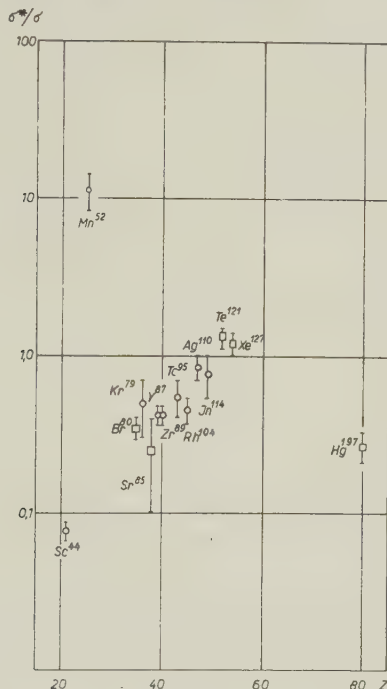


Fig. 1.

Relative Wirkungsquerschnitte für die Anregung von Isomeren- und Grundzuständen durch die (pn)-Reaktion mit 6,7 MeV Protonen.

- Kerne mit einem Niveau zwischen dem isomeren und dem Grundniveau.
- Kerne ohne Niveau zwischen dem isomeren und dem Grundniveau.

dem Grundzustand sehr stark bevorzugt. Für eine Erklärung hat man die Spinverhältnisse näher anzusehen und zu berücksichtigen, dass es sich um eine Reaktion mit einem sehr hohen Schwellenwert handelt. Das heisst: Grundzustand und isomere Zustand werden durch direkte Anregung aus dem Zwischenkern gebildet. Für die Bildung über höher angeregte Zustände des Endkernes reicht die vorhandene Protonenenergie nicht aus. In diesem Fall wirkt sich

die grosse Spindifferenz der beiden Zustände sehr stark aus. Aus dem Zerfallsschema ist beim ^{52}Mn auf einen hohen Spin, 5 oder 6, für den Grundzustand, auf einen niedrigen, 1 oder 2, für den isomeren Zustand zu schliessen. Da der Anfangskern ein Kern mit gerader Protonen- und gerader Neutronenzahl ist und somit den Spin 0 hat, steht bei der Reaktion der Kanal nach dem Grundzustand nur für einfallende Protonen- und weggehende Neutronen, die relativ hohe Drehimpulse haben, offen. Im Gegensatz dazu ist die Reaktion, die nach dem isomeren Zustand führt „erlaubt“. Dieser Unterschied kommt auch in der Anregungskurve sehr deutlich zum Ausdruck.

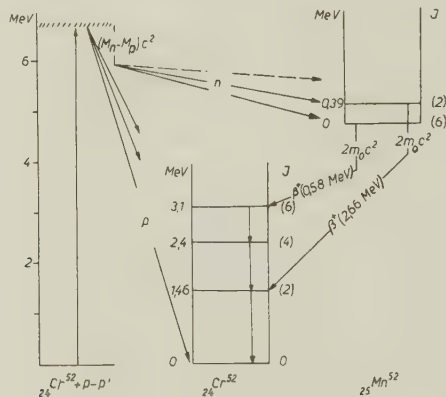


Fig. 2.

Niveauschema des ^{52}Cr und des ^{52}Mn .

Die Anregung für die Bildung des isomeren ^{52}Mn zeigt einen „normalen“ Verlauf mit raschem Anstieg des Wirkungsquerschnittes oberhalb des Schwellenwertes der Reaktion. Der Wirkungsquerschnitt für die direkte Bildung des ^{52}Mn im Grundzustand steigt dagegen mit wachsender Protonenenergie sehr langsam an und weicht bei $E_p = 6,7$ MeV immer noch um einen Faktor 30 vom Sättigungswert ab.

Man kann versuchen, die Anregungskurve zu analysieren und in die Beiträge, die die verschiedenen Protonen- und Neutronenwellen beisteuern, zu zerlegen. Für die Bildung des Zwischenkerns — bei $A = 52$ und einer Protonenenergie um 6 MeV — ist der Partialwirkungsquerschnitt für eine einfallende p -Welle am grössten, etwas grösser als für eine d - und eine s -Welle und fast zehnmal grösser als der einer f -Welle. Der Zwischenkern wird also vorwiegend in Zuständen mit Spin kleiner als $5/2$ gebildet werden. Das zeigt schon, dass der Wirkungsquerschnitt für die nach dem Grundzustand mit

hohem Spin führende Reaktion wesentlich kleiner sein muss als für diejenige, die zum Isomer führt. Während beim Zerfall des Zwischenkernes die den Neutronen zur Verfügung stehende Energie kaum ausreicht, höhere Niveaux als den isomeren Zustand anzuregen, sind beim Konkurrenzprozess mit Reemission eines Protons mehr Niveaux im Ausgangskern anregbar. Die Zahl der in Betracht zu ziehenden Übergänge ist zu gross, als dass eine genauere Analyse sehr sinnvoll

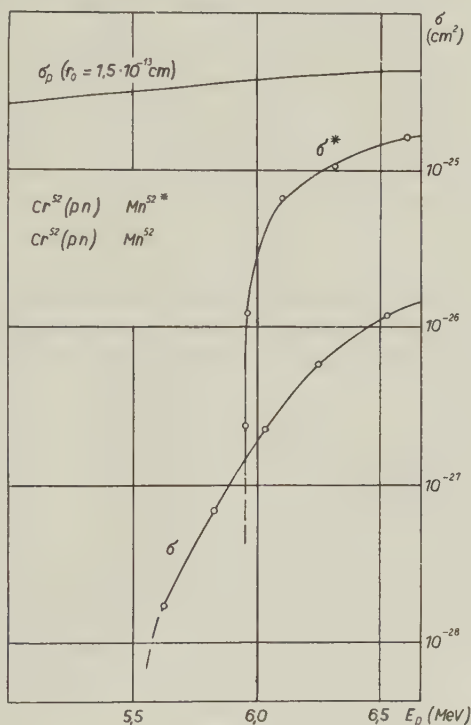


Fig. 3.

Anregungskurven der Reaktionen $^{52}\text{Cr}(p,n)^{52}\text{Mn}$ und $^{52}\text{Cr}(p,n)^{52}\text{Mn}^*$.

wäre. Immerhin lässt sich grob abschätzen, dass die allgemeine Beschreibung der Reaktion im Einklang mit der Grösse und dem Verlauf der gemessenen Wirkungsquerschnitte steht.

Beim ^{44}Sc ist — nach dem Zerfallsschema zu schliessen — der Spin des Isomers grösser als derjenige des Grundzustandes. Nach den Überlegungen, die wir beim ^{52}Mn anstellten, ist in diesem Fall ein kleiner Wert für σ^*/σ zu erwarten, was auch tatsächlich der Fall ist.

Wenn der Schwellenwert der Reaktion tiefer liegt und die Zahl der im Endkern anregbaren Niveaux grösser ist, tritt die direkte

Bildung des isomeren und des Grundzustandes vom Zwischenkern aus zurück gegenüber der Bildung über die höheren Niveaux. Dabei kann ein Drehimpulsunterschied ausgeglichen werden durch die γ -Strahlung.

Bei den mittleren Kernen, bei denen diese Bedingungen erfüllt sind, ist das Verhältnis σ^*/σ erwartungsgemäss weniger von 1 verschieden. Die Abweichung von σ^*/σ von 1 nimmt mit wachsendem Z ab von $\left| \log \frac{\sigma^*}{\sigma} \right| \simeq 0,5$ bei $Z=35$ bis $\left| \log \frac{\sigma^*}{\sigma} \right| \simeq 0,1$ bei $Z=54$. Diese Tatsache scheint mit der wachsenden Niveaudichte bei grösser werdendem Z im Zusammenhang zu stehen. Führen viele Mehrfachkaskaden von den höheren zu den tieferen Zuständen im Endkern, so ist die Wahrscheinlichkeit gross, dass der Grundzustand und der isomere Zustand gleich stark angeregt werden.

Nach diesen Überlegungen wäre beim ^{197}Hg ein grösserer Wert des Verhältnisses σ^*/σ zu erwarten gewesen. σ^*/σ liegt um einen Faktor 4 (Zwischenniveau nicht berücksichtigt) tiefer als die Werte der Kerne mit Z um 50. Leider war bei den schweren Kernen kein weiteres Beispiel zugänglich, so dass sich nicht sagen lässt, ob hier allgemein die σ^*/σ -Werte tiefer liegen. Wir vermuten eher, dass der niedrige Wert von σ^*/σ durch die hohe Spindifferenz zwischen dem Ausgangskern ^{197}Au ($I = 3/2$) und dem isomeren Zustand ^{197}Hg ($I = 13/2$) bedingt ist und ein Ausgleich in den Kaskaden nicht mehr erfolgen kann.

Allgemein lässt sich wohl schliessen, dass die Voraussetzungen für eine statistische Beschreibung der Kernreaktionen doch nur sehr bedingt erfüllt sind. Bei den (pn)-Reaktionen mit 6,7 MeV Protonen ist der Abstand der Niveaux im Endkern nicht vernachlässigbar klein gegenüber der den Neutronen zur Verfügung stehenden Energie. Die Spindifferenz zwischen Ausgangs- und Endkern und die spezielle Niveaufolge können sich unter Umständen noch sehr stark auswirken.

Herrn Prof. Dr. P. Scherrer möchten wir für sein stetes Interesse an dieser Arbeit danken. Herrn Dr. D. C. PEASLEE danken wir für interessante Diskussionen.

Physikalisches Institut der ETH., Zürich.

Compte rendu de la réunion de la Société Suisse de Physique

à Berne, le 24 août 1952,

à l'occasion de la 132^e réunion annuelle
de la Société Helvétique des Sciences Naturelles.

Président: Prof. Dr. P. HUBER (Bâle)
(en l'absence, à l'étranger, du Prof. Dr. A. MERCIER)
Secrétaires: Dr. P. DINICHERT (Neuchâtel),
Dr. P. DE HALLER (Winterthur).

Partie administrative.

Sont reçus comme membres ordinaires: MM. R. DETRA (Zurich), F. DUBS (Zurich), M. FAUCONNET (Genève), J. DE FRIES (Zurich), H. GERBER (Zurich), E. HONEGGER (Zurich), L. MEYER (Zurich), V. RAEGER (Vevey), M. RAUSCHER (Zurich), W. SPILLMANN (Lucerne), W. TRAUPEL (Winterthur), H. R. VOELLMY (Zurich), E. VOLET (Vevey), R. WALTHARD (Lucerne).

La taxe pour les dépassements du maximum de 2 pages imprimées admis pour les résumés des communications scientifiques présentées aux réunions de la S.S.P. est fixée à Fr. 30.— par page, entière ou entamée. Fr. 20.— iront à la Rédaction des *Helv. Phys. Acta*, Fr. 10.— à la S.S.P.

Partie scientifique.

Les travaux de Physique appliquée paraissent dans la «*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*».

Untersuchungen über den Dunkelstrom von Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern

von N. SCHÄETTI und W. BAUMGARTNER (ETH., Zürich).

Die Anwendungsmöglichkeiten der Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern werden in vielen Fällen durch den Dunkelstrom dieser Röhren begrenzt. Dieser Strom setzt sich zusammen aus:

1. der thermischen Emission der Photokathode;

2. einem Ionenstrom, hervorgerufen durch die Ionisation von Gasresten in der Röhre und daraus resultierender Bombardierung der Photokathode durch diese Ionen;
3. einem Verluststrom infolge ungenügender Isolation;
4. einer Feldemission an den Elektroden.

Während die dritte und vierte Komponente durch geeignete Konstruktion der Röhre vernachlässigbar klein, die zweite durch sorgfältige Entgasung der Elektroden und gutes Vakuum in der Röhre weitgehend reduziert werden können, ist die erste durch die Eigenschaften der Photokathode bestimmt. Die thermische Emission der Photokathode ist bei fester Temperatur abhängig vom Kathodenmaterial und nimmt bei den heute verwendeten Photokathoden in der Reihenfolge Cs_2O , Cs-Sb , Li-Sb ab; sie ist um so kleiner, je kurzwelliger die Grenzwellenlänge des Photoeffektes ist.

Es ist nun eine bekannte Erscheinung, dass ein an Licht gelagerter Multiplier bei Inbetriebnahme zunächst einen hohen Nullstrom zeigt, der bei Dunkelheit allmählich auf einen tieferen Wert absinkt. So belief sich die Nullstosszahl von zwei untersuchten Sekundärelektronenvervielfachern zu Beginn auf 1×10^4 Nullstösse/sek., um im Verlaufe einer Woche auf $1,2 \times 10^3$ bzw. 2×10^2 abzufallen. Auf diesen Werten blieben diese Zahlen während der Beobachtungszeit von 1 Monat. Da ein solcher Effekt auch bei Messlicht zu erwarten ist, war ein näheres Eintreten auf seine Eigenschaften von Interesse. Gemessen wurde an zwei 17stufigen Vervielfachern mit Li-Sb -Photokathode¹⁾. Bei beiden Röhren erfolgte die Zählung der Nullstösse bei einer Gesamtverstärkung von 10^8 . Die Röhrenspannungen betrugen 3600 bzw. 3000 Volt. Die Impulse der Vervielfacher wurden über einen Verstärker ($V_{\text{max}} = 10^3$) einem Untersetzer zugeführt mit einer maximalen Untersetzung von 2^{15} . Durch Arbeiten im Impulsplateau wurde die Zählung aller Multiplierstösse gesichert.

1. Erhöhung der Nullstosszahl durch Belichtung der Photokathode.

Die Photokathode des Vervielfachers wurde bei spannungslosem Dynodensystem mit einer Wolframlampe belichtet. Der gewählten Belichtungsstärke entsprach ein Photostrom von $1,45 \mu\text{A}$, gemessen am Vervielfachereingang. Nach Abschalten der Lampe wurde der Vervielfacher in Betrieb genommen und die Nullstosszahl gemessen. Die Belichtungszeit wurde von $10''$ bis zu $5'$ erhöht. Fig. 1 zeigt

¹⁾ N. SCHAETTI und W. BAUMGARTNER, ZAMP 1, 268 (1950); Le Vide 6, 1041 (1951). — N. SCHAETTI, ZAMP 2, 147 (1951).

die Nullstosszahlerhöhung in Funktion der Belichtungszeit. Aufgetragen ist die Nullstosszahl während der zweiten Minute nach

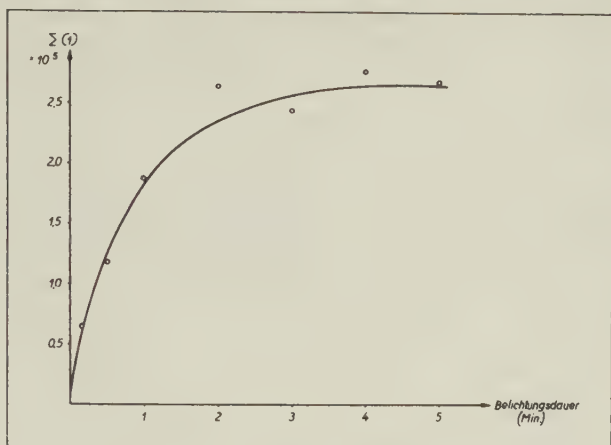


Fig. 1.

der Belichtung. Sie ist sehr beträchtlich, für Belichtungszeiten länger als $2', 2,5 \times 10^5$ Stösse. Eine Verlängerung der Belichtungszeit

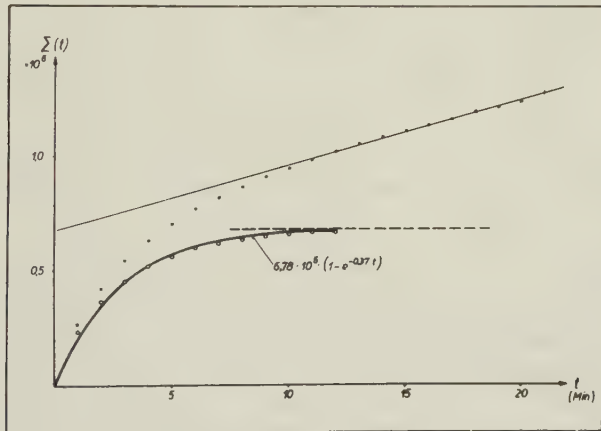


Fig. 2.

über $2'$ hat bei dieser Belichtungsintensität keine weitere Erhöhung der Nullstosszahl zur Folge.

Der Charakter des Abklingvorganges wurde durch Messung der Zeitabhängigkeit der Totalstosszahl $\Sigma(t)$ für die verschiedenen

Belichtungszeiten bestimmt. Fig. 2 gibt $\Sigma(t)$, gerechnet ab Beginn der zweiten Minute nach Belichtung für eine Belichtungszeit von 5'. (Kurve xxxx.) Subtrahiert man den teilweise extrapolierten linearen Anstieg, so erhält man eine Kurve (oooooooo), die sich durch eine Funktion der Form $\Sigma(t) = a(1 - e^{-bt})$ darstellen lässt. Aus ihr entnimmt man einen exponentiellen Abfall der Stosszahl

$$\sigma(t) = - \frac{d\Sigma}{dt}.$$

Analoges war bei allen Belichtungszeiten $\geq 1'$ möglich (messtechnisch bedingt). Die Exponenten liegen für ein und denselben Vervielfacher nahe beieinander. Der vor Belichtung vorhandene Nullstoss-Wert stellt sich aber erst nach 2–8 Stunden ein. Aus appa-

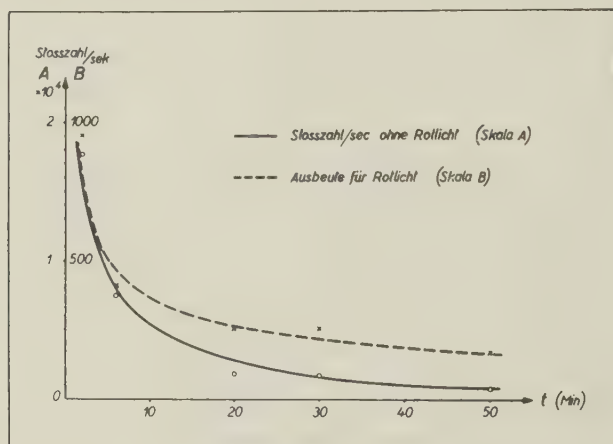


Fig. 3.

rativen Gründen wurden die Messungen vorderhand nicht auf kürzere und längere Beobachtungszeiten ausgedehnt. Die nachfolgenden Ergebnisse beziehen sich daher auf den in Fig. 2 dargestellten Anteil der Nullstosszahl.

2. Erhöhung der Rotempfindlichkeit der Photokathode durch Vorbelichtung.

Die Photokathode wurde mit Rotlicht schwach belichtet, mit und ohne Vorbelichtung. Rotlicht lieferte eine Wolframlampe in Kombination mit Jenaer Filter RG8 und GAB-Interferenzfilter 801 m μ . Vorbelichtung erfolgte wiederum ohne Betriebsspannung.

Die Photokathoden beider Vervielfacher zeigten nach Vorbelichtung eine höhere Rotausbeute. Fig. 3 zeigt, wie die Rotausbeute der Photokathode unmittelbar nach der Vorbelichtung höher ist als im Normalzustand, und dass sie mit dem Abklingen der Nullstösse ebenfalls auf den Normalwert absinkt.

3. „Ausleuchten“ der vorbelichteten Photokathode mit Rotlicht.

Fig. 4 zeigt die Resultate folgender Versuche: Die Photokathode wurde mit Licht der Wellenlänge $420\text{ m}\mu$ (Jenaer Filter BG12 + GAB $420\text{ m}\mu$) während drei Minuten vorbelichtet. Zwei Minuten

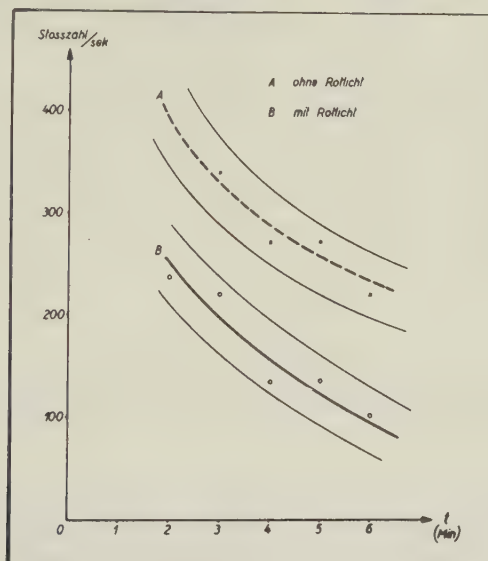


Fig. 4.

später wurde die Erhöhung der Nullstosszahl gemessen. (Kurve A.) Sodann wurde die Kathode wiederum 3 Minuten mit Licht der Wellenlänge $420\text{ m}\mu$ vorbelichtet und anschliessend während $1\frac{1}{2}$ Minuten mit Licht der Wellenlänge $801\text{ m}\mu$ (beides ohne Betriebsspannung). $\frac{1}{2}$ Minute später, somit wiederum 2 Minuten nach der Blau-Vorbelichtung, wurde die Messung der Nullstösse durchgeführt (Kurve B). Die Zahl der Nullstösse war geringer, wenn die Kathode nach der Bestrahlung mit Blau-Licht zusätzlich mit rotem Licht belichtet wurde. Es liegt ein Effekt vor, der an die Ausleuchtung und Tilgung gewisser Phosphore bei Infrarot-Bestrahlung erinnert.

4. Abhängigkeit der Erhöhung der Nullstosszahl von der Wellenlänge der Vorbelichtung.

Die Photokathode wurde mit sichtbarem Licht verschiedener Wellenlänge vorbelichtet und die resultierende Erhöhung der Nullstosszahl gemessen (Fig. 5). Gestrichelt ist die Erhöhung der

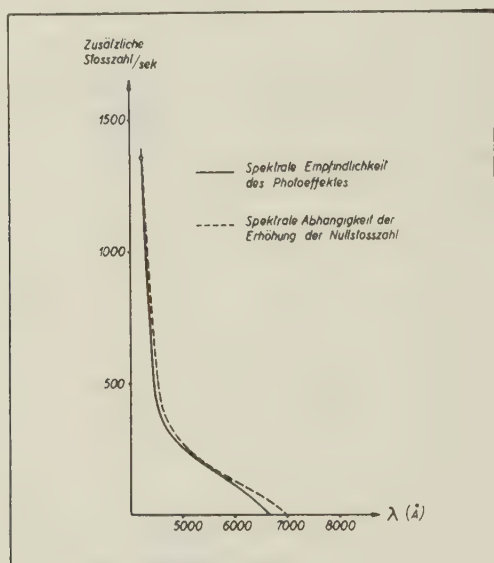


Fig. 5.

Nullstösse in Funktion der Lichtwellenlänge, ausgezogen die spektrale Empfindlichkeitskurve der Photokathode eingezeichnet. Für kürzere Wellenlängen verlaufen beide Effekte im wesentlichen parallel, für langwelliges Licht ist die Nullstosserhöhung ausgeprägter als der Photoeffekt. Dies zeigt das Verhältnis der Effekte für 660 $m\mu$ und 420 $m\mu$:

Effekt	$E_{660} : E_{420}$
Photoeffekt	1 : 90
Nullstosserhöhung	1 : 23

5. Schlussbemerkungen.

Die vorliegenden Ergebnisse zeigen, dass bei einer Photokathode vom Typ Li—Sb und wohl auch bei Cs—Sb jede Belichtung innerhalb ihres Empfindlichkeitsbereiches eine Erhöhung des Dunkel-

stromes zur Folge hat. Da diese Erscheinung auch bei Belichtung im spannungslosen Zustand der Röhre auftritt, muss sie ihren Ursprung in der Kathode selbst haben. Die damit verbundene Erhöhung der Rotempfindlichkeit lässt den Schluss zu, dass durch Belichtung die Austrittsarbeit der Photokathode herabgesetzt wird. Sie wirkt sich als Störung in einer Vergrösserung der thermischen Emission aus. Zuletzt scheint auch der beobachtete Ausleuchteffekt auf Vergleichsmöglichkeiten mit Kristallphosphoren hinzudeuten. In diesem Zusammenhang ist ein Resultat von N. S. KHEBNIKOV und A. E. MELAMID¹⁾ von Bedeutung, die über Lumineszenzerscheinungen bei der Photokathode Cs—Sb berichten. Die hier besprochene Erhöhung der Nullstosszahl ist noch ausgeprägter, wenn die Vorbelichtung unter Spannung vorgenommen wird.

Untersuchungen über kurze und kürzeste Zeiten, sowie bei stark reduzierter Belichtungsintensität, sollen abklären, ob diese Erscheinungen ebenfalls für die in der Fernsehtechnik beobachteten Schwarzpegelstörungen (Flying-spot-Filmabtaster) verantwortlich sind, sowie für die „delayed emission of single electrons“ von P. W. DAVISON²⁾.

Über eine mögliche Form eines infrarotempfindlichen Vervielfachers

VON W. BAUMGARTNER UND N. SCHÄETZLI (ETH., Zürich).

Ein Überblick über die kommerziell üblichen Typen von Vervielfacher-Photokathoden zeigt, dass einzig die Cs—Sb-Kathode vertreten ist, dagegen die Cs₂O-Schichten nicht verwendet werden. Das hat unter anderem folgende zwei Gründe:

1. Entsprechend der Grenzwellenlänge von $1,2 \mu$ ist der Dunkelstrom der Cs₂O-Zelle sehr gross, ca. 10^{-12} A/cm².

2. Ein Übertreten von Cs in das mit Sauerstoff beladene Dynodensystem während der Formierung ist kaum zu vermeiden und führt zur Ausbildung lichtempfindlicher Cs₂O-Schichten auf den Prallplatten. Dies wirkt sich in instabilen Eigenschaften des Multipliers aus. Auch widersprechen sich die optimalen Formierungsbedin-

¹⁾ N. S. KHEBNIKOV und A. E. MELAMID, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **63**, 694 (1948).

²⁾ P. W. DAVISON, Nucleonics **10**, 33, März 1952.

gungen der Photokathode und des Dynodensystemes. Es liegt deshalb nahe, eine Frequenztransformation des einfallenden Lichtes in Richtung kürzerer Wellenlängen vorzunehmen und damit besser beherrschbare Verhältnisse zu erreichen. Ein solcher Transformator ist vorhanden in Gestalt der durch Infrarot-Stimulation ausleuchtbaren zweikomponentigen Infrarot-Phosphore¹⁾. Eine Photokathode, die für das grüne Stimulationslicht eines Ce-Sm-Phosphors, aber nicht oder nur wenig für das Nachleuchten des Sm emp-

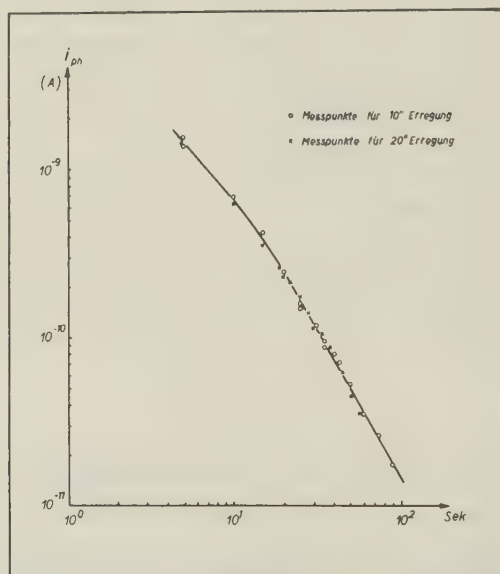


Fig. 1.

findlich ist, gestattet, das durch Stimulation gelieferte Licht bevorzugt festzustellen. Ein geeigneter Typ, der sich mit guter Empfindlichkeit herstellen lässt, ist Li—Sb.

Bis jetzt ist folgender Aufbau geprüft worden: Auf die Aussen-seite der Glaswandung der Photozelle (Li—Sb) wird der Phosphor aufgebracht in einer Schichtdicke von ca. 0,1 mm. Erregt und stimuliert wird von der der Photokathode abgewandten Seite. Diese Art hat den Vorteil einer festen Verbindung Phosphor-Kathode. Dagegen ist die optische Kopplung durch Streuung und

¹⁾ F. URBACH, D. PEARLMAN, H. HEMMENDINGER, J. Opt. Soc. **36**, 372 (1946); P. BRAUER, Zt. f. Natf. **1**, 70 (1946).

Absorption des Phosphormaterials beeinträchtigt. An solcher-massen angeordneten Schichten wurden folgende, zur Beurteilung der Möglichkeiten nötige Messungen durchgeführt:

a) Abklingen des Sm-Leuchtens.

b) Bestimmung des Abfalls der Stimulationsfähigkeit im Dunkeln und bei Beleuchtung mit Infrarot.

c) Spektrale Verteilung der Empfindlichkeit.

d) Auswirkung des durch die Zimmertemperatur bewirkten „Ausheizens“ auf den Dunkelstrom des Multipliers.

a), b) und c) wurden mit Li—Sb-Photozellen, d) am Vervielfacher direkt ausgemessen.

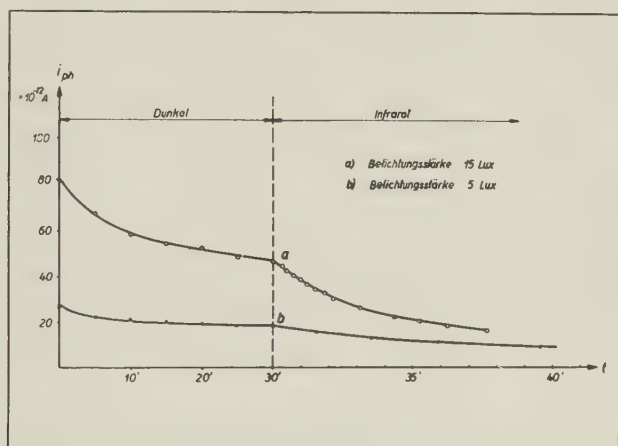


Fig. 2.

Ad a: Erregt wurde mit Quecksilberlampe während 10 Sek. und 20 Sek., beobachtet nach weiteren 100 Sek. Das Ergebnis ist in Figur 1 aufgetragen.

Bei einer Verstärkung von 10^8 und Dunkelstrom von 10^{-6} A würde danach der durch Sm-Leuchten erzeugte Photostrom nach 8 Std. auf den Betrag des Dunkelstroms abgefallen sein.

Ad b: Der Phosphor wird während 20 Sek. erregt. Dann erfolgt mit einer Infrarotquelle (Weisslichthelligkeit z. B. 15 Lux) alle 5 Min. eine kurze Stimulation, und der Photostrom wird bestimmt. 30 Min. nach Erregung wird dann dauernd stimuliert und der Abfall aufgenommen. Das Ergebnis zeigt Figur 2.

Weitere Messungen haben ergeben, dass nach Verlauf von 3 Std. nach Erregung die Stimulationsfähigkeit etwa noch $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{3}$ ausmacht und sich später im Verlauf von 1 Std. nicht merklich ändert.

Ad c: Der Phosphor wird vor jeder Einzelmessung während 20 Sek. erregt. Nach weitem 100 Sek. erfolgt Ausmessung mittels Monochromator und Thermoelement. Zuzufolge linearer Abhängigkeit der Helligkeit von der einfallenden Infrarotenergie¹⁾ ist Umrechnung auf Clb/Erg direkt möglich. (Fig. 3.) Der links ansteigende Ast stammt natürlich von der Li—Sb-Kathode.

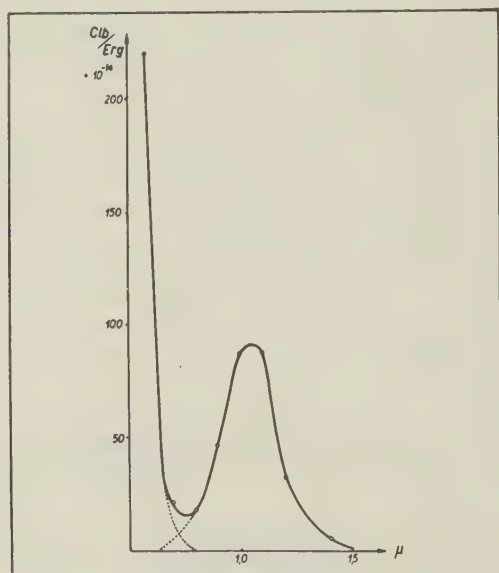


Fig. 3.

Ad d: Der auf Li—Sb-Vervielfacher aufgebrauchte Phosphor wurde erregt und dann im Dunkeln belassen. Nach 3 Tagen betrug der Dunkelstrom bei Verstärkung 10^8 $1 \mu\text{A}$ gegenüber $0,05 \mu\text{A}$ ohne Phosphorbelag.

Folgerungen für einen Standard Vervielfacher mit Verstärkung 10^8 und Dunkelstrom 10^{-6} A: Das Sm-Nachleuchten liefert 8 Std. nach Erregung noch $1 \mu\text{A}$ Dunkelstrom. Eine entsprechende Frist muss also bis zur Verwendung zu Messzwecken eingehalten werden. Für Weisslichthelligkeit von 1 Lux liefert die Kathode mit UG 6-

¹⁾ F. URBACH, H. HEMMENDINGER, D. PEARLMAN in „Solid luminescent materials“, New York 1948, S. 279.

Filter 2 mm $3,7 \times 10^{-12}$ A, bei einer Zellenfläche von 2 cm². Der Ausgangstrom des Vervielfachers wäre also 370 μ A. Nach ELLICKSON¹⁾ ist der Abfall der stimulierten Helligkeit durch ein Gesetz der Form:

$$B(t) = B_0 (H \times t)$$

erfassbar, wo B_0 = Anfangshelligkeit und H = Belichtungsstärke des Infrarot. Für 15 Lux ist die Halbwertszeit 4 Min., also bei 1 Lux gerade 1 Std. Der Output des Multipliers würde also innert 1 Std. von 370 μ A auf 185 μ A abfallen. Aus entsprechenden Überlegungen lassen sich die Verhältnisse in Spezialfällen leicht übersehen.

Vergleich mit Cs₂O: Das Empfindlichkeitsmaximum des Phosphor liegt nach Kurve bei 1,05 μ . Sein Wert beläuft sich auf $8,7 \cdot 10^{-13}$ Clb/Erg. Der entsprechende Wert für Cs₂O ist $5 \cdot 10^{-11}$ Clb/Erg, also ein Unterschied um den Faktor 57. Nochmals einen Faktor 50 ergibt das Verhältnis der Empfindlichkeiten von Li—Sb im blauen Licht und Cs₂O bei 1 μ . Das bedeutet, dass eine Messung von nicht scharf gefiltertem Infrarotlicht, auch mit sehr schwachem Blaulichtanteil, zu völlig falschen Resultaten führen kann. Etwas besser scheint es mit dem Dunkelstrom bestellt zu sein. An der 1. Dynode des Standardvervielfachers würde er 10^{-14} A betragen gegenüber 10^{-11} A bei flächengleicher Cs₂O-Kathode. Inwieweit die gewählte Schichtanordnung durch ihre ungünstige optische Kopplung die angegebenen Werte bestimmt, sollen weitere Versuche aufklären.

Sur la liaison entre les effets magnétogalvaniques transversaux et la résistivité

par A. L. PERRIER (Lausanne).

I. Des publications antérieures (dès 1927) de l'auteur ont montré entre autres propriétés générales des phénomènes magnétogalvaniques et magnétothermoélectriques que leurs manifestations transversales et longitudinales sont étroitement liées, *indépendamment même de tout mécanisme microphysique précis*²⁾. Des expériences

¹⁾ R. T. ELLICKSON, J. Opt. Soc. **36**, 264 (1946); R. T. ELLICKSON, W. L. PARKER, Phys. Rev. **70**, 290 (1946).

²⁾ A. PERRIER, Grandeurs et formules théoriques nouvelles... et Interprétation unitaire... Helv. Phys. Acta **3** (1930), pp. 347 et 400.

exécutées depuis lors ont apporté des appuis significatifs à ces idées théoriques¹⁾.

On précise ici des conséquences faisant ressortir le contenu physique des formules établies et des aspects divers que les phénomènes peuvent affecter selon les paramètres introduits pour leur représentation. Les propositions de cette note sont limitées au seul effet Hall isothermique.

II. Prenant en considération les ordres de grandeur des effets, les formules établies montrent que les mesures de magnétorésistance ne sont *pratiquement pas influencées par le pouvoir rotationnel* dans les conducteurs métalliques, à l'exception cependant de ceux du type bismuth. Ce qui suit s'applique seulement à l'influence inverse, celle de la *conductivité sur les effets transversaux*.

III. Pour la description tout à fait générale de l'effet Hall, indépendante des procédés de mesures, l'auteur le considère toujours localement, c'est-à-dire à l'aide des vecteurs champ électrique \vec{E} et densité de courant \vec{J} . En milieu isotrope et en présence d'un champ \vec{H} normal à \vec{E} et \vec{J} , ces deux derniers prennent des directions différentes formant entre elles l'angle φ (rotation magnétogalvanique); les directions de E et J sont prises respectivement comme axes ox' et ox de deux systèmes rectangulaires; on trace dans ce cadre un diagramme «caractéristique» à l'aide duquel on définit les paramètres

$$\varrho_{y'} = E_{y'}/J \quad (1)$$

$$\gamma_y = J_y/E \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho_{y'}}{\varrho_0 + \delta \varrho_{x'}} = \frac{\gamma_y}{\gamma_0 + \delta \gamma_x} \quad (3)$$

$\varrho_{y'} = RH$ où R est la constante traditionnelle de HALL, γ_y la *conductivité magnétogalvanique transversale* introduite antérieurement par l'auteur, $\delta \varrho$ et $\delta \gamma$ symbolisent les modifications respectives de la résistivité et de la conductivité provoquées par la présence du champ magnétique.

Ces paramètres sont liés par des dépendances diverses dont voici deux exemples principaux:

$$\gamma = \frac{\varrho_{y'}}{(\varrho_0 + \delta \varrho)^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varrho_0 + \delta \varrho} \quad \varrho_{y'} = \frac{\gamma_y}{(\gamma_0 + \delta \gamma)^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\gamma_0 + \delta \gamma}.$$

¹⁾ J. P. JAN, Nouvelle représentation... Helv. Phys. Acta **22** (1949), p. 581; Effet Hall et température... Helv. Phys. Acta (1952), à paraître.

L'effet HALL peut être représenté à volonté par l'un ou l'autre de ces trois paramètres, mais sa description change souvent complètement d'aspect selon lequel on choisit; voici quelques exemples.

IV. a) Conditions habituelles: température constante, ϱ variant peu avec le champ. Alors aussi bien ϱ_y , que γ_y et $\operatorname{tg} \varphi$ varient dans le même sens avec H , voire toutes proportionnellement.

b) H constant, t variable, ϱ_0 varie fortement, elle tend en particulier vers 0 aux très basses températures; l'expérience a montré que R varie peu et tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre; alors la résistivité devient déterminante, et $\operatorname{tg} \varphi$ varie sensiblement comme $1/\varrho_0$ et γ_y comme $1/\varrho_0^2$; les trois paramètres donnent ainsi trois descriptions différentes pour l'effet HALL.

c) On examinerait semblablement les divergences de variations dues aux fortes modifications de ϱ en fonction du champ ou de l'aimantation à t constante.

On vérifiera la validité des règles générales que voici:

Lorsque le pouvoir rotationnel (φ) varie fortement et la résistivité faiblement, le coefficient de HALL (R) et la conductivité transversale γ_y varient dans le même sens, voire suivant une loi de proportionnalité.

Lorsque, au contraire, la résistivité manifeste une variabilité accentuée, son action peut l'emporter sur celle de la rotation, et l'un des trois paramètres qui expriment cette dernière peut varier en sens inverse des deux autres; de plus, les trois lois sont quantitativement d'allures nettement différentes.

V. Milieux ferromagnétiques. — Les propriétés expérimentales de ces milieux sont à première vue étranges, en tout cas complexes; elles s'éclairent cependant de la manière la plus nette à l'aide des vues théoriques rappelées et offrent du même coup une illustration remarquable aux règles précédentes: la température s'abaissant à partir du point de Curie, la *rotation spontanée* s'élève tout d'abord selon une pente très abrupte ($d\varphi/dt$ part en principe de l' ∞) en partant de 0, tandis que la résistivité diminue, mais moins fortement et à partir d'une valeur finie; l'action de φ est tout d'abord prépondérante et les paramètres représentatifs accusent tous trois une *croissance rapide* de l'effet HALL; ensuite, la variation de φ s'atténuant progressivement, cependant que la résistivité continue à baisser suivant une pente sensiblement régulière, son action finit par l'emporter, R passe alors par un maximum accentué, puis s'abaisse de plus en plus; γ au contraire s'élève continuellement suivant une loi d'allure hyperbolique.

Le principe de cette interprétation a été signalé déjà dans les publications précitées.

Superconducteurs. — Une des particularités si nombreuses et caractéristiques de cet état, l'absence totale de manifestations magnétogalvaniques, a été expliquée de diverses façons; j'en ai esquissé brièvement une autrefois, laquelle se base sur la remarque que l'existence d'un champ électrique dans un milieu superconducteur est contradictoire à la notion même de superconduction. Mais cela implique seulement l'impossibilité d'une différence de potentiel transversale, différence de potentiel qui est le fondement de la mesure traditionnelle de l'effet HALL. Mais cela n'implique pas du tout l'impossibilité d'une rotation φ des lignes de courant qui pourrait être décelée expérimentalement (formule (3) ci-dessus); ce, naturellement, si l'extinction du champ magnétique (MEISSNER) n'est pas elle-même totale dans la nappe pelliculaire de supercourants.

La presque totalité des expériences effectuées jusqu'ici sur l'effet HALL ne permettent pas des affirmations pertinentes sur ses caractères et son mécanisme en raison du fait qu'il y était mesuré isolément. Car il convient de répéter avec insistance ce résultat essentiel des recherches ici rappelées que la connaissance complète de l'effet transversal suppose celle de la résistivité, obtenue sur les mêmes échantillons et dans des conditions identiques.

Austauschreaktionen von ^{60}Co zwischen festen Kobaltverbindungen und Lösung

von W. BUSER, W. FEITKNECHT und U. IMOBERSTEG

(Institut für anorganische, analytische und physikalische Chemie, Universität Bern).

Über Austauschreaktionen und Ionenwanderung in Festkörpern bei höhern Temperaturen ist viel gearbeitet worden. Bei gewöhnlicher Temperatur sind diese Vorgänge noch wenig untersucht. Das Tatsachenmaterial, das in diesen Versuchen zusammengetragen wurde, gibt kein einheitliches Bild.

So wurde einesteils ein rascher und vollständiger Austausch zwischen fester Phase und Lösung gefunden, der auf Ionenwanderung in der Festkörperverbindung¹⁾²⁾ (Ag-Halogenide) oder auf Umkristallisation³⁾ (schwerlösliche Bleisalze) beruhen kann. Z. T. wird zwischen den beiden Vorgängen nicht unterschieden⁴⁾⁵⁾. Andernteils wurde festgestellt, dass viele Verbindungen sich nur

oberflächlich an Austauschreaktionen beteiligen⁶⁾, wobei intakte Netzebenen u. U. nicht an der Reaktion teilnehmen⁷⁾.

Es ist zu erwarten, dass bei Austauschreaktionen zwischen Festkörperverbindungen und Lösungen dem Gitterbau ausschlaggebende Bedeutung zukommt. Zur Abklärung dieser Zusammenhänge wurden Austauschversuche mit Kobaltverbindungen ausgeführt, wobei Stoffe mit Strukturen von bekanntem Gitterbau und verschiedenem Ordnungsgrad herangezogen wurden. Die benützten Verbindungen sind in der Tabelle aufgeführt.

Tabelle.

Bezeichnung	Konstitutionsformel	Struktur	Lit.
A Rotes Co-Hydroxyd	Co(OH)_2	Einfachschichten-gitter C_6 -Typ	⁸⁾
B Rotes basisches Co-Chlorid	$\text{Co(OH)}_{1,15}\text{Cl}_{0,5}$	Raumgitter ähnlich Atakamittyp	⁹⁾
C Grünes basisches Co-Chlorid	$4 \text{ Co(OH)}_2 \langle \overline{\text{---}} \rangle \text{Co(OH)Cl}$	Doppelschichten-gitter, ungeordnete Zwischenschicht	¹⁰⁾
D Grünes basisches Co-Nitrat	$4 \text{ Co(OH)}_2 \langle \overline{\text{---}} \rangle \text{Co}_{1,25}\text{OH(NO}_3\text{)}_{1,5}$	Doppelschichten-gitter, ungeordnete Zwischenschicht	¹¹⁾
E Co(II)-hexacyanoferrat(II)	$\text{CoII}[\text{CoIIFeII(CN)}_6]$	Raumgitter mit Gitterlücken	¹²⁾

Die Festkörperverbindungen wurden bei Zimmertemperatur in Kobaltlösung aufgeschlämmt. Bei einem Teil der Versuche wurde der Austausch aus der Lösung in den Festkörper gemessen, indem bei Versuchsbeginn aktives ^{60}Co zu der Lösung zugefügt wurde. Bei einem andern Teil wurde der Austausch aus dem Festkörper in die Lösung verfolgt, indem die feste Phase mit aktivem ^{60}Co präpariert wurde. Bei den sauerstoffempfindlichen Produkten wurden die Versuche in einer Stickstoffatmosphäre ausgeführt.

Die beiden Verbindungen A und B, die ein völlig geordnetes Kristallgitter aufweisen, zeigen nur einen geringen Austausch, der auf die Oberfläche beschränkt ist. Bei völlig stabilen Produkten ist die Reaktion nach wenigen Minuten bereits vollständig. Bei ungenügend gealterten Produkten schreitet der Austausch nach der raschen Anfangsreaktion noch langsam weiter, was auf Umkristallisationsvorgänge zurückzuführen ist.

Ganz anders verhalten sich die Verbindungen C und D mit Doppelschichtengitter. Hier sind zwischen gut geordneten Schichten von Kobalthydroxyd ungeordnete Schichten von basischem Salz eingelagert, was durch die Konstitutionsformeln in der Tabelle angedeutet ist. Innert ca. 60 Minuten findet ein völliger Austausch zwischen den ungeordneten Gitterbestandteilen und der Lösung statt. Die Kobaltionen in der Zwischenschicht sind beweglich und können offensichtlich leicht wandern. Der Austausch ist etwas grösser, als für die Zwischenschicht allein berechnet wird, weil die Reaktion an der Oberfläche mit zu berücksichtigen ist. Bei stabilen Produkten findet eine Austauschreaktion mit dem gut geordneten Hauptgitter praktisch nicht statt, bei ungenügend gealterten ist ein grösserer Austausch festzustellen, was wieder auf Umkristallisationsvorgänge zurückgeführt wird.

Ein ähnliches Verhalten wie die basischen Kobaltsalze zeigt die Verbindung E, die eine andere Kristallstruktur besitzt. Hier liegt ein kubisches Raumgitter aus Co^{++} und $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ Ionen vor, das beträchtliche Hohlräume sowie negative Überschussladungen aufweist, $[\text{CoFe}(\text{CN})_6]^-$. In diesen Hohlräumen befinden sich, statistisch verteilt, zusätzliche Kationen zur Kompensation der negativen Überschussladungen des Hauptgitters. Die Austauschversuche zeigen, dass nur der Kobaltanteil im Zwischengitter zu einer raschen Austauschreaktion mit der Lösung befähigt ist. Auch hier ist die rasche Reaktion nach ca. 60 Minuten praktisch beendet. Die Kobaltionen im Zwischengitter weisen eine ähnliche Beweglichkeit auf, wie die Kobaltionen in den ungeordneten Zwischenschichten der basischen Salze. Die rasche Reaktion am Anfang wird durch eine langsame abgelöst, bei der auch ein Austausch mit dem Hauptgitter erfolgt.

Diese Versuche zeigen, dass zwischen Gitterbau und Austauschreaktion quantitative Beziehungen bestehen, wenn einheitliche Verbindungen von bekannter Struktur und Stabilität herangezogen werden. Ein Austausch zwischen dem Kristallinnern und der Lösung, d. h. eine rasche Ionenwanderung im Kristallgitter, konnte nur bei den Stoffen mit ungeordneten Kristallbezirken festgestellt werden.

In einem Vorversuch wurde festgestellt, dass die grossen Unterschiede in der Austauschgeschwindigkeit geordneter und ungeordneter Gitterbezirke in Verbindungen vom Typus C, D und E zur Präparation von Isotopen mit hoher spezifischer Aktivität herangezogen werden können, worüber an anderer Stelle berichtet wird.

Wir verdanken die Mittel zur Ausführung dieser Arbeit der Schweiz. Studienkommission für Atomenergie.

Literatur.

- ¹⁾ A. LANGER, J. Chem. Phys. **10**, 321 (1942).
- ²⁾ K. E. ZIMENS, Arkiv Kemi Mineral. Geol. **A 23**, No. 16 (1946).
- ³⁾ I. KOLTHOFF und F. EGGERTSEN, Am. Soc. **63**, 1412 (1941).
- ⁴⁾ B. PULLMAN et M. HAISSINSKY, J. Phys. et Rad. **8**, 36 (1947).
- ⁵⁾ P. JORDAN, Helv. Chim. Acta **34**, 699 (1951).
- ⁶⁾ F. PANETH und W. VORWERK, Z. physik. Ch. **101**, 445 (1922).
- ⁷⁾ K. E. ZIMENS, Arkiv Kemi Mineral. Geol. **A 21**, Nr. 17 (1946).
- ⁸⁾ W. LOTMAR und W. FEITKNECHT, Z. Kristallogr. (Abt. A) **93**, 368 (1936).
- ⁹⁾ W. FEITKNECHT, Helv. Chim. Acta **19**, 467 (1936); W. FEITKNECHT und K. MAGET, Helv. Chim. Acta **32**, 1639 (1949).
- ¹⁰⁾ W. FEITKNECHT, Helv. Chim. Acta **20**, 177 (1937).
- ¹¹⁾ W. FEITKNECHT und G. FISCHER, Helv. Chim. Acta **18**, 555 (1935).
- ¹²⁾ Über die Struktur verwandter Verbindungen vgl. R. RIGAMONTI, Gazz. Chim. Ital. **67**, 146 (1937); **68**, 809 (1938).

Ein 30 sec Isomer Au^{195*}

von O. HUBER, R. JOLY*), P. SCHERRER und N. F. VERSTER**) (ETH., Zürich).

In früheren Arbeiten^{1) 2)} haben wir die tiefsten angeregten Niveaus der Kerne $_{78}\text{Pt}^{195}_{117}$, $_{80}\text{Hg}^{197}_{117}$ und $_{80}\text{Hg}^{199}_{119}$ untersucht und nachgewiesen, dass sich die Resultate gut mit dem Schalenmodell interpretieren lassen. Es ist interessant, die Liste dieser $g-u$ -Kerne um Kerne, die benachbarte ungerade Neutronenzahlen aufweisen, zu erweitern, um daraus Rückschlüsse auf das Schalenmodell zu ziehen. Solche Kerne sind das kürzlich untersuchte $_{76}\text{Os}^{191}_{115}$ (14h und 15d)³⁾, das $_{80}\text{Hg}^{193}_{113}$ (14,5 h und 29 h)⁴⁾ und das $_{80}\text{Hg}^{195}_{115}$ (38 h)⁴⁾. Hg^{195} wird von uns gegenwärtig mit Hilfe spektrometrischer Koinzidenzmessungen untersucht. Es zerfällt durch K -Einfang in $_{79}\text{Au}^{195}_{116}$. Dabei gelingt es einige Niveaus dieses $u-g$ Folgekerns zu bestimmen und diese mit den angeregten Zuständen von $_{77}\text{Ir}^{191}_{114}$ ³⁾, $_{79}\text{Au}^{197}_{118}$ ⁶⁾ und $_{81}\text{Tl}^{203}_{122}$ ⁵⁾ zu vergleichen. Nach dem Einteilchenmodell könnte zwischen den Z -Werten von $50 \leq Z \leq 82$ für $u-g$ -Kerne Kernisomerie auftreten, da in dieser Schale, speziell für das $h_{11/2}$ Niveau grosse Spindifferenzen mit benachbarten Niveaus auftreten. Tatsächlich ist aber nur ein $u-g$ -Kern bekannt, bei dem das $h_{11/2}$ Niveau für die Isomerie verantwortlich ist, nämlich das $_{79}\text{Au}^{197}_{118}$.

*) Laboratoire Central des Poudres, Paris.

**) Instituut voor Kernfysisch Onderzoek, Amsterdam.

(7sec), welches aus Hg^{197} durch K -Einfang entsteht¹⁾. Wir haben daher geprüft, ob durch den Zerfall von Hg^{195} im Folgekern Au^{195} ebenfalls ein Isomer angeregt wird. Wenn man die Termschemen der oben erwähnten u - g -Kerne miteinander vergleicht, so ergibt sich für ein mutmassliches Isomer Au^{195*} eine Halbwertszeit, die grösser ist als diejenige des 7sec Au^{197*} Isomers.

Der radioaktive Kern Hg^{195} entsteht durch $d-4n$ -Prozess aus dem Reinelement Au^{197} . Die Schwellenenergie der Reaktion beträgt ca. 25 MeV⁴⁾. Wir sind Prof. Dr. C. J. BAKKER zu Dank verpflichtet, dass in seinem Institut für uns Hg^{195} hergestellt wurde. Das gesuchte Isomer Au^{195*} konnten wir daraus tatsächlich in folgender Weise abtrennen: da die Muttersubstanz Quecksilber ist, lässt sie sich sehr einfach und schnell im Vakuum verdampfen und zur weiteren Verwendung wieder auf einem Goldplättchen niederschlagen. Das aus dem Hg^{195} entstehende Au^{195*} bleibt quantitativ auf dem Goldträger zurück. Seine Aktivität wurde mit einem β -Zählrohr (1 mgr/cm²) ausgemessen und die Halbwertszeit zu 30 sec bestimmt.

Vorläufige Messungen, die später zusammen mit dem Zerfall der Hg^{195} -Isomere genauer diskutiert werden, zeigen, dass der Grundzustand des Hg^{195} eine Halbwertszeit von $9,5 \pm 0,5$ h besitzt, während die bekannte Periode von 38 h⁴⁾ zu einem angeregten Niveau gehört. Das gesamte Konversionselektronenspektrum des Hg^{195} ist in Fig. 1 dargestellt. Darin enthalten sind die wohlbekannten Linien¹⁾ des Zerfalles von Hg^{197} , da dieses Isotop durch $d-2n$ -Prozess ebenfalls aus Au^{197} entsteht. Das Elektronenspektrum des Hg^{195} lässt folgende Interpretation zu: Zwei γ -Strahlen von 122 keV (M_4) und 36 keV (M_1) sind in Kaskade und konvertiert in $\text{Hg} (i_{13/2} - f_{5/2} - p_{3/2})$. Ihre Halbwertszeit beträgt 40 h. Von zwei weiteren γ -Übergängen mit derselben Periode und Energien von 56 keV und 259 keV wurden L und M , resp. K -, L - und M -Konversionslinien gefunden. Aus dem zeitlichen Verlauf der Abklingkurve der L - und M -Konversionslinien einer zugehörigen γ -Strahlung von 61 keV errechnet sich für den Grundzustand von $\text{Hg}^{195}(p_{3/2})$ eine Halbwertszeit von $9,5 \pm 0,5$ h. Denselben zeitlichen Verlauf zeigt auch die Linie bei 99 keV Energie.

Um zu entscheiden, welche dieser erwähnten Linien zum isomeren Übergang gehören, haben wir das abgetrennte Isomer im Spektrometer ausgemessen. Wegen der kurzen Halbwertszeit von 30 sec konnte bei einer Messung nur immer ein Energiewert eingestellt werden und nach einer Messzeit von einer Minute noch eine Linie als Monitor gemessen werden. Als Resultat dieser Untersuchungen haben wir gefunden, dass die Konversionslinien des 56 keV und des

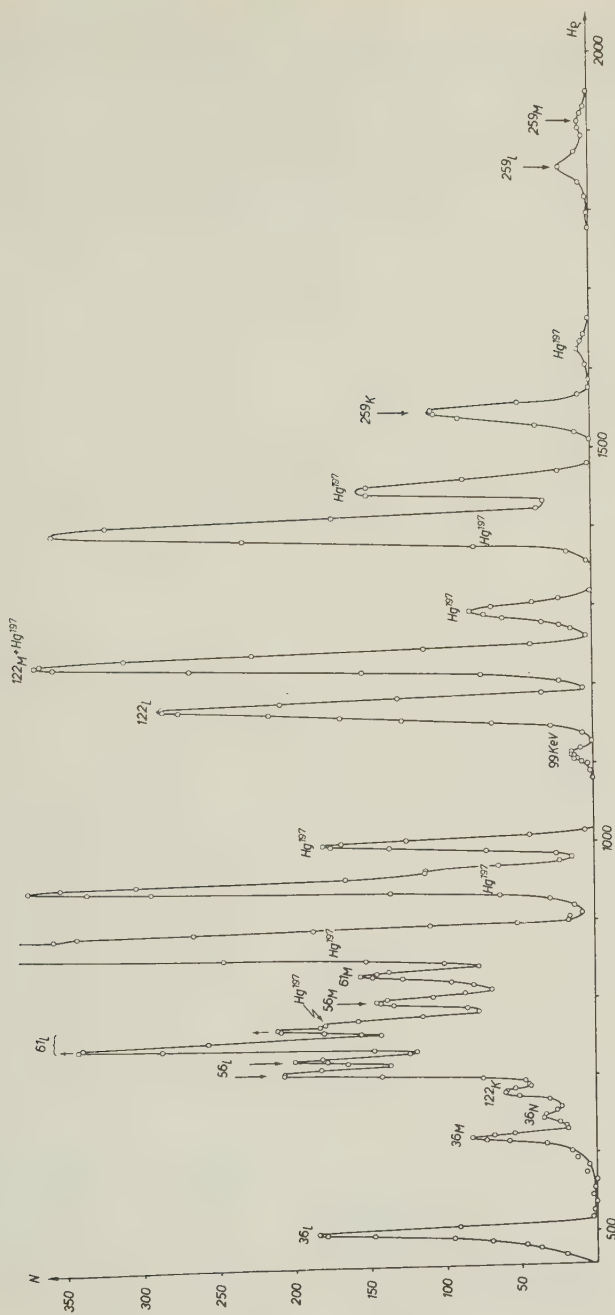


Fig. 1.

Konversionselektronenspektrum von Hg^{195} und (Hg^{197}) . Die mit \downarrow bezeichneten Linien wurden ebenfalls am abgetrennten Isomer Au^{195*} im Spektrometer nachgewiesen.

259 keV Überganges zum Isomer Au^{195*} von 30 sec gehören. Da sie einheitliche Halbwertszeit haben, zerfallen sie ebenfalls in Kaskade. Die γ -Linie von 259 keV wurde ausserdem auch in einem γ -Impulsspektrographen am abgetrennten Isomer nachgewiesen.

Die ausführliche Arbeit des Zerfalles der Hg^{195} -Isomere und der Spinzuordnungen erscheint später in den *Helv. Phys. Acta*. P.-D. Dr. K. BLEULER und Dr. A. DE SHALIT sind wir für wertvolle Diskussionen zu Dank verpflichtet, ebenso Dr. D. MAEDER für die Messungen im Impulsspektrographen.

Literatur.

- 1) O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER, A. de SHALIT und W. ZÜNTLI, *Helv. Phys. Acta* **24**, 127 (1951).
- 2) A. DE SHALIT, O. HUBER und H. SCHNEIDER, *Helv. Phys. Acta* **25**, 279 (1952).
- 3) J. B. SWAN and R. D. HILL (unveröffentlichte Mitteilung).
- 4) J. H. MOON and A. L. THOMPSON, *Phys. Rev.* **83**, 892 (1951).
- 5) H. SLÄTIS, K. SIEGBAHN, *Phys. Rev.* **75**, 318 (1949).
- 6) M. GOLDBABER and R. D. HILL, *Nuclear Isomerism*. (to be published in *Rev. Mod. Phys.*)

Werte des Kernspins nach dem Schalenmodell

von H. J. MAEHLY und P. STÄHELIN (ETH., Zürich).

Nach dem Schalenmodell betrachtet man als nullte Näherung einzelne Nukleonen, die sich mit starker Spin-Bahn-Kopplung in einem Zentralfeld bewegen. Auf diese Weise lassen sich die Eigenschaften der Kerne im Grundzustand weitgehend beschreiben. Beim Versuch, auch angeregte Zustände nach dem Schalenmodell zu behandeln, hat man jedoch erkannt, dass nicht allen beobachteten Anregungsstufen eine Änderung der Konfiguration (d. h. des Besetzungszustandes einzelner Schalen) entsprechen kann. Schon die Grundkonfiguration enthält im allgemeinen neben dem Grundzustand noch eine ganze Anzahl weiterer Terme, deren Zustandekommen man sich etwa als eine verschiedene gegenseitige Orientierung mehrerer Teilchen in einer nur zum Teil gefüllten Schale veranschaulichen kann.

Die folgende Tabelle gibt für jeden Wert des Gesamtspins J darüber Auskunft, wieviele verschiedene Zustände möglich sind, wenn sich in einer äusseren Schale n gleiche Nukleonen aufhalten. Die Schale ist dabei wegen der starken Spin-Bahn-Koppelung durch die Summe j von Spin- und Bahnmoment des einzelnen Nukleons genügend charakterisiert.

Die Werte bis zu $j = 7/2$ konnten dem Buch von CONDON und

SHORTLEY über die Hüllenspektren entnommen werden. Für grössere j wurden sie mit Hilfe einer Rekursionsformel

$$A_s^{n,j} = \sum_{z=n}^{2j+1} A_{s-z}^{n-1, j-\frac{1}{2}}$$

berechnet. Dabei bedeutet $A_s^{n,j}$ die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n ganzen Zahlen ($z_1, z_2 \dots z_n$) aus dem Bereich $1 \leq z_i \leq 2j+1$, wobei die Nebenbedingung $\sum z_i = s$ zu erfüllen ist.

Anzahl der Terme mit Gesamtspin J in der Konfiguration $(j)^n$.

j	n	$J = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	s
$3/2$	2	1	.	1	2
$5/2$	2;4	1	.	1	.	1	3
$7/2$	2;6	1	.	1	.	1	.	1	4
$7/2$	4	1	.	2	.	2	1	1	.	1	8
$9/2$	2;8	1	.	1	.	1	.	1	.	1	5
$9/2$	4;6	2	.	2	1	3	1	3	1	2	1	1	.	1	18
$11/2$	2;10	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	6
$11/2$	4;8	2	.	3	1	4	2	4	2	4	2	3	1	2	1	1	.	1	33
$11/2$	6	3	.	4	3	6	3	7	4	6	4	5	2	4	2	2	1	1	.	1	58
$13/2$	2;12	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	7
$13/2$	4;10	2	.	4	1	5	3	5	3	6	3	5	3	4	2	3	1	2	1	1	.	1	55
$13/2$	6;8	4	1	7	5	11	7	13	9	13	10	12	8	11	7	8	5	6	3	4	2	2	1	1	.	1	151

a) gerade Nukleonenzahl (ganzzahliger Kernspin).

j	n	$2J = 1$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	s
$3/2$	1;3	.	1	1
$5/2$	1;5	.	.	1	1
$5/2$	3	.	1	1	.	1	3
$7/2$	1;7	.	.	.	1	1
$7/2$	3;5	.	1	1	1	1	.	1	.	1	6
$9/2$	1;9	1	1
$9/2$	3;7	.	1	1	1	2	1	1	1	1	.	1	10
$9/2$	5	1	1	2	2	3	2	2	2	1	1	.	1	20
$11/2$	1;11	1	1
$11/2$	3;9	.	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	.	1	15
$11/2$	5;7	1	2	3	4	4	5	4	5	4	4	3	3	2	2	1	1	.	1	.	1	49
$13/2$	1;13	1	1
$13/2$	3;11	.	1	1	1	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	.	1	21
$13/2$	5;9	1	3	5	5	7	7	8	8	8	7	8	6	6	5	5	3	3	2	2	1	1	.	1	.	.	102
$13/2$	7	3	4	7	9	10	11	13	12	13	12	12	10	11	8	8	6	5	4	4	2	2	1	1	.	1	169

b) ungerade Nukleonenzahl (halbzahliger Kernspin).

Zum Nachweis von polarisierten Neutronen aus der (d, d)-Reaktion

von E. BAUMGARTNER und P. HUBER (Basel).

Polarisierte schnelle Neutronen sind offensichtlich für die Untersuchung der spinabhängigen Wechselwirkungen ein ausgezeichnetes Hilfsmittel. SCHWINGER¹⁾2) hat gezeigt, wie es möglich ist, schnelle polarisierte Neutronen und Protonen herzustellen. WOLFENSTEIN³⁾ wies in einer Notiz darauf hin, dass die (d, d)-Reaktion eine Quelle für polarisierte Neutronen sein könnte. Für Neutronenemission unter 45° im Schwerpunktsystem wird der Polarisationsgrad am grössten. Die Polarisationsrichtung steht senkrecht auf der Reaktionsebene. Die Richtung des Neutronenspins kann nicht angegeben werden.

Eine Methode um Spinrichtung und Polarisationsgrad zu bestimmen, liefert die Streuung der Neutronen an Kohlenstoff. Für den Polarisationsgrad P der Neutronen wird der differentielle Streuquerschnitt

$$\sigma = |a|^2 + |b|^2 - 2 \sin \varphi \cdot \zeta(\bar{a}b) \cdot P.$$

Es bedeuten

$$a = \sum_l \frac{Y_l^0}{\sqrt{2l+1}} \{ l e^{i\delta_{l-1/2}} \sin \delta_{l-1/2} + (l+1) e^{i\delta_{l+1/2}} \sin \delta_{l+1/2} \}$$

$$b = \sum_l \sqrt{\frac{l(l+1)}{2l+1}} Y_l^1 \{ e^{i(\delta_{l+1/2} + \delta_{l-1/2})} \sin(\delta_{l+1/2} - \delta_{l-1/2}) \}$$

Y_l^0 normierte Kugelfunktion 1. Art;

Y_l^1 normierte zugeordnete Kugelfunktion 1. Art;

φ Azimut der Streurichtung (Fig. 1);

Θ Streuwinkel (Fig. 1);

$\zeta(\bar{a}b)$ Imaginärteil von $\bar{a}b$;

P $\chi - \xi$;

χ Anzahl der Neutronen mit Spinrichtung in der +X-Achse;

ξ Anzahl der Neutronen mit Spinrichtung in -X;

Normierung $\chi + \xi = 1$.

Für partiell polarisierte Neutronen ist der Streuquerschnitt φ -abhängig. Da $\zeta(\bar{a}b)$ aus den gemessenen Streuphasen an Kohlenstoff⁴⁾ berechnet werden kann, lässt sich aus der φ -Abhängigkeit von σ sowohl Polarisationsrichtung als auch Polarisationsgrad P

¹⁾ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **60**, 681 (1946).

²⁾ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **73**, 407 (1948).

³⁾ L. WOLFENSTEIN, Phys. Rev. **75**, 342 (1949).

⁴⁾ P. HUBER, E. BALDINGER und R. BUDDE, Helv. Phys. Acta **25**, 444 (1952.)

ermitteln. Für die Bestimmung ist die Neutronenstreuung an Kohlenstoff für $\Theta = 90^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ bzw. 270° zu messen. Bezeichnen $\sigma_0 = |a|^2 + |b|^2$, den Streuquerschnitt für unpolarisierte Neutronen, $p = 2 \zeta(\bar{a} b)$, so ergibt sich für das Verhältnis der Streuintensitäten

$$\frac{J_{\varphi=90^\circ}}{J_{\varphi=270^\circ}} = \frac{\sigma_0 - pP}{\sigma_0 + pP}.$$

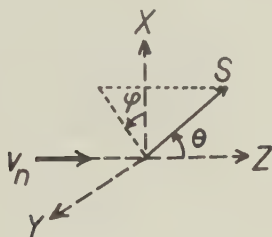


Fig. 1.

Koordinatensystem für die Streuung.

v_n = Geschwindigkeit der einfallenden Neutronen. S = Streurichtung.

$(J_{\varphi=90^\circ}/J_{\varphi=270^\circ})$ lässt sich experimentell bestimmen und σ_0/p kann aus einer früheren Arbeit¹⁾ berechnet werden. Für den Polarisationsgrad erhält man (Fig. 2)

$$P = \frac{\sigma_0 (1 - J_{\varphi=90^\circ}/J_{\varphi=270^\circ})}{p (1 + J_{\varphi=90^\circ}/J_{\varphi=270^\circ})}.$$

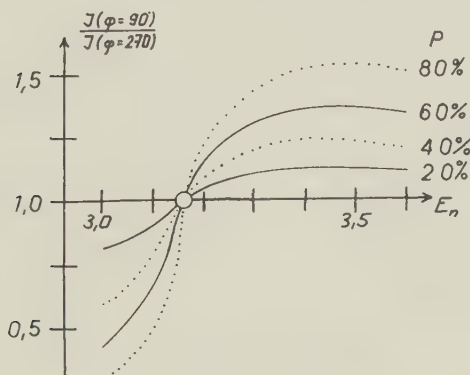


Fig. 2.

$J_{\varphi=90^\circ}/J_{\varphi=270^\circ}$ berechnet für verschiedenen Polarisationsgrad P .

¹⁾ P. HUBER, E. BALDINGER und R. BUDDE, Helv. Phys. Acta **25**, 444 (1952).

Die experimentelle Schwierigkeit der Messung besteht im Neutronen Untergrund. Unsere bisherigen Ergebnisse sind noch zu unsicher um den Polarisationsgrad angeben zu können. Als Monitor und für die Messung der gestreuten Neutronen benutzen wir HORNYAK¹⁾ Detektoren (Lucite und ZnS) und RCA 5819 Multiplier. Den Herren Dr. W. F. HORNYAK und Dr. E. ALBURGER danken wir für die Überlassung solcher Zähler.

¹⁾ W. F. HORNYAK, Rev. Scient. Instr. **23**, 264 (1952).

Bemerkung zur Polarisation der bei der D-D-Reaktion entstehenden Protonen und Neutronen

von **M. Fierz** (Basel).

(8. IX. 1952.)

Zusammenfassung: Die Schlüsse, die sich aus der Messung der Polarisation der bei der D-D-Reaktion entstehenden Teilchen ziehen lassen, werden diskutiert. Insbesondere wird untersucht, ob aus dem Verhalten der Polarisation als Funktion der Deuteron-Energie entschieden werden kann, ob Singulett-Triplett-Übergänge auftreten oder nicht.

Mehreren Autoren¹⁾ ist es kürzlich gelungen, die Polarisation der bei der D-D-Reaktion entstehenden Neutronen oder Protonen experimentell nachzuweisen.

Eine allgemeine Theorie dieser Kernreaktion, die auf wenigen, plausiblen Annahmen beruht, ist von BEIDUK, PRUETT und KONOPINSKI²⁾ entwickelt worden. Auf Grund ihrer Arbeit kann man Formeln für die Polarisationsverhältnisse ableiten, aus denen sich aber leider keine quantitativen Schlüsse ergeben, weil die Phasen der Wellenfunktionen nicht bestimmt werden können.

Gleichwohl sind gewisse allgemeine Folgerungen möglich, die eine experimentelle Prüfung der theoretischen Vorstellungen erlauben. Insbesondere soll hier diskutiert werden, wie man experimentell entscheiden kann, ob die Polarisation hauptsächlich durch die Tensorkraft bestimmt ist, oder ob andersartige Spin-Bahnkoppelungen eine wesentliche Rolle spielen. Im ersteren Falle würden nur Triplettzustände zu polarisierten Reaktionsprodukten führen, während die Singulettzustände keine Beiträge liefern.

Sei $\sigma(E, \vartheta) d\omega$ der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Neutrons bei der D-D-Reaktion. E ist die Energie der Deuteronen im Laborsystem, ϑ der Winkel des Neutronenimpulses gegen die Einfallsrichtung der Deuteronen im Schwerpunktsystem.

Dann schreiben wir für die Polarisation P der Neutronen

$$P(E, \vartheta) = \Pi(E, \vartheta)/\sigma(E, \vartheta). \quad (1)$$

¹⁾ H. J. LONGLY, R. N. LITTLE jun., and J. M. SLYE, Phys. Rev. **86**, 419 (1952); G. R. BISHOP, J. M. WESTHEAD, G. PRESTON, H. H. HALBAN, Nature **170**, 113 (1952); E. BAUMGARTNER und P. HUBER, Helv. Phys. Acta **25**, 626 (1952).

²⁾ F. M. BEIDUK, J. R. PRUETT und E. J. KONOPINSKI, Phys. Rev. **77**, 622 (1950).

Ist $\psi(\vartheta, \varphi)$ die Amplitude der das Neutron beschreibenden Kugelwelle, so ist

$$\Pi(E, \vartheta) = \psi^* \vec{\sigma}_N \psi.$$

$\vec{\sigma}_N$ sind die dem Neutron zugeordneten Spinmatrizen. Die Polarisation steht senkrecht auf der Reaktionsebene.

Elementare Symmetriebetrachtungen zeigen, dass Π die Form

$$\Pi(E, \vartheta) = \sum_n a_n(E) \sin 2n\vartheta \quad (2)$$

besitzen muss.

Wie BEIDUCK u. a. gezeigt haben, lässt sich die Energieabhängigkeit von $\sigma(\vartheta, E)$ befriedigend darstellen, wenn man annimmt, sie sei durch die Wahrscheinlichkeiten bestimmt, dass sich zwei Deuteronen, die das Bahnpulsmoment L besitzen, soweit nahe kommen, dass eine Reaktion eintreten kann. Diese Wahrscheinlichkeiten werden durch die Wirkungsquerschnitte σ_L beschrieben, die bei den genannten Autoren in Fig. 1 graphisch dargestellt sind.

Man findet, dass für Energien kleiner als 1 MeV, gemäss dieser Theorie, folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \Pi(E, \vartheta) = & \sigma_1(E) (a \sin 2\vartheta) + \sqrt{\sigma_0 \sigma_2} \cdot \alpha \sin 2\vartheta \\ & + \sigma_2(E) \beta \cdot \sin 2\vartheta (3 \cos^2 \vartheta - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Wenn die Polarisation durch die Tensorkraft bestimmt wird, verschwinden α und β^1).

Da $\sqrt{\sigma_0 \sigma_2}$ wie σ_1 variiert, so ist α experimentell nicht nachweisbar. Daher sollte untersucht werden, ob der Term $\sim \sigma_2$ vorhanden ist, was aber schwierig sein dürfte.

Falls die Singulett-Terme nichts zur Polarisation beitragen, dann sollte $\Pi(E, \vartheta)$ auch für 1 bis 2 MeV durch (3), mit $\alpha = \beta = 0$, dargestellt werden können und in der Gegend von 1,5 MeV ein Maximum aufweisen. Abweichungen von der Formel (3) sind durch Terme $\sim \sqrt{\sigma_1 \sigma_3}$ bestimmt, die neben $\sin 2\vartheta$ auch $\sin 4\vartheta$ enthalten, und die nicht besonders gross sein sollten.

Ein derartiges Verhalten von $\Pi(E, \vartheta)$ würde, trotz der numerischen Ergebnisse von PRUETT, BEIDUCK und KONOPINSKI²⁾ dafür sprechen, dass die Tensorkraft in erster Linie für die Polarisation massgebend ist.

Seminar für theoretische Physik der Universität Basel.

¹⁾ R. J. BLIN-STOYLE, Proc. Phys. Soc. **64 A**, 700 (1951).

²⁾ J. R. PRUETT, F. M. BEIDUCK und E. J. KONOPINSKI, Phys. Rev. **77**, 628 (1950).

Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse.

III. e^4 -Korrekturen zur Linienbreite

von E. Arnous*).

(Seminar für Theoretische Physik, Universität Zürich.)

(9. VI. 1952.)

The e^4 -correction to the line breadth $Re \Gamma_{40/0}(E_0)$ is considered. It is shown that this quantity can be written in a covariant 4-dimensional manner (excepting a part depending on the excitation conditions) and that it is finite and unambiguous. The order of magnitude is $\sim \gamma/137^3 - \gamma^2/\pi \varepsilon$ where γ is the line breadth in second approximation and 2ε a measure for the extension of the incident exciting spectrum.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich unmittelbar an zwei frühere Arbeiten¹⁾ desselben Titels an, die im folgenden mit I und II zitiert werden. Betreffend Problemstellung, Methode und Bezeichnungen verweisen wir auf diese Arbeiten, insbesondere auch auf II. Der Zweck der vorliegenden Arbeit III ist die Behandlung der nächsten Ordnung in der Entwicklung der Linienbreite, das heisst $Re \Gamma_{40/0}$. Die Hauptfrage ist, ob diese Grösse, die sich auf ein *gebundenes* Teilchen und auf Anregungsbedingungen bei einer endlichen Zeit t_0 bezieht, mit den gegenwärtigen Methoden der Ladungs- und Massenrenormalisation eindeutig berechenbar und endlich ist. Wir werden sehen, dass beides der Fall ist. In § 4 werden wir die Grössenordnung abschätzen. Da die Berechnung von $Re \Gamma_4$ sehr langwierig ist, so können wir nur den Gang der Untersuchung und die hauptsächlichsten theoretischen Punkte hier wiedergeben. Wir werden uns darauf beschränken, $Re \Gamma_{40/0}(E_0')$ (E_0' = verschobene Energie des angeregten Zustands) zu behandeln. Wir erhielten in II die

*) Chargé de Recherches au Centre national de la Recherche Scientifique, Paris.

¹⁾ E. ARNOUS und S. ZIENAU, Helv. Phys. Acta 24, 279 (1951); E. ARNOUS und K. BLEULER, ibid. 25, 581 (1952).

Formel (wir schreiben wieder E_0 statt E_0' ; im folgenden sind alle Energien die verschobenen Niveaus):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} I_{400}(E_0) = \langle 0 | (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s) \delta (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{na} \\ - \pi^2 H^{tr} \delta H^{tr} \delta (H^{tr} \delta H^{tr})_{na} + \left[H^{tr} \delta H^{tr} P (H^{tr} P H^{tr} + H_c \right. \\ \left. - H_s)_{na} + H^{tr} \delta (H_c - H_s - H_L) P H^{tr} - \frac{1}{2} H^{tr} \delta (H^{tr} P^2 H^{tr})_a H^{tr} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} H^{tr} \delta H^{tr} (H^{tr} P^2 H^{tr})_a + \text{Konj. kompl.} \right] | 0 \rangle \quad (1) \end{aligned}$$

$$\delta \equiv \delta(E_0 - H_0), \quad P \equiv \frac{P}{E_0 - H_0}.$$

§ 1. Berechnung der Matricelemente.

H^{tr} und H_c sind Operatoren, in denen das *transversale* Photonfeld A_i und der Kommutator $[\bar{\psi}, \psi]$ vorkommen. ψ sei das, der zweiten Quantisierung unterworfenen Elektronenfeld, in *Anwesenheit des statischen Kernfeldes*. Es ist ($\hbar = c = 1$, Heavyside-Einheiten)

$$H^{tr} = -\frac{ie}{2} \int d\mathbf{r} [\bar{\psi}(\mathbf{r}), \gamma^i \psi(\mathbf{r})] A_i(\mathbf{r}) \quad (2)$$

$$H_c = \frac{e^2}{32\pi} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\psi^*(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})] [\psi^*(\mathbf{r}'), \psi(\mathbf{r}')], \quad (3)$$

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^4$$

H_s ist schon in II (Formel (12)) explizit gegeben. In (1) kommen also Produkte von A_i und von Kommutatoren $[\bar{\psi}, \psi]$ vor. Die Antikommutatoren von ψ an zwei verschiedenen Raumpunkten im Kernfeld sind unbekannt. Im Anhang I stellen wir eine Zerlegungsmethode von A und ψ dar, die trotzdem eine verhältnismässig schnelle Bestimmung der Matricelemente in (1) ermöglicht. Die Methode separiert die reellen von den virtuellen Prozessen und zerlegt die ersteren in „Ein-, zwei- usw. Teilchenterme“, das heisst Matricelemente in denen nur ein, bzw. zwei usw. Teilchen in Übergängen beteiligt sind. In unserem Problem werden nur die Einteilchenterme eine Rolle spielen. Diese können dann durch die Diracschen Ein-elektronenfunktionen ausgedrückt werden. Endlich wird es leicht sein, unter den Ein-Teilchentermen diejenigen auszuscheiden, die den Vakuum Erwartungswert des Stromes $\langle j_i \rangle_0$ enthalten, und in Abwesenheit eines Magnetfeldes verschwinden.

Da in H^{tr} nur der Strom $j_i = [\bar{\psi}, \gamma^i \psi]$ vorkommt, nicht die Ladungsdichte, so verschwinden also alle von H^{tr} herrührenden Glieder

die den Vakuumserwartungswert eines Kommutators $\langle [\bar{\psi}, \psi] \rangle_0$ enthalten. Betrachten wir zum Beispiel

$$\langle 0 | (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s) \delta (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{nd} | 0 \rangle$$

Es ist zuerst klar, dass die Zweiteilchenterme von

$$(H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{nd}$$

Null geben, denn (siehe Anhang I, Formel [15]) sie entsprechen entweder Prozessen, die hier nicht stattfinden können (wenn zum Beispiel der Prozess mit Paarvernichtung, Positronensprung oder Vernichtung zweier Elektronen anfängt), oder sie verletzen die Energieerhaltung (Paarzeugung), die durch die δ -Funktion in der Mitte verlangt wird.

Betrachten wir weiter die Nullteilchenteile

$$\langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{0 \text{ Ph}}^{\text{El}} \quad \text{und} \quad \langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{2 \text{ Ph}}^{\text{El}}$$

Der erste Operator ist diagonal und muss ausgeschlossen werden. Der zweite verletzt die Erhaltung der Energie²⁾. Es bleiben also

$$\langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{0 \text{ Ph}}^{\text{El}} \quad \text{und} \quad \langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{2 \text{ Ph}}^{\text{El}}$$

Der erste Operator gibt nur Erhaltung der Energie, wenn das im Anfangszustand $|0\rangle$ absorbierte Elektron reemittiert wird. Dieser Operator ist aber dann diagonal und muss wieder ausgeschlossen werden. Der zweite Operator reduziert sich auf

$$\langle H^{tr} P H^{tr} \rangle_{2 \text{ Ph}}^{\text{El}}$$

was die Emission von zwei Photonen beschreibt (Doppelemission). Die Formel (16) des Anhanges I zeigt, dass die zwei ersten Terme dieser Formel $\langle j \rangle_0$ enthalten, also Null sind. Es bleiben also nur die Terme

$$4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0.$$

Die Hilfsformeln (1), (3), (11), (12) und (14) des Anhanges I liefern unmittelbar die zwei einzigen Matrixelemente.

²⁾ Würden wir $\text{Re } \Gamma_4(E)$ für $E \neq E_0$ berechnen, so könnten in $H^{tr} P H^{tr}$ zwei weiche Photonen emittiert werden und $\langle H^{tr} P H^{tr} \rangle_{0 \text{ Ph}}^{\text{El}}$ wäre von Null verschieden.

Auch sonst würden viele der folgenden Vereinfachungen unmöglich sein.

Ähnliche Betrachtungen können für die anderen Terme gemacht werden. Wir werden jetzt einige Matrixelemente explizit schreiben, wie sie uns die obige Methode liefert, um einige Bemerkungen über die Fortsetzung der Rechnungen machen zu können.

Betrachten wir zum Beispiel das dritte Glied von (1) und insbesondere

$$\langle H^{tr} P (H^{tr} P H^{tr})_{na} \rangle_{1 \text{ El}}^{1 \text{ Ph}}$$

was allein einen von Null verschiedenen Beitrag gibt. Um dieses Produkt berechnen zu können, benutzen wir die Formel (18) des Anhanges I, und man sieht sofort, dass nur die neun letzten Terme dort von Null verschieden sind (die anderen verschwinden, weil $\langle j \rangle_0 = 0$). Wir geben im Anhang II die entsprechenden Matrixelemente in tabellarischer Form.

1 c muss ausgeschlossen werden, so wie auch die Fälle $n = 0$ in 5 c und 9 c, weil das Produkt der zwei letzten H^{tr} nicht diagonal sein muss.

Terme mit verschwindenden Nennern treten also nicht auf. Ferner sehen wir, dass der Operator H_L diejenigen Terme subtrahiert, in denen der Hauptwert P und die δ -Funktion mit demselben Argument $E_0 - E_z$ auftreten, wo also $P/x \delta(x)$ vorkommt. Es sind die Fälle 3a und $n = G$ in 7a und $n' = G$ in 9a. Sie werden durch $\langle H_L \rangle_{0 \text{ El}} P H^{tr}$ bzw. $\langle H_L \rangle_{1 \text{ El}} P H^{tr}$ subtrahiert.

Die in den Renormalisationstermen auftretenden Paarglieder werden durch 2b kompensiert und die Fälle $n = 0$ in 4b und $n = G$ in 8b lassen sich mit den anderen Beiträgen der Renormalisationsterme zusammen addieren (gemeinsame Zähler). Die übrigbleibenden Matrixelemente können folgendermassen gruppiert werden: 1a, 2a mit 3b; 1b, 2c mit 3c; 4b, 5c, 6a, 7b, 8a mit 9c; 4c, 5b, 6c, 7a, 8b mit 9a; 4a, 5a, 6b, 7c, 8c mit 9b. In der Bestimmung der gemeinsamen Nenner benutzt man die Regel³⁾:

$$\frac{P}{A} \cdot \frac{P}{A+B} + \frac{P}{B} \frac{P}{A+B} = \frac{P}{A} \frac{P}{B} + \pi^2 \delta(A) \delta(B)$$

Wenn A oder B immer von Null verschieden sind, verschwindet $\delta(A) \delta(B)$. Es zeigt sich, dass dies immer der Fall ist, wenn nur ein einzelner Übergang, etwa vom ersten angeregten Niveau zum Grundzustand existiert (was durchweg angenommen sei). Aus dem gleichen Grund verschwindet auch das Glied $\sim \pi^2$ in (1). Energie-

³⁾ Man verifiziert diese Formel, indem man die Integraldarstellung des Hauptwertes und der δ -Funktion einsetzt.

erhaltung (δ -Funktionen) und die nd -Vorschrift lassen sich nicht erfüllen.

Ähnliche Betrachtungen können auf die Coulombterme H_c angewandt werden.

Die übrigbleibenden Beiträge zu $Re \Gamma_{400}(E_0)$, soweit sie nur von transversalen Photonen herrühren, sind vom Typus:

$$\begin{aligned} & \frac{e^4}{(2\pi)^6} \sum_{s,z} \int d\mathbf{r} d\mathbf{k} \bar{\psi}_{z_1}(\mathbf{r}_1) e^{i(\mathbf{k}_1, \mathbf{r}_1)} \gamma \mathbf{e}^{s_1}(\mathbf{k}_1) \psi_{z_1'}(\mathbf{r}_1) \dots \bar{\psi}_{z_4}(\mathbf{r}_4) e^{i(\mathbf{k}_4, \mathbf{r}_4)} \times \\ & \quad \times \gamma \mathbf{e}^{s_4}(\mathbf{k}_4) \psi_{z_4'}(\mathbf{r}_4) \times \\ & \quad \times \frac{\delta(E_{z_3} - E_{z_3'} + E_{z_4} - E_{z_4'} + k_3 + k_4) \text{ oder } \delta(E_{z_3} - E_{z_3'} + \dots - E_{z_4'} \pm k_3 + k_4)}{\text{Nenner}} \\ & \quad + \text{konj. Kompl.} \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{e}^s(\mathbf{k})$ ist der Polarisationsvektor des Photons \mathbf{k} . Die Integration ist natürlich über $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_4$ und $\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_4$. Wir charakterisieren (4) kurz durch:

$$z_1(k_1 s_1) z_1' z_2(k_2 s_2) z_2' z_3(k_3 s_3) z_3' z_4(k_4 s_4) z_4' \frac{\delta(\dots)}{\text{Nenner}}.$$

In der folgenden Tafel I sind die Matrixelemente, die von transversalen Photonen herrühren zusammengestellt. Der Anschaulichkeit halber, sind auch die zugehörigen Feynman-Diagramme angegeben (\dots Photonlinie, — Elektronlinie), doch ist zu beachten, dass die Elektronenlinien hier gebundene Elektronen beschreiben, n und n' sind Niveaus positiver Energie, v negativer Energie, z und z' positiver oder negativer Energie; ε_z und $\varepsilon_{z'}$ sind die Vorzeichen von E_z und $E_{z'}$. G bezeichnet den Grundzustand, 0 das angeregte Anfangsniveau. Die Massenkorektionen

$$H^{tr} \delta H^{tr} P(H_s)_{na} \quad \text{und} \quad H^{tr} \delta(H_s)_{na} P H^{tr}$$

sind noch nicht subtrahiert.

In dem Renormalisationsterm $-1/2 H^{tr} (\tilde{H}^{tr} P^2 \tilde{H}^{tr})_a$ kommt die Grösse der Energieschale des angeregten Zustands explizit vor. Dies ist auch notwendig, da sonst für manche Übergänge P^2 unendlich würde. Es ist nützlich, diesen Term formal aufzuspalten

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} H^{tr} (\tilde{H}^{tr} P^2 \tilde{H}^{tr})_a &= -\frac{1}{2} H^{tr} (H^{tr} P^2 H^{tr})_a + \\ &+ \frac{1}{2} H^{tr} (\underline{H}^{tr} P^2 \underline{H}^{tr})_a. \end{aligned} \quad (5)$$

Natürlich würde jedes Glied von (5) einzeln unendlich, doch werden wir den zweiten Teil von (5), der nichtrelativistischer Natur ist, erst bei der expliziten Berechnung in § 4 brauchen. Für die Zwecke der

Tafel I.

	$z_1(k_1 s_1) z'_1 z_2(k_2 s_2) z'_2 z_3(k_3 s_3) z'_3 z_4(k_4 s_4) z'_4$	$\delta(\dots \dots)/\text{Nenner}$
Emission zweier Quanten 	$\left\{ \begin{array}{l} 0(k' s') z z(k s) G \\ 0(k s) z z(k' s') G \end{array} \right\}$ $G(-k s) z' z'(-k' s') 0$ $G(-k s) z' z'(-k' s') 0$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k + k')}{4 k k' (E_z - E_G - k) (E_z' - E_0 + k')}$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k + k')}{4 k k' (E_z - E_G - k') (E_z' - E_0 + k')}$
Korrekturen zur Emission: A gewöhnliche Korrektur 	$0(k s) G$ $G(k' s') z z(-k s) z' z'(-k' s') 0$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_z' + k)} \left[\frac{1}{E_G - E_z - k' \epsilon_z} + \frac{1}{E_z' - E_0 + k' \epsilon_z'} \right]$
B_1 Selbstenergie Korrektur 	$G(k' s') z z(-k' s') z' z' \mp G(-k s) 0$ $G(-k s) z z \mp 0(k' s') z' z'(-k' s') 0$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_G - E_z - k' \epsilon_z) (E_0 - E_z' - k)}$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_G - k) (E_z' - E_0 + k' \epsilon_z')}$
B_2 *) 	$G(k' s') z z(-k' s') G G(-k s) 0$ $G(-k s) 0 0(k' s') z z(-k' s') 0$	$-\frac{1}{2} \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_G + k' \epsilon_z)^2}$ $-\frac{1}{2} \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_0 + k' \epsilon_z)^2}$
C Polarisationskorrektur 	$G(k' s') 0 v(-k' s') n n(-k s) v$ $G(k' s') 0 v(-k s) n n(-k' s') v$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_n - E_v + k)} \left[\frac{1}{k' + k} + \frac{1}{k' - k} \right]$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_n - E_v + k)} \left[\frac{1}{k' + k} + \frac{1}{k' - k} \right]$

*) B_2 besteht aus $-\frac{1}{2} H^{tr} \delta H^{tr} (H^{tr} P^2 H^{tr})_d - \frac{1}{2} H^{tr} \delta (H^{tr} P^2 H^{tr})_d H^{tr}$ plus den Matrix-Elementen 2b, 4b ($n=0$) und 8b ($n=G$) des Anhanges II.





§ 1–3 lassen wir die Beschränkung \sim einfach weg und die Beiträge des zweiten Glieds von (5) sind in Tafel I nicht enthalten.

Die Coulombterme, die H_c enthalten, sind vom Typus

$$\frac{e^4}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4}{8\pi |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4|} \bar{\psi}_{z_1}(\mathbf{r}_1) \gamma \mathbf{e}^s(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \psi_{z'_1}(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_{z_2}(\mathbf{r}_2) \times \\ \times \gamma \mathbf{e}^s(\mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \psi_{z'_2}(\mathbf{r}_2) \psi_{z_3}^*(\mathbf{r}_3) \psi_{z'_3}(\mathbf{r}_3) \psi_{z_4}^*(\mathbf{r}_4) \psi_{z'_4}(\mathbf{r}_4) \times \\ \times \frac{\delta(+E_{z_3} - E_{z'_2} + E_{z_3} - E_{z'_3} + E_{z_4} - E_{z'_4} + k_2)}{\text{Nenner}} + k \cdot k. \quad (6)$$

Sie sind in Tafel II zusammengestellt. In den Diagrammen bezeichnet ... ein virtuelles skalares Photon.

Tafel II.

	$z_1(k_1 s_1) z'_1$	$z_2(k_2 s_2) z'_2 z'_3 z'_4 z'_4$	$\delta(\dots)/\text{Nenner}$
A_{coul} Gewöhnliche Korrektur zur Emission 	$0(k s) G$	$z(-k s) z' G z z' 0$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_z - E_{z'} + k)} (\varepsilon_{z'} - \varepsilon_z)$
B_{coul} Selbst- energie Korrektur 	$\left\{ \begin{array}{l} 0(k s) G \\ 0(k s) G \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} z' \neq G(-k s) 0 G z z z' \\ G(-k s) z \neq 0 z z' z' 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_{z'} - E_0 + k)} \varepsilon_z \\ \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_z - E_G - k)} \varepsilon_{z'} \end{array} \right.$
C_{coul} Polarisations- korrektur 	$\left\{ \begin{array}{l} 0(k s) G \\ 0(k s) G \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} n(-k s) \nu \nu n G 0 \\ \nu(-k s) n n \nu G 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_n - E_\nu + k)} \\ \frac{2\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_n - E_\nu - k)} \end{array} \right.$
D_{coul} Polarisations- korrektur 	$\left\{ \begin{array}{l} 0(k s) G \\ 0(k s) G \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} G(-k s) z' \neq 0 z' 0 z z \\ z' \neq G(-k s) 0 z z G z' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_G - E_{z'} + k)} \varepsilon_z \\ \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_0 - E_{z'} - k)} \varepsilon_z \end{array} \right.$

D_{Coul} enthält den Vakuumenerwartungswert der Ladungsdichte $\langle \rho \rangle_0$, der für gebundene Zustände (im Gegensatz zu freien Partikeln) nicht verschwindet. Hierin stecken die Ladungsrenormalisation des Kerns sowie endliche Beiträge.

§ 2. Vierdimensionale Zusammenfassung der Matrixelemente.

Nun werden wir die folgende Eigenschaft von $Re \Gamma_{40/0}(E_0)$ verifizieren: Wenn in B_2 keine Beschränkung, die Energieschale betreffend, existieren würde, dann würden sich die Coulombterme mit denen von Tafel I vierdimensional kombinieren lassen, und dasselbe Resultat ergeben, das man bei Lorentzbeziehung ohne Betrachtung der Lorentzbedingung erhalten hätte⁴⁾, das heisst es treten statt der Coulombterme 4 Typen von virtuellen Photonen in Tafel I auf. Für die Terme D_{Coul} von Tafel II, die $\langle \rho \rangle_0$ enthalten, ist das allerdings erst der Fall, wenn auch die Beiträge $\langle j \rangle_0$, die in Abwesenheit eines äusseren Magnetfelds verschwinden, in Betracht gezogen werden.

Diese Eigenschaft, die von French und Weisskopf für die gebundene Selbstenergie des Elektrons verifiziert wurde, erstreckt sich also praktisch auch auf $Re \Gamma_4(E_0)$. (Der Zusatz, der durch die Energiebeschränkung entsteht, gibt zu keinerlei Konvergenzschwierigkeiten Anlass). Es ist aber zu betonen, dass all dies nur für $Re \Gamma(E_0)$, aber an keiner anderen Stelle $E \neq E_0$ gilt. In dem letzten Fall dürfte also die Lorentz-Bedingung *nicht* ignoriert werden, wenn man mit 4 Photonentypen rechnen will.

Wir beschränken uns darauf, an dem typischen Beispiel der Polarisationsterme zu zeigen, wie die 4-dimensionale Zusammenfassung durchgeführt werden kann.

Wir schreiben die zwei Polarisationsterme der Tafel I mit der dortigen Bezeichnungsweise:

$$C \equiv 0(\mathbf{k}s) G G(\mathbf{k}'s') 0 \left[-\frac{\nu(-\mathbf{k}'s') n n(-\mathbf{k}s) \nu}{E_n - E_\nu + k} + \frac{n(-\mathbf{k}'s') \nu \nu(-\mathbf{k}s) n}{E_n - E_\nu - k} \right] \times \\ \times \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(k'^2 - k^2)}. \quad (7)$$

Um die Polarisationsterme C_{Coul} der Tafel II in ähnliche Form bringen zu können, ergänzen wir zuerst die 2 Polarisationsvektoren $e^{s'}$, zu 4 Vierervektoren $e_\lambda^{s'}$, durch Hinzufügen einer longitudinalen und skalaren Polarisation, $s' = 3$ und 4:

$$e_\lambda^4 = (0, 0, 0, 1); \quad e_4^{s'} = 0, \quad \text{wenn } s' = 1, 2, 3$$

$$\sum_{s'=1}^4 e_\lambda^{s'}(\mathbf{k}') e_\lambda^{s'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'},$$

⁴⁾ Mit Lorentzbeziehung bezeichnen wir diejenige Eichung der Potentiale für die klassisch $\delta A_\mu / \delta x_\mu = 0$; bei Coulombbeziehung ist $\text{div } A = 0$.

so dass bei Summation über λ

$$\gamma \mathbf{e}^{s'} \equiv \gamma^\lambda e_\lambda^{s'} \quad (s' = 1, 2, 3), \quad \psi^* = \bar{\psi} \gamma^\lambda e_\lambda^4$$

Dann ersetzen wir $1/4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ durch

$$\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'^2} e^{i(\mathbf{k}', \mathbf{r} - \mathbf{r}')}.$$

Wir erhalten

$$C_{\text{Coul}} = 0 (\mathbf{k} s) G G(\mathbf{k}' 4) 0 \times \\ \times \left[\frac{\nu(-\mathbf{k}' 4) n n(-\mathbf{k} s) \nu}{E_n - E_\nu + k} + \frac{n(-\mathbf{k}' 4) \nu \nu(-\mathbf{k} s) n}{E_n - E_\nu - k} \right] \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2 k k'^2}. \quad (8)$$

Unsere Behauptung ist jetzt die folgende: Anstatt C und C_{Coul} zu addieren, können wir in (7) s' von 1 bis 4 statt von 1 bis 2 summieren.

Es genügt offenbar, zu zeigen, dass

$$C(s' = 3, 4 \text{ statt } 1, 2) - C_{\text{Coul}} = 0. \quad (9)$$

Wir reduzieren die dritte Komponente auf die vierte mittels der Formel

$$\int \bar{\psi}_z(\mathbf{r}) \gamma^\lambda e_\lambda^3(\mathbf{k}') e^{\pm i \mathbf{k}' \mathbf{r}} \psi_{z'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \pm i \frac{E_{z'} - E_z}{k'} \times \\ \times \int \bar{\psi}_z(\mathbf{r}) \gamma^\lambda e_\lambda^4 e^{\pm i \mathbf{k}' \mathbf{r}} \psi_{z'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (10)$$

(9) wird jetzt:

$$C(s' = 3, 4) - C_{\text{Coul}} = \\ = 0 (\mathbf{k} s) G G(\mathbf{k}' 4) 0 \left[\left(n(-\mathbf{k} s) \nu \nu(-\mathbf{k}' 4) n \right) \frac{(E_0 - E_G)(E_n - E_\nu) + k^2}{k(E_n - E_\nu + k)} - \right. \\ \left. - \left(\nu(-\mathbf{k} s) n n(-\mathbf{k}' 4) \nu \right) \frac{(E_0 - E_G)(E_n - E_\nu) - k^2}{k(E_n - E_\nu - k)} \right] \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2 k'^2 (k'^2 - k^2)}. \quad (11)$$

Wegen des Faktors $\delta(E_G - E_0 + k)$ ist aber $E_0 - E_G = k$ und die zwei Brüche in der Klammer werden gleich 1. Wir addieren und subtrahieren dann zu der Klammer von (11) den Ausdruck

$$n(-\mathbf{k} s) n' n'(-\mathbf{k}' 4) n.$$

Das erste Glied der Klammer ist dann $n(-\mathbf{k} s) z z(-\mathbf{k}' 4) n$ und kann über z mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation summiert werden. Für das zweite Glied der Klammer von (11) vertauschen wir $n \leftrightarrow n'$ und erhalten ebenso $z(-\mathbf{k} s) n n(-\mathbf{k}' 4) z$. Auch hier kann man über z summieren.

Man erhält, explicit geschrieben,

$$[(11)] = \int \{ \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \gamma \mathbf{e}^s e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \psi_n(\mathbf{r}) - \\ - \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \gamma^4 e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \gamma^4 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \gamma \mathbf{e}^s \psi_n(\mathbf{r}) \} d\mathbf{r} = 0.$$

Damit ist (9) bestätigt.

Für die anderen Terme lässt sich dasselbe in ähnlicher Weise durchführen. Bildet man $A(s' = 3, 4) - A_{\text{Coul}}$, $B_1(s' = 3, 4) - B_{\text{Coul}}$, $B_2(s' = 3, 4)$, so verschwinden diese Terme allerdings einzeln nicht. Dagegen heben sich einige Glieder von B_2 gegen Glieder von $A - A_{\text{Coul}}$; die restlichen Glieder von B_2 , zusammen mit $B_1 - B_{\text{Coul}}$ heben sich gegen den Rest von $A - A_{\text{Coul}}$. Einige Terme von $B_1 - B_{\text{Coul}}$ verschwinden bei der Integration über die Winkel von k' . Zusammen⁵⁾:

$$A(s' = 3, 4) - A_{\text{Coul}} + B_1(s' = 3, 4) - B_{\text{Coul}} + B_2(s' = 3, 4) = 0. \quad (12)$$

Somit bleiben übrig: (1) die Beiträge von der Doppelemmission, (2) A, B, B_2, C von Tafel I, wobei aber s' von 1 bis 4 zu summieren ist, (3) die Terme D_{Coul} von Tafel II. Letztere, wie schon erwähnt, nehmen 4-dimensionale Gestalt nur an, wenn die schon weggelassenen Glieder $\langle j \rangle_0$ (die verschwinden) berücksichtigt werden. Übrigbleibt ferner noch das zweite Glied von (5), das explizit von der Grösse der Energieschale abhängt. Für dieses kann man natürlich keine 4-dimensionale Gestalt erwarten.

§ 3. Beweis der Konvergenz.

Wir zeigen nun, dass die übliche Methode der Ladungs- und Massenrenormalisation genügt, um alle Divergenzen, die in den einzelnen Matricelementen stecken, zu beseitigen. Hierbei handelt es sich natürlich um die Divergenzen, die bei hohen virtuellen k auftreten. Die Beiträge von der Doppelemmission sind endlich. Eine Ultrarotkatastrophe tritt auch nicht auf. Ferner dürfen wir zu diesem Zweck das zweite Glied von (5) ausser acht lassen, da dieses keine quantenelektrodynamische Divergenz enthält, sondern lediglich das Verschwinden des Nenners von P^2 verhindert.

Ein typisch divergenter Ausdruck, der überall in verschiedenen Variationen vorkommt, ist zum Beispiel

$$X = \sum_z \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{k}'}{k'} \dots \frac{\gamma^\lambda e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \psi_z(\mathbf{r}) \bar{\psi}_z(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \gamma^\lambda \psi_0(\mathbf{r}')}{E_0 - E_z - k' \varepsilon_z}. \quad (13)$$

⁵⁾ Die Gültigkeit der obigen Behauptungen und von (12) ist keineswegs sehr leicht zu sehen, doch können wir die zum Teil umfangreichen rechentechnischen Einzelheiten nicht alle darstellen.

Wir zerlegen die Zwischenzustände in zwei Klassen, je nachdem k' kleiner oder grösser als eine gegebene Energie μ ist. Diese Energie wollen wir viel grösser als die Ionisierungsenergie I wählen, damit die Integration über $k' < \mu$ den Hauptbeitrag zum Integral gibt, aber viel kleiner als mc^2 , damit das Gebiet $k' > \mu$ alle relativistischen Effekte einschliesst: zum Beispiel $\mu = \alpha m$ ($\alpha = 1/137$). Wenn $k' > \mu$, muss die Energie $|E_z| > \mu \gg I$ sein, damit der Gesamtimpuls, während des Überganges $0 \rightarrow z$ des Elektrons und während der Emission des Photons \mathbf{k}' , innerhalb der Impulsverteilung von ψ_0 , also von der Ordnung der Ionisationsenergie, bleibt. Man darf jetzt das Elektron z des Zwischenzustandes als frei betrachten und infolgedessen die Bornsche Näherung in den Zwischenzuständen benutzen.

Wir ersetzen (13) durch

$$X = \sum_z \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{k}' dE}{k'} \dots \frac{\gamma^\lambda e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m - V) \psi_z(\mathbf{r}) \bar{\psi}_z(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \gamma^\lambda \psi_0(\mathbf{r}')}{E_0 - E - k' \varepsilon_E}$$

was die Summation über z durchzuführen gestattet. Wir entwickeln dann $\delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m - V)$ nach Potenzen von V (siehe Anhang III) und erhalten für $k' > \mu$:

$$X \rightarrow \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}' dE}{k'} \dots \frac{\gamma^\lambda e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \left\{ \delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m) + \right.}{E_0 - E - k' \varepsilon_E} \times \\ \times \left. \frac{P}{E - \alpha \mathbf{p} - \beta m} V \delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m) + \delta() V \frac{P}{E - \alpha \mathbf{p} - \beta m} + \dots \right\} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \gamma^\lambda \psi_0(\mathbf{r})$$

Die Benützung der Formel

$$e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \oint(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} = \oint(\mathbf{p} - \mathbf{k}'), \quad p = -i \text{ grad}$$

und die Trennung der Zwischenzustände positiver und negativer Energien mittels der Operatoren

$$H^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\alpha \mathbf{p} + \beta m}{E(\mathbf{p})} \right], \quad E(\mathbf{p}) = (|\mathbf{p}|^2 + m^2)^{1/2}$$

$$\delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m) H^\pm = \delta(E \mp E(\mathbf{p})) H^\pm, \quad H^+ + H^- = 1$$

gibt endlich (H^\pm kommutiert mit $E(\mathbf{p})$):

$$X = \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}'}{k'} \dots \gamma^\lambda \left\{ \frac{H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - k'} + \frac{H^-(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + k'} + \right. \\ \left. + \frac{H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - k'} V \frac{H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - k'} + \dots \right\} \gamma^\lambda \psi_0. \quad (14)$$

Man sieht: Je höher die Potenz von V , desto höher die Potenz von k' im Nenner. Von einer bestimmten Stelle ab muss also $\int dk'$ endlich sein. Nachdem sämtliche Terme in diese Form gebracht sind, kann man leicht entscheiden, ob noch Divergenzen übrig bleiben oder nicht.

Als Beispiel betrachten wir das Matrixelement A

$$A = \dots \frac{1}{2k'} \frac{\bar{\psi}_G e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \gamma^\lambda \psi_z \bar{\psi}_z e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \gamma^\epsilon \mathbf{e}(\mathbf{k}) \psi_{z'} \bar{\psi}_{z'} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \gamma^\lambda \psi_0}{(E_z - E_{z'} + k)} \times \\ \times \frac{k'(\epsilon_{z'} - \epsilon_z) - (E_z - E_{z'} + k)}{(E_G - E_z - k' \epsilon_z)(E_{z'} - E_0 + k' \epsilon_{z'})} \quad (15)$$

wobei

$$\dots = \frac{e^4}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}}{2k} \bar{\psi}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \gamma^\epsilon \mathbf{e}(\mathbf{k}) \psi_G \delta(E_G - E_0 + k) \int d\mathbf{k}' d\mathbf{r}'$$

(15) divergiert höchstens logarithmisch.

Die Entwicklung (14) zeigt sofort, dass nur die von V unabhängigen Terme divergieren können. Betrachten wir zuerst den Term, der $k'(\epsilon_{z'} - \epsilon_z)$ im Zähler enthält. Da die Vorzeichen von E_z und $E_{z'}$ verschieden sein müssen, bekommen wir die folgenden zwei Möglichkeiten ($\alpha_\lambda = i\gamma^4 \gamma^\lambda$):

$$A_1 = \dots - i\psi_G^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \alpha_\lambda \frac{1}{E(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') + E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + k} \times \\ \times \frac{1}{E_G - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}) - k'} H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})}{-E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - E_0 - k'} H^-(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \alpha_\lambda \psi_0 \\ A_2 = \dots i\psi_G^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \alpha_\lambda \frac{1}{-E(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + k} \times \\ \times \frac{1}{E_G + E(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') + k'} H^-(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})}{E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - E_0 + k'} H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \alpha_\lambda \psi_0.$$

Divergenzen kommen offenbar nur von dem Produkt der 2 Glieder $1/2$ in $H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}')$ und $H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')$ und dem Produkt zweier $\alpha \mathbf{k}'$, da ein einzelner Faktor $\alpha \mathbf{k}'$ nach Integration über die Winkel von \mathbf{k}' verschwindet. Die Summation über λ ergibt

$$\alpha_\lambda (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \alpha_\lambda = -2(\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \\ \alpha_\lambda (\alpha \mathbf{k}') (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) (\alpha \mathbf{k}') \alpha_\lambda = 2k'^2 (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) - 4(\mathbf{e} \mathbf{k}') (\alpha \mathbf{k}').$$

Ferner ist

$$\int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{e}(\mathbf{k}) \mathbf{k}') (\alpha \mathbf{k}')}{k'^2} = \frac{1}{3} \int d\mathbf{k}' (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})).$$

Der divergierende Teil von $A_1 + A_2$ ist also

$$\dots \frac{2\pi i}{3} \int \frac{dk'}{k'} \int d\mathbf{r} \psi_G^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \psi_0(\mathbf{r}). \quad (15')$$

Der Term $E_z - E_{z'} + k$ von (15) lässt sich ebenso behandeln (Beitrag A_3). Nur die Produkte von 2 Faktoren ($\alpha \mathbf{k}'$) geben Divergenzen. A_3 ergibt sich als die Hälfte von (15'). Der divergierende Anteil von (15) ist also

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \rightarrow \cdots \pi i \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'} \int d\mathbf{r} \psi_G^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \psi_0(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Diese Divergenz wird durch B_2 exakt kompensiert. Der V -unabhängige Teil des ersten Terms von B_2 ist

$$\begin{aligned} & \cdots \frac{1}{4i k'} \psi_G^* \alpha_\lambda \left\{ \frac{H^+(\mathbf{p}-\mathbf{k}')}{(E_G - E(\mathbf{p}-\mathbf{k}') - k')^2} + \frac{H^-(\mathbf{p}-\mathbf{k}')}{(E_G + E(\mathbf{p}-\mathbf{k}') + k')^2} \right\} \times \\ & \quad \times \alpha_\lambda \psi_G \psi_G^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}) \psi_0 \\ & \rightarrow \cdots \frac{\pi}{2i} \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'} \int d\mathbf{r} \psi_G^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \psi_0(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Der zweite Term von B_2 gibt dasselbe. Es folgt also, dass $A + B_2$ endlich ist.

Die Selbstenergiebeiträge B_1 sind analog zu behandeln. Die Entwicklung muss aber hier bis zu den in V linearen Gliedern fortgesetzt werden. B_1 konvergiert, wenn die Beiträge der Massenkorrektion $H^{tr} \delta H^{tr} P (H_s)_{na}$ und $H^{tr} \delta (H_s)_{na} P H^{tr}$ abgezogen werden. Der Operator H_s [siehe II Formel (12)] ist symmetrisch in Anfang- und Endzustand. Um die Subtraktion durchführen zu können, müssen wir in unseren Matrixelementen die Nenner symmetrisieren, zum Beispiel

$$\begin{aligned} E_G - E_z - k' \varepsilon_z & \equiv \left(\frac{1}{E_G - E_z - k' \varepsilon_z} + \frac{1}{E_0 - E_z - k' \varepsilon_z} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{E_G - E_z - k' \varepsilon_z} - \frac{1}{E_0 - E_z - k' \varepsilon_z} \right). \end{aligned}$$

Für grosse Werte von k' ist die zweite Klammer mit $(E_0 - E_G)/k'^2$ äquivalent. Wenn man sie in die Selbstenergieterme einführt, verschwinden die divergierenden Integrale, entweder weil

$$\int \psi_G^*(\mathbf{r}) \psi_{z' \neq G}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad \text{oder weil} \quad \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'} = 0.$$

Wenn man die erste Klammer in die Selbstenergieterme einführt und die H_s -Beiträge subtrahiert, so reduziert sich das Problem genau auf das von French und Weisskopf (Niveaushiftung⁶⁾) behandelte. Dies braucht hier nicht mehr im einzelnen wiederholt werden. Es folgt, dass B_1 minus Beiträge von H_s endlich ist.

⁶⁾ J. FRENCH und V. WEISSKOPF, Phys. Rev. **75**, 1240 (1949).

Wir brauchen auch nicht die Polarisationssterme C und D_{Coul} im einzelnen zu betrachten. Sie sind proportional zu den bekannten Ausdrücken für die Vakuum-Polarisation. Es ist bekannt, dass C eine Divergenz enthält, die die Ladung in H^{tr} renormalisiert. Dieser Beitrag ist also wegzulassen. Nach Elimination der nicht-eichinvarianten Glieder durch bekannte Verfahren⁷⁾ ist der Rest endlich.

D_{Coul} enthält das divergente $\langle \varrho \rangle_0$, das die Renormalisation der Ladung des Kernfeldes beschreibt⁸⁾, und ausserdem den wohlbekannten endlichen Term $-(\alpha/15\pi) \nabla^2 \delta(r)$, der auch in der Lambverschiebung eine Rolle spielt.⁹⁾ Damit ist die *Endlichkeit von $\text{Re } \Gamma_{40/0}(E_0)$ bewiesen.*

Es wäre weiter zu fragen, ob auch $\text{Re } \Gamma_4(E)$, $E \neq E_0$, endlich ist. Obwohl die Rechnung für diesen Fall unverhältnismässig viel komplizierter ist, besteht wohl kein Zweifel, dass dies der Fall ist. Man kann sich $\text{Re } \Gamma_4(E)$ nach $E - E_0$ entwickelt denken, und da E nur im Nenner zusammen mit k' vorkommt, so kann wohl kaum eine Divergenz übrig bleiben. (Vergleiche auch den analogen Fall von $\text{Im } \Gamma_2(E)$ in II.)

§ 4. Abschätzung in nicht-relativistischer Näherung.

In nicht-relativistischer Näherung sind die einzigen Terme, die von Null verschieden sind, die Matrixelemente für die Emission zweier Quanten und A , B_1 und B_2 , während die Coulombsterme Null sind: A_{Coul} hat den Faktor $\varepsilon_{z'} - \varepsilon_z$ und verschwindet, weil $E_z > 0$ und $E_{z'} > 0$. B_{Coul} ist genau durch $H^{\text{tr}} \delta H^{\text{tr}} P (H_s \text{Coul})_{n\bar{a}}$ und $H^{\text{tr}} \delta (H_s \text{Coul})_{n\bar{a}} P H^{\text{tr}}$ kompensiert, wenn für H_s die nicht-relativistische Form der Selbstenergie benutzt wird. Diese besteht dann aus dem Coulombbeitrag

$$H_{s\text{Coul}} = \frac{e^2}{8\pi} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi^*(\mathbf{r}) \frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \psi(\mathbf{r}') \quad (17)$$

und dem transversalen Beitrag

$$H_s^{\text{tr}} = -\frac{2}{3\pi} \frac{1}{137} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}) \frac{p^2}{m^2} \psi(\mathbf{r}) \quad (18)$$

$$H_s = H_{s\text{Coul}} + H_s^{\text{tr}}.$$

⁷⁾ Zum Beispiel W. PAULI and F. VILLARS, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949); G. KÄLLEN, Ark. f. Fysik, **2**, 187 (1950).

⁸⁾ Da e in der Wechselwirkung wie in dem ungestörten Problem (Kernfeld) vorkommt, so muss eine Ladungsrenormalisation auch an 2 Stellen ausgeführt werden.

⁹⁾ E. A. UEHLING, Phys. Rev. **48**, 55–63 (1935).

Wir ersetzen α durch \mathbf{p}/m und die ψ und E durch die Schrödinger Eigenfunktionen und Eigenwerte. Ferner beschränken wir uns für die reellen Photonen k auf die Dipolstrahlung (erlaubte Übergänge). Die Frage, ob dies auch für die virtuellen Photonen k' erlaubt ist, muss aber näher diskutiert werden. Wenn das nicht-relativistische Gebiet durch $k' < \mu = \alpha m$, $\alpha \sim 1/137$, definiert ist, ist die Dipolnäherung gerechtfertigt. Die obere Grenze unserer Integrale ist dann $\sim \alpha m$, und das Resultat hängt von $\log \alpha m = \log \alpha + \log m$ ab. Die Rechnungen von French und Weisskopf über die Linienverschiebung haben gezeigt, dass $\log \alpha$ wegfällt, wenn man den relativistischen Teil der Integrale hinzufügt. Das angenähert richtige Resultat erhält man, wenn man die nicht-relativistische Rechnung für die Dipolstrahlung bis zur oberen Grenze m fortsetzt.

Da wir sowieso nur eine grobe Abschätzung geben können, werden wir auch hier dasselbe Verfahren anwenden und nur die Dipolstrahlung betrachten aber trotzdem $\mu = m$ als obere Grenze wählen¹⁰⁾. Damit werden die Integrale über \mathbf{k}, \mathbf{k}' elementar.

Wir betrachten zuerst die Teile von $Re \Gamma_4$, die nicht von der Energieschale ε abhängen. Wir beschränken uns darauf, an dem ersten Glied von B_1 zu zeigen, wie die Rechnung durchgeführt wird. Das Resultat der Integration ist

$$B_1 \text{ (erstes Glied)} = -\frac{e^4}{(2\pi m)^4} \left(\frac{2}{3}\right)^2 (E_0 - E_G) \sum_{i,j,z,z'} \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_4 \times \\ \times \psi_0^*(\mathbf{r}_1) p_i \psi_G(\mathbf{r}_1) \psi_G^*(\mathbf{r}_2) p_j \psi_z(\mathbf{r}_2) \psi_z^*(\mathbf{r}_3) p_i \psi_{z'}(\mathbf{r}_3) \psi_{z' \neq G}^*(\mathbf{r}_4) p_i \psi_0(\mathbf{r}_4) \times \\ \times \frac{1}{E_G - E_{z'}} \left\{ -\mu + (E_z - E_G) \log \left| \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z} \right| \right\}. \quad (19)$$

Es tritt ein Glied auf das in μ linear ist. Dieses wird aber durch $H^{tr} \delta(H_s^{tr})_{nd} P H^{tr}$, Formel (18), subtrahiert. Der Term $\sim \mu$ fällt also weg.

Weiter werden wir die Tatsache benutzen, dass der Logarithmus eine langsam variierende Funktion ist und sie als eine Konstante betrachten:

$$\log \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z} = \text{const} \quad (20)$$

(20) ist sicher von der Grössenordnung 1–10. Dann können wir $E_z - E_G$ in das Matricelement absorbieren:

$$\sum_z (E_z - E_G) \psi_G^*(\mathbf{r}_2) p_j \psi_z(\mathbf{r}_2) \psi_z^*(\mathbf{r}_3) p_i = \\ = \psi_G^*(\mathbf{r}_2) [p_j H] \psi_z(\mathbf{r}_2) \psi_z^*(\mathbf{r}_3) p_i = \psi_G^*(\mathbf{r}_2) [p_j H] p_i \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \\ = \frac{1}{2} \psi_G^* \{ [p_j^2 H] + \nabla^2 V \} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \quad (21)$$

¹⁰⁾ Unser Verfahren ist ähnlich dem von Bethe in der Rechnung der Linienverschiebung, Phys. Rev. **72**, 339–341 (1947).

(19) zerlegt sich also in zwei Teile, B_1' (Beitrag von $[p_j^2 H]$) und B_1'' (Beitrag von $\nabla^2 V$). Wir betrachten nur B_1'' , da B_1' sich mit andern Gliedern von A und B_2 kombinieren lässt. Wir erhalten

$$B_1'' = -\frac{2}{9} \frac{e^4}{(2\pi m)^4} \frac{E_0 - E_G}{E_{z'} - E_G} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi_0^*(\mathbf{r}_1) p_i \psi_G(\mathbf{r}_1) \psi_G^*(\mathbf{r}_2) \times \\ \times \nabla^2 V \psi_{z'}(\mathbf{r}_2) \psi_{z' \neq G}^*(\mathbf{r}_3) p_i \psi_0(\mathbf{r}_3) \log \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z}. \quad (22)$$

Wir bemerken weiter, dass

$$\int \psi_{z'}^* p_i \psi_0 = i m (E_{z'} - E_0) \int \psi_{z'}^* r_i \psi_0.$$

Das Verhältnis $(E_{z'} - E_0)/(E_{z'} - E_G)$ kann auch grob als Konstante betrachtet werden, es variiert für Wasserstoff zwischen 5/32 und 1. In (22) kann man $\sum_{z' \neq G} = \sum_{z'} - (z' = G)$ schreiben. $\sum_{z'}$ gibt keinen Beitrag, da $\nabla^2 V = e^2 \delta(\mathbf{r})$ (für Wasserstoff), und $\delta(\mathbf{r}) r_i = 0$. Es bleibt der Beitrag $z' = G$, oder

$$B_1'' = \frac{2}{9} \frac{e^4}{(2\pi)^4} \frac{(E_0 - E_G)^2}{m^2} \left| \int \psi_0^* r_i \psi_G \right|^2 \int \psi_G^* \nabla^2 V \psi_G \frac{E_{z'} - E_0}{E_{z'} - E_G} \log. \quad (23)$$

Hier ist (für den Grundzustand von Wasserstoff)

$$\int \psi_G^* \nabla^2 V \psi_G = e^2 \left| \psi_G(0) \right|^2 = \frac{4m^3}{137^4}$$

(23) ist proportional zur Linienbreite zweiter Ordnung

$$\gamma = \text{Re } \Gamma_2(E_0) = \frac{4}{3 \cdot 137} (E_0 - E_G)^3 \left| \int \psi_0^* r_i \psi_G \right|^2.$$

Wenn wir

$$\frac{E_{z'} - E_0}{E_{z'} - E_G} \log \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z} \sim 1$$

setzen, erhalten wir die Größenordnung

$$B_1'' \sim \frac{\gamma}{2\pi 137^3}.$$

Ähnliche Betrachtungen für die anderen Matricelemente zeigen, dass unsere Korrekturen alle von der gleichen Größenordnung sind (es tritt auch $p^2/m^2 \sim 1/137^2$ auf), mit Ausnahme des von der Energieschale abhängigen Teils.

Endlich müssen wir noch den Teil von B_2 berechnen, der explizit von dem ε des angeregten Zustands abhängt. Aus (5) sieht man, dass in $(\underline{H}^{tr} P^2 \underline{H}^{tr})_a$ nur der Übergang $0 \rightarrow G + k' \rightarrow 0$ eine Rolle spielt, da für alle andern Übergänge die \sim -Bedingung automatisch

erfüllt ist. Bei der Integration über k' ist dann das Gebiet $E_0 - E_G - \varepsilon$ bis $E_0 - E_G + \varepsilon$ auszuschliessen. Man findet für den Beitrag B_2' von diesem Übergang

$$B_2' = -\frac{2}{9} \frac{e^4}{(2\pi m)^4} (E_0 - E_G) \left(\int_0^{E_0 - E_G - \varepsilon} + \int_{E_0 - E_G + \varepsilon}^{\mu} \right) \frac{k' dk'}{(E_0 - E_G - k')^2} |\psi_0^* p_i \psi_G|^4 =$$

$$- \frac{\gamma^2}{4\pi^2 \varepsilon} + \text{Glieder unabhängig von } \varepsilon.$$

Es ergibt sich als Schlussresultat, dass

$$Re \Gamma_{40/0}(E_0) \sim \frac{\gamma}{137^3} - \frac{\gamma^2}{\pi \varepsilon}. \quad (24)$$

Der ε -abhängige Teil verschwindet für $\varepsilon \rightarrow \infty$, wie das auch in II für die ε -abhängigen Korrekturen $Jm \Gamma_2(E)$, der Fall war. $\varepsilon \rightarrow \infty$ entspricht dem idealisierten Grenzfall kontinuierlicher Anregung.

§ 5. Linienverschiebung vierter Ordnung.

Zum Schluss seien noch einige Bemerkungen über $Jm \Gamma_4$ gemacht. Wenn wir dieselbe Darstellung wie bisher wählen, in der also die zweite Ordnung der Niveauverschiebung H_L in die Definition der Energien einbezogen ist, erhalten wir¹¹⁾

$$\frac{1}{2} Jm \Gamma_4(E_0) = (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s) P (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{na}$$

$$+ H^{tr} P (H_c - H_s - H_L) P H^{tr} - \pi^2 H^{tr} \delta H^{tr} \delta (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{na}$$

$$+ k.k. - \pi^2 H^{tr} \delta H^{tr} P (H^{tr} \delta H^{tr})_{na} - \pi^2 H^{tr} \delta (H_c - H_s - H_L) \times$$

$$\times \delta H^{tr} - H_{4s}. \quad (25)$$

wobei $H_L = (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_a$. H_{4s} ist die vierte Ordnung des Massenoperators. Wie man sieht, ist $Jm \Gamma(E_0)$ von der Energieschale ε unabhängig. Man wird nun (25) als die Niveauverschiebung vierter Ordnung betrachten und die Darstellung weiterhin so abändern, dass diese in die Definition der Energieniveaus einbezogen ist. Dann verschwindet $Jm \Gamma_4(E_0)$ in der neuen Darstellung. Genau

¹¹⁾ Hätten wir die unverschobenen Niveaus zur Darstellung und als Anfangszustand gewählt ($H_L = 0$), so wäre in (25) ein Zusatzglied $-(\underline{H}^{tr} P^2 \underline{H}^{tr}) (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_a$ aufgetreten, das von ε abhängt. In unserer Darstellung tritt aber $H_c - H_s - H_L$ statt $H_c - H_s$ auf, und dieses Glied verschwindet.

wie in II, ist das Maximum der Linie dann durch die Differenzen der verschobenen Niveaus gegeben. Auch in vierter Ordnung erweist sich also die Verschiebung des Linienmaximums als unabhängig von den Anregungsbedingungen (abgesehen von der sehr kleinen Verschiebung, die von der E -Abhängigkeit von $Re\, \Gamma(E)$ herrührt.)

Schlussfolgerung. Als Resultat der vorliegenden Untersuchungen I–III kann man folgendes feststellen: Die Quantenelektrodynamik führt, mit Hilfe der Ladungs- und Massenrenormalisation, auch bei gebundenen Zuständen zu eindeutigen und endlichen Resultaten. Dies betrifft insbesondere auch den Fall, wo die Anregung zu einer endlichen Zeit t_0 geschehen ist (wir haben sogar t_0 als scharf bestimmt angenommen), wo also Anregung und Emission nicht in stationärem Betrieb sind. Auch die Zeitabhängigkeit des Emissionsvorganges kann völlig erfasst werden.

Die Korrekturen zur klassischen, oder Weisskopf-Wignerschen Linienform und -breite sind alle ausserordentlich klein. Soweit sie von den Anregungsbedingungen unabhängig sind, ist die Korrektur zur Linienbreite $1/137^3$ mal kleiner als die übliche zweite Ordnung, ebenso ist die zusätzliche Linienverschiebung (die nicht in der Selbstenergie H_L enthalten ist) völlig vernachlässigbar (siehe II). Auch die von der Ausdehnung des anregenden Spektrums ε abhängigen Korrekturen $Jm\, \Gamma_2(E)$ und (24) sind von der Grössenordnung $\gamma^2/\varepsilon \ll \gamma$, verschwinden für $\varepsilon \rightarrow \infty$, und sind nur wesentlich, wenn man mit einer verhältnismässig scharfen Linie anregt, deren Schärfe mit γ vergleichbar ist. Man kann also schliessen, dass die Weisskopf-Wignersche Näherung ausserordentlich gut ist, und viel besser als zum Beispiel die erste Näherung für Stossprozesse, und das magnetische Moment, wo die strahlungstheoretischen Korrekturen oft von der Grössenordnung $1/137$ des Haupteffekts sind. Dies liegt an der wesentlich nicht-relativistischen Natur des Problems.

Eine genauere Behandlung der Emission zusammen mit der Anregung, die zu einer präziseren Fassung von ε führen sollte, ist dagegen noch wünschenswert, doch hat dieses Problem nichts mit der typisch quantenelektrodynamischen Seite des Problems zu tun.

Ich möchte Herrn Prof. W. HEITLER für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, herzlichst danken. Diese Arbeit wurde durch ein Stipendium des Centre national de la Recherche scientifique, Paris, ermöglicht, wofür ich dieser Institution bestens danke.

Anhang.

I. Abseparierung der reellen und virtuellen Prozesse¹²⁾.

Wir zerlegen jeden Photonoperator $A(x)$ ($x \equiv r, t$) bzw. Elektronoperator $\psi(x)$ oder $\bar{\psi}(x)$ in zwei Teile: den Teil A^+ (bzw. ψ^+ oder $\bar{\psi}^+$), der die Absorption beschreibt, und den Teil A^- (bzw. ψ^- oder $\bar{\psi}^-$), der die Emissionen beschreibt. Statt Produkte von A (bzw. ψ und $\bar{\psi}$) haben wir dann Produkte von A^\mp bzw. ψ^\pm und $\bar{\psi}^\pm$. A ist das transversale Feld allein.

Wir bringen diese Operatoren dann, mittels der Vertauschungsrelationen, in eine solche Reihenfolge, dass jeder *Absorptionsoperator rechts von allen Emissionsoperatoren steht*. Durch die Vertauschungsrelationen treten Kommutatoren (bzw. Antikommutatoren) auf. Für das Elektronenfeld, in Anwesenheit des Kerns, sind diese zwar nicht explizit bekannt. Sie sind aber c -Zahlen und können infolgedessen auch als Vakuumserwartungswerte von Produkten zweier Operatoren betrachtet werden. Die letzteren können durch die Diracschen Ein-Elektronenfunktionen ausgedrückt werden. Ausser Produkten von *geordneten* Operatoren erhalten wir also noch Vakuumserwartungswerte.

Die geordneten Operatoren, die zuerst Teilchen im Anfangszustand absorbieren und dann neue Teilchen im Endzustand emittieren, beschreiben die reellen Prozesse. Die Vakuumserwartungswerte, wo Teilchen zuerst emittiert sind und sofort wieder absorbiert, beschreiben die virtuellen Prozesse.

Photon-Operatoren. Wir setzen:

$$A_i(x) = A_i^+(x) + A_i^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1,2} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k}} e_{is}(\mathbf{k}) (A^s(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-kt)} + A^{s*}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-kt)}). \quad (1)$$

Das Photon Vakuum ist definiert durch

$$A_i^+(x) | \text{Phot. Vak.} \rangle = 0. \quad (2)$$

Aus $[A_i^+ A_j^+] = [A_i^- A_j^-] = 0$ und $\langle A_i A_j \rangle_0 = [A_i^+ A_j^-]$ folgt:

$$A_i A_j = \underbrace{A_i^+ A_j^+}_{\text{Dopp. Abs.}} + \underbrace{A_i^- A_j^-}_{\text{Dopp. Em.}} + \underbrace{(A_i^- A_j^+ + A_j^- A_i^+)}_{\text{Streuung}} + \langle A_i A_j \rangle_0 \quad (3)$$

$$= \underbrace{A_i^+ A_j^+ A_k^+}_{\text{Dreif. Abs.}} + \underbrace{A_i^- A_j^- A_k^-}_{\text{Dreif. Em.}} + \underbrace{(A_i^- A_j^+ A_k^+ + A_j^- A_i^+ A_k^+ + A_k^- A_i^+ A_j^+)}_{\text{Abs. + Streuung}} \quad (4)$$

$$+ (A_i^- A_j^- A_k^+ + A_i^- A_k^- A_j^+ + A_j^- A_k^- A_i^+) + \text{Streuung + Em.}$$

$$+ (A_i \langle A_j A_k \rangle_0 + A_j \langle A_i A_k \rangle_0 + A_k \langle A_i A_j \rangle_0) \\ \text{Abs. oder Em.}$$

$\langle \rangle_0$ bezeichnet den Erwartungswert im Photon-Vakuum.

Elektron-Operatoren. Wir setzen:

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) = \sum_{E_n > 0} a_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-itE_n} + \sum_{E_\nu < 0} b_\nu^* \psi_\nu(\mathbf{r}) e^{-itE_\nu} \quad (5)$$

Elektr. Vernicht. Posit. Erzeug.

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) = \sum_{E_\nu < 0} b_\nu \bar{\psi}_\nu(\mathbf{r}) e^{itE_\nu} + \sum_{E_n > 0} a_n^* \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) e^{itE_n} \quad (6)$$

Posit. Vernicht. Elektr. Erzeug.

¹²⁾ Siehe z. B. HEISENBERG W., Z. f. Phys. **120**, 673 (1943) und STUECKELBERG, Nature, **153**, 143 (1944).

wobei ψ_n (bzw. ψ_v) die Diracschen Ein-Elektronen-Eigenfunktionen im äusseren Feld sind und $E_n > 0$, $E_v < 0$ ($\bar{\psi} = \psi^* \gamma^4$).

Das materielle Vakuum ist definiert durch

$$\psi^\dagger(x) | \text{mat. Vak} \rangle = \bar{\psi}^\dagger(x) | \text{mat. Vak} \rangle = 0. \quad (7)$$

Aus den Anti-Vertauschungsrelationen¹³⁾

$$\{\bar{\psi}_1^-, \psi_2^-\} = \{\psi_1^+, \bar{\psi}_2^+\} = 0 \quad \{\bar{\psi}_1^+, \psi_2^-\} = \langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle_0, \quad \{\psi_1^+, \bar{\psi}_2^-\} = \langle \psi_1 \bar{\psi}_2 \rangle_0$$

folgt:

1. Produkt zweier Operatoren.

$$\bar{\psi}_1 \psi_2 = \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^- + \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^+ \psi_2^- + \langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle_0 \quad (8)$$

Paar Paar Elek. Posit.
Vern. Erz. Sprung Sprung

$$\psi_2 \bar{\psi}_1 = -\bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ - \bar{\psi}_1^- \psi_2^- - \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^+ \psi_2^- + \langle \psi_2 \bar{\psi}_1 \rangle_0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} [\bar{\psi}_1, \psi_2] = \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^- + \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ - \bar{\psi}_1^+ \psi_2^- + \frac{1}{2} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \quad (10)$$

wobei ($\varepsilon_z = \pm 1$ wenn $E_z \gtrless 0$)

$$\langle \bar{\psi}(x) \psi(x') \rangle_0 = \sum_{E_v < 0} \bar{\psi}_v(\mathbf{r}) \psi_v(\mathbf{r}') e^{i(t-t') E_v} \quad (11)$$

$$\langle \psi(x') \bar{\psi}(x) \rangle_0 = \sum_{E_n > 0} \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}') e^{i(t-t') E_n} \quad (12)$$

$$\langle [\bar{\psi}(x), \psi(x')] \rangle_0 = - \sum_{E_z \leq 0} \varepsilon_z \bar{\psi}_z(\mathbf{r}) \psi_z(\mathbf{r}') e^{i(t-t') E_z} \quad (13)$$

[] bezeichnet auch beim Elektronenfeld den Kommutator.

$\bar{\psi}_1 \psi_2$, $\psi_2 \bar{\psi}_1$ und $[\bar{\psi}_1, \psi_2]$ zerlegen sich also in einen Teil, der die reellen Prozesse beschreibt, und den wir „Einteilchenteil“ nennen und mit $\langle \rangle_1$ bezeichnen, und einen Vakuumserwartungswert, der einem virtuellen Prozess entspricht und „Nullteilchenteil“ genannt werden soll. Der Einteilchenteil ist:

$$\langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle_1 = -\langle \psi_2 \bar{\psi}_1 \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 = \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^- + \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ - \bar{\psi}_1^+ \psi_2^-. \quad (14)$$

2. Produkt zweier Kommutatoren.

Das Produkt zweier Kommutatoren zerlegt sich in drei Teile: Einen „Zweiteilchenteil“, den wir mit $\langle \rangle_2$ bezeichnen; einen Einteilchenteil $\langle \rangle_1$, der reelle und auch virtuelle Prozesse beschreibt; und einen Teil, der nur virtuelle Prozesse beschreibt. Explizit:

$$\frac{1}{4} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_2 = \quad (15)$$

Paar Vern. + Paar Vern.	$\bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Paar Vern. + Posit. Sprung.	$-\bar{\psi}_4^- \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ \bar{\psi}_3^+ - \bar{\psi}_2^- \bar{\psi}_1^+ \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Paar Vern. + Elek. Sprung	$\bar{\psi}_3^- \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ \psi_4^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Paar Vern. + Paar. Erz.	$\bar{\psi}_3^- \psi_4^- \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ + \bar{\psi}_2^- \bar{\psi}_3^- \bar{\psi}_1^+ \psi_4^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_4^- \bar{\psi}_2^+ \bar{\psi}_3^+$
	$+ \bar{\psi}_1^- \psi_2^- \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Posit. Sprung + Paar Erz.	$-\bar{\psi}_2^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^- \bar{\psi}_1^+ - \bar{\psi}_1^- \psi_2^- \psi_4^- \bar{\psi}_3^+$
+ Elek. Sprung + Paar Erz.	$\bar{\psi}_1^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^- \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^+$
+ Paar Erz. + Paar Erz.	$\bar{\psi}_1^- \psi_2^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^-$
+ Vern. zweier Pos. + Erz. zweier Pos.	$-\bar{\psi}_2^- \psi_4^- \bar{\psi}_1^+ \bar{\psi}_3^+$
+ Vern. zweier El. + Erz. zweier El.	$-\bar{\psi}_1^- \bar{\psi}_3^- \psi_2^+ \psi_4^+$

¹³⁾ Wir schreiben der Kürze halber ψ_1 statt $\psi_{e_1}(x_1)$ usw. Zwei Variable i, j können auch gleich sein.

Der letzte Term enthält zum Beispiel die Coulomb- oder Möllerwechselwirkung zweier Elektronen. Ferner

$$\begin{aligned} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 &= \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 \\ &+ \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 + 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 &= \\ \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 &+ 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0. \end{aligned} \quad (17)$$

3. Produkt dreier Kommutatoren.

Hier treten Drei-, Zwei- und Einteilchenteile auf. Wir brauchen nur den Einteilchenteil:

$$\begin{aligned} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_1 &= \\ = \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 &+ \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 \\ &+ \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 \\ &+ 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_4 \psi_5 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \\ &+ 4 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 + 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 \\ &+ 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 + 4 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \\ &+ 4 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 + 4 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \\ &+ 8 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 - 8 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \\ &- 8 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 - 8 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 \\ &+ 8 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 + 8 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_1 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \end{aligned} \quad (18)$$

II. Matricelemente von $\langle H^{tr} P (H^{tr} P H^{tr})_{n\alpha} \rangle_{1 \text{ El.}}^{1 \text{ Ph}}$.

Die obigen Matricelemente lassen sich mittels der Formel (4) und (18) und der Hilfsformeln (1), (5), (6), (11), (12) und (14) des Anhanges I ausdrücken. Die vier ersten Linien der Formel (18) geben keinen Beitrag, weil $\langle j \rangle_0$ in Abwesenheit eines Magnetfeldes Null ist. Die anderen Terme geben Matricelemente der Form

$$\begin{aligned} &\frac{i e^3}{(2\pi)^{9/2}} \sum_{s,z} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}}{\sqrt{8 k_1 k_2 k_3}} \frac{\bar{\psi}_{z_1}(\mathbf{r}_1) (\gamma e^{s_1}(\mathbf{k}_1)) e^{i \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \psi_{z'}(\mathbf{r}_1)}{\Delta E_1} \times \\ &\times \frac{\bar{\psi}_{z_2}(\mathbf{r}_2) (\gamma e^{s_2}(\mathbf{k}_2)) e^{i \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} \psi_{z'_2}(\mathbf{r}_2)}{\Delta E_2} \frac{\bar{\psi}_{z_3}(\mathbf{r}_3) (\gamma e^{s_3}(\mathbf{k}_3)) e^{i \mathbf{k}_3 \mathbf{r}_3} \psi_{z'_3}(\mathbf{r}_3)}{\Delta E_3} \end{aligned} \quad (19)$$

(19) beschreibt einen Übergang von einem angeregten Zustand $|0\rangle$ (eines der drei $z'=0$), in einen Zustand, wo das Elektron im Grundzustand ist (eines der $z=G$) und ein Photon mit Impuls \mathbf{k} existiert. (19) lässt sich durch die Indices $z_1 \dots z_3, s_1 s_2 s_3$ und die Impulse $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ charakterisieren. Die Matricelemente vom Typ (19) sind unten in einer Tafel zusammengestellt. n, n' (bzw. ν, ν') sind Niveaus positiver (bzw. negativer) Energien. Die Indizes s sind weggelassen.

III. Entwicklung von $\delta(E-H-V)$ nach Potenzen von V .

Es sei $H = \alpha \mathbf{p} + \beta m$. Zuerst ist klar, dass

$$\begin{aligned} \xi(E-H-V) &= \xi(E-H) + \xi(E-H) V \xi(E-H) + \\ &+ \xi(E-H) V \xi(E-H) V \xi(E-H) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Dies erkennt man, indem man zum Beispiel die Darstellung $\xi(x) = 1/(x+i\sigma)$, $\sigma \rightarrow 0$, benutzt und nach V entwickelt.

	z_1	k_1	z_1'	z_2	k_2	z_2'	z_3	k_3	z_3'	ΔE_1	ΔE_2
1	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} k' \\ k' \\ -k \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} -k \\ -k \\ k' \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} -k' \\ -k' \\ -k' \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_n - E_\nu + k \\ E_n - E_\nu + k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} k + k' \\ ,, \\ 0^*) \end{matrix} \right\}$
2	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_n - E_\nu + k \\ E_n - E_\nu + k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_G - E_0 + k' + E_n - E_\nu + k \\ ,, \\ E_G - E_0 + E_n - E_\nu \end{matrix} \right\}$
3	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_G - E_0 + k \\ E_G - E_0 + k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_G - E_0 + k' + E_n - E_\nu + k \\ ,, \\ E_G - E_0 + E_n - E_\nu \end{matrix} \right\}$
4	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_\nu - E_n - k \\ E_\nu - E_n - k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_G - E_\nu + k + k' \\ ,, \\ E_G - E_\nu \end{matrix} \right\}$
5	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_\nu - E_n - k \\ E_\nu - E_n - k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_n - E_0 + k + k' \\ ,, \\ E_n - E_0^*) \end{matrix} \right\}$
6	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu' \\ \nu' \\ \nu' \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu' \\ \nu' \\ \nu' \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_G - E_\nu + k \\ E_G - E_\nu + k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_G - E_\nu' + k + k' \\ ,, \\ E_G - E_\nu' \end{matrix} \right\}$
7	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_0 - E_n - k \\ E_0 - E_n - k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_G - E_\nu + k' + E_n - E_0 + k \\ ,, \\ E_G - E_\nu + E_n - E_0 \end{matrix} \right\}$
8	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} \nu \\ \nu \\ \nu \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_\nu - E_G - k \\ E_\nu - E_G - k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_n - E_0 + k' + E_G - E_\nu + k \\ ,, \\ E_n - E_0 + E_G - E_\nu \end{matrix} \right\}$
9	$\left. \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} G \\ G \\ G \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n' \\ n' \\ n' \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} n' \\ n' \\ n' \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_{n'} - E_0 + k \\ E_{n'} - E_0 + k' \\ ,, \end{matrix} \right\}$	$\left. \begin{matrix} E_n - E_0 + k + k' \\ ,, \\ E_n - E_0^*) \end{matrix} \right\}$

*) 1c muss ausgeschlossen werden, da $H^{tr} P H^{tr}$ nicht diagonal sein darf; ebenso die Fälle $n=0$ in 5c und 9c.

Die rechte Seite, mit $E-H-V$ multipliziert, gibt in der Tat 1. $\delta(E-H-V)$ ist der imaginäre Teil von $-\xi/\pi$, also

$$\begin{aligned} \delta(E-H-V) &= \frac{i}{2\pi} [\xi(E-H-V) - \xi^*(E-H-V)] = \\ &= \delta(E-H) + \frac{P}{E-H} V \delta(E-H) + \delta(E-H) V \frac{P}{E-H} + \dots \end{aligned}$$

Man kann auch die „Vorzeichen Funktion“ $\varepsilon(H+V)$ ($\varepsilon(E) = \pm 1$, wenn $E \geq 0$) nach Potenzen von V entwickeln:

$$\begin{aligned} \varepsilon(H+V) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE \varepsilon(E) \delta(E-H-V) = \\ &= \varepsilon(H) + \int_{-\infty}^{+\infty} dE \varepsilon(E) \left[\frac{P}{E-H} V \delta(E-H) + \delta(E-H) V \frac{P}{E-H} \right] + \dots \end{aligned}$$

Intensitätsverteilung eines kontinuierlichen Absorptionsspektrums in Abhängigkeit von Temperatur und Wellenzahl

von P. Sulzer und K. Wieland*) (Universität Zürich).

(21. XI. 1951.)

Summary: The variation of intensity of the visible absorption spectrum ($\lambda\lambda$ 6000–3200 Å) of J_2 vapour has been quantitatively measured as a function of the temperature (423°–1323° K). In a general way for diatomic molecules the variation of intensity of a continuous absorption spectrum with temperature T and frequency ν has been calculated by wave mechanics. Under suitable simplifications (absorption curve — Gaussian curve of constant area) the following formula has been deduced for the extinction coefficient ϵ of a diatomic molecule:

$$\epsilon_T(\nu) = \epsilon_0^m \left[\text{Tg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \exp. - \left[\text{Tg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \right] \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_0^*} \right)^2.$$

This means: ϵ is calculable as a function of T and ν if — apart from the a priori known vibration frequency $\omega_0 = \Theta_0/1,439$ — the following 3 constants are given: ϵ_0^m the maximum extinction coefficient at 0° K, ν_0 the frequency of the absorption maximum and $\Delta \nu_0^*$ the half width of the absorption curve at 0° K. The constants can be obtained from a single absorption curve measured at an arbitrary temperature. A still simpler formula holds for the temperature dependency of the absorption maxima $\epsilon_T^m(\nu = \nu_0)$:

$$\epsilon_T^m = \epsilon_0^m \left[\text{Tg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

The calculated ϵ -values are compared and found to be in fairly good agreement with the measured values of the molecules Cl_2 , Br_2 and J_2 . There is also a good coincidence between the measured and the calculated absorption curves of diphenyl vapour if $(\text{C}_6\text{H}_5)_2$ is treated as a diatomic molecule with $\omega_0 = 265 \text{ cm}^{-1}$ (vibration frequency of the two phenyl groups).

I. Einführung.

a) Problemstellung.

Ausgedehnte Messungen der temperaturbedingten Intensitätsverteilung kontinuierlicher Absorptionsspektren liegen unseres Wissens bisher nur an Cl_2 ¹³⁾, Br_2 ¹⁾, HgJ_2 ¹⁷⁾ und Diphenyl⁵⁾ vor. Als Ergänzung zu diesen wenigen Messungen wird *im experimentellen Teil* unserer Arbeit noch das *Absorptionsspektrum von Joddampf* J_2

*) Gegenwärtige Adresse: University of California, Dep. of Physics, Berkeley 4, California (U.S.A.).

bei verschiedenen Konzentrationen und Schichtdicken in einem relativ grossen Temperaturintervall quantitativ gemessen.

Trägt man den Extinktionskoeffizienten $\varepsilon_T(\nu)$ als Ordinate, die Wellenzahl ν als Abszisse und die absolute Temperatur T als Parameter auf (siehe z. B. Darstellung für Cl_2 Fig. 4), so zeigen alle diese Extinktionskurven ganz offensichtliche Gesetzmässigkeiten. Besonders auffallend ist der von HERCZOG und WIELAND¹¹⁾ festgestellte temperaturunabhängige Schnittpunkt der zu verschiedenen Temperaturen gehörenden Extinktionskurven. Vom Standpunkt der Theorie aus sollten sich solche Gesetzmässigkeiten formelmässig darstellen lassen. Die von anderen Autoren^{30) 14) 3) 6) 28)} früher ausgeführten wellenmechanischen Berechnungen solcher Absorptionskontinua beziehen sich jeweils auf eine *bestimmte Substanz*. Sie benötigen ausserdem eine verhältnismässig *grosse Zahl empirischer Konstanten*. Der *theoretische Teil* unserer Arbeit soll nun einen Versuch bilden, auf wellenmechanischer Basis möglichst *allgemeine* Resultate zu erhalten und mit einem *Minimum* an empirischen Konstanten auszukommen. Eine allzu verfeinerte Rechnung scheint vorerst fraglich zu sein, da die zur Zeit besten Extinktionsmessungen einen mittleren Fehler um 5% aufweisen. Mit Beschränkung auf *zweiatomige* Moleküle und unter geeigneten vereinfachenden Annahmen werden einige einfache Formeln abgeleitet, mit welchen sich die temperaturbedingte Intensitätsänderung eines kontinuierlichen Absorptionsspektrums berechnen lässt. Diese Formeln werden an den Spektren von Cl_2 , Br_2 und J_2 auf ihre Brauchbarkeit geprüft. In einer ausführlicheren Arbeit³¹⁾ werden analoge Überlegungen bei *mehratomigen* Molekülen angestellt und mit den wenigen vorhandenen Messungen verglichen.

b) Die Absorptionsspektren der Halogene J_2 , Br_2 und Cl_2 .

Im Rahmen dieser Arbeit interessieren uns ausschliesslich die beiden langwelligsten Elektronenbandensysteme dieser drei Moleküle, infrarote Vibrationsbandensysteme treten bei diesen gleichatomigen Molekülen ohne Dipolmoment nicht auf.

Wir geben im folgenden eine Übersicht der neuesten Zuordnungen, wie sie nach BAYLISS und REES⁷⁾, AICKIN und BAYLISS²⁾, DARBYSHIRE¹¹⁾ und MULLIKEN²¹⁾ für diese beiden langwelligen Systeme gegeben worden sind.

Demzufolge wäre das langwellige System (*A* in unserer Bezeichnung) von Cl_2 und das kurzwellige (*B*) von Br_2 zusammengesetzt. Die experimentellen Messungen von AICKIN und BAYLISS^{2) 3)} an System *A* von Cl_2 und von ACTON und AICKIN¹⁾ sowie von BAY-

LISS⁶⁾ an System *B* von Br_2 lassen jedoch keine Komplexität erkennen. (Die von DARBYSHIRE¹¹⁾, Seite 108 gegebene Deutung, die drei Systeme umfasst, scheint uns wenig überzeugend.) In Analogie zu J_2 wollen wir daher im folgenden auch bei Br_2 und Cl_2 nur von zwei Systemen sprechen: einem langwelligen schwachen (*A* in unserer Bezeichnung) und einem kurzwelligen starken (*B*). Auf die nicht völlig abgeklärte Termbezeichnung³¹⁾ dieser beiden Systeme wollen wir nicht weiter eintreten.

Molekül	Bezeichnung der Systeme nach		Lage des Absorptionsmaximums		$\epsilon_{\text{max}}(20^\circ)$ in [cm ⁻¹ (Mol/l) ⁻¹]	Deutung des Systems
	BAYLISS ¹⁾	uns	in cm ⁻¹	in Å		
J_2	B	A	14200	7040	40	$^3\Pi_{1u} \leftarrow ^1\Sigma_g^+$
	A	B	19200	5200	800	$^3\Pi_{0^+u} \leftarrow ^1\Sigma_g^+$
Br_2	B	A	20400	4900	75	$^3\Pi_{1u} \leftarrow ^1\Sigma_g^+$
	A	B	24200	4130	150	$\left\{ \begin{matrix} ^1\Pi_u \\ ^3\Pi_{0^+u} \end{matrix} \right\} \leftarrow ^1\Sigma_g^+$
Cl_2	B	A	23600	4235	1,5	$\left\{ \begin{matrix} ^3\Pi_{0^+u} \\ ^3\Pi_{1u} \end{matrix} \right\} \leftarrow ^1\Sigma_g^+$
	A	B	30500	3280	65	$^1\Pi_u \leftarrow ^1\Sigma_g^+$

1. Das Absorptionsspektrum von J_2 .

Unsere eigenen Messungen (vgl. später) beziehen sich auf die Systeme *A* und *B*. Da sich die Intensitätsmaxima dieser beiden Systeme etwa wie 1:20 verhalten, brauchen wir für die nachfolgenden Berechnungen lediglich das starke System *B* zu berücksichtigen. Der langwellige Teil dieses bestbekannten Systems zeigt Bandenstruktur mit Konvergenzstelle bei $\lambda = 4990$ Å. Das Intensitätsmaximum bei etwa 5200 Å liegt also bereits im kontinuierlichen Gebiet, welches sich bis gegen 3600 Å verfolgen lässt¹⁹⁾. Die unterhalb dieser Wellenlänge erneut einsetzende Absorption, herrührend vom System $D(^1\Sigma_u^+ \leftarrow ^1\Sigma_g^+)$, ist für uns ohne Belang (betreffend quantitative Absorptionsmessung an System *D*, vgl. Dissertation SULZER³¹⁾).

2. Das Absorptionsspektrum von Br_2 .

Gasförmiges Brom besitzt im Sichtbaren ein ausgedehntes Bandengebiet, das durch Überlagerung der Banden der Systeme *A* und *B* zustande kommt^{11) 32)}. An die Konvergenzstelle (~ 5100 Å) von

System *B* schliesst ein starkes, aus beiden Systemen zusammengesetztes Kontinuum an^{1) 6)}, das bis etwa 3300 Å reicht. Wegen der dadurch bedingten Überlagerung werden wir in unserer nachfolgenden Berechnung *beide* Systeme *A* und *B* zu berücksichtigen haben.

3. Das Absorptionsspektrum von Cl_2 .

Unter Vernachlässigung des sehr schwachen langwelligen Systems *A*²⁾ beschäftigen wir uns in der nachfolgenden Berechnung nur mit dem starken und (unter normalen Druckbedingungen) völlig kontinuierlichen System *B* im Wellenlängengebiet von 4700 bis 2500 Å¹³⁾.

II. Experimenteller Teil.

Absorptionsmessungen an Joddampf.

1. *Apparatur*: (Detaillierte Angaben vgl. Dissertation SULZER³¹⁾). Alle Messungen wurden oberhalb der Sättigungstemperatur durchgeführt. Die Menge des in das Absorptionsrohr eingefüllten Jodes ergab sich einerseits durch Wägung und andererseits, nach Beendigung der optischen Untersuchung, durch Titration

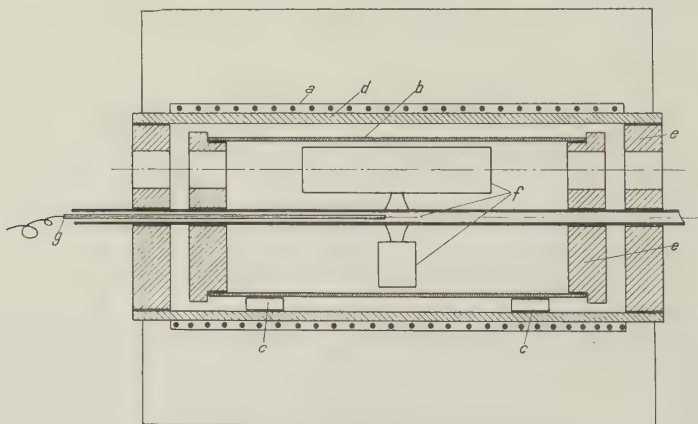


Fig. 1.

Längsschnitt durch den Ofen.

a Heizwicklung, *b* Nickelrohr, *c* Quarzträger, *d* Schamotterohr, *e* Keramikdeckel, *f* Quarzaggregat, *g* Thermoelement.

des in *KJ* gelösten Jodes, wobei keine grösseren Abweichungen als 2% auftraten. Bei zusätzlicher Kenntnis des Volumens des Absorptionsrohres erhielt man dann die Konzentration in Mol *l*. Fig. 1 stellt einen Längsschnitt des mit Kanthaldraht bewickelten Ofens dar, der für die absorptionsspektrographischen Untersuchungen

im Temperaturbereich $T = 423^{\circ}$ – 1323° K diene. Das Quarzaggregat bestand aus vier Absorptionsrohren, die durch Drehen der Achse um je 90° eines nach dem anderen in den Strahlengang gebracht werden konnten. Von den Absorptionsrohren mit je 22 mm lichter Weite standen drei (mit 4, 20 und 100 mm Schichtlänge) miteinander in Verbindung, während das vierte evakuierte Rohr (mit 10 mm Schichtlänge) als Vergleichsrohr diene. Die Temperaturmessungen erfolgten mit einem auf $\pm 1^{\circ}$ geeichten Pt/Pt-Rh-Thermoelement. Im mittleren Teil des Ofens, auf eine Länge von 10 cm, traten bei $T = 1223^{\circ}$ K maximale Temperaturunterschiede bis zu 4° auf. Die quantitativen Absorptionsmessungen wurden unter Benützung einer punktförmigen stabilisierten Wasserstofflampe nach ALMASY⁴⁾ (im U. V.) bzw. einer akkumulatorengespiesenen Wolframbandlampe (im sichtbaren Spektralgebiet) unter Anwendung der in unserem Institut üblichen und mehrfach beschriebenen Sektorenmethode von HALBAN¹⁶⁾ ausgeführt. An Spektralapparaten standen Prismenspektrographen mittlerer Dispersion, als Mikrophotometer ein automatisches Instrument von KIPP EN ZONEN zur Verfügung, für dessen Überlassung wir Herrn Professor ALMASY (Zürich) zu grossem Dank verpflichtet sind. Im U. V. wurden *Ilford-Zenith*-, im sichtbaren Gebiet *Ilford-Panchrom 34^{\circ}*-, im nahen Infrarot *Ilford-Longrange*-Platten verwendet.

2. *Auswertung der Messungen:* Der molare dekadische Extinktionskoeffizient $\varepsilon_T(\nu)$ in $[\text{cm}^{-1}(\text{Mol/l})^{-1}]$ wird nach der bekannten Gleichung:

$$\varepsilon_T(\nu) = \frac{1}{c \cdot d} \log \left(\frac{I_0}{I} \right) \text{ bestimmt.}$$

(c = Konzentration in Mol/l, d = Schichtlänge in cm, I_0/I = Intensitätsverhältnis des einfallenden (I_0) zum austretenden (I) Lichtstrahl von der Frequenz ν .)

Um möglichst viele Messpunkte zu erhalten, und um gleichzeitig eine weitgehende Überprüfung des Beerschen Gesetzes vorzunehmen, verwendeten wir insgesamt drei verschiedene Füllungen von Jod. Untenstehende Tabelle gibt für diese drei Konzentrationen bei vier verschiedenen Temperaturen den zugehörigen Dissoziationsgrad α an, der mit den Gleichgewichtskonstanten K_p von PERLMAN und ROLLEFSON²⁴⁾ berechnet worden ist.

Mol/l $T^{\circ}\text{K}$	0,00114 $\alpha \%$	0,00477 $\alpha \%$	0,0149 $\alpha \%$
873	2,36	1,17	0,62
1023	10,1	5,25	2,55
1173	28,0	14,9	8,12
1323	53,3	32,24	18,85

Resultate: Tabelle 1 enthält die aus unseren Messpunkten gemittelten Extinktionswerte $\varepsilon_T(\nu)$ $[\text{cm}^{-1}(\text{Mol/l})^{-1}]$. Im kontinuierlichen

Tabelle 1.

*Extinktionskoeffizienten ε in $[\text{cm}^{-1} (\text{Mol/l})^{-1}]$ von J_2 .**Bandengebiet.*

$\nu (\text{cm}^{-1})$	13500	13750	14000	14250	14500	14750	15000	15500	16000
$T^\circ K$									
423		22	37	44	33	16	22	43	80
873	30	45	66	77	67	60	82	125	190
1323	82	104	122	128	120	115	139	170	214
$\nu (\text{cm}^{-1})$	16500	17000	17500	18000	18500	19000	19500	20000	
$T^\circ K$									
423	143	202	320	440	498	500	552	560	
573				422	468	480	509	512	
723				405	440	456	467	460	
873	248	300	347	384	414	438	427	410	
1023				364	386	405	395	382	
1173				345	358	371	367	352	
1323	254	280	308	326	331	340	337	323	

Kontinuum.

$\nu (\text{cm}^{-1})$	20500	21000	21500	22000	22500	23000	23500	24000
$T^\circ K$								
423	460	332	230	141	86	45	27	13
573	428	324	235	157	99	56	36	20
723	395	315	241	169	112	70	45	28
873	362	307	245	183	124	83	55	36
1023	340	291	236	185	132	94	65	44
1173	316	276	229	184	140	103	75	52
1323	296	261	221	183	147	112	84	59
$\nu (\text{cm}^{-1})$	24500	25000	25500	26000	26500	27000	27500	28000
$T^\circ K$								
423	7,0	4,2	2,3	1,7	1,1	0,8	0,6	0,4
573	11,0	7,5	4,0	3,3	1,8	1,2	1,0	
723	16	10,0	6,5	4,9	2,6	1,8	1,5	
873	21	13	9	6,5	3,4	2,4	2,0	1,7
1023	27	18	15	10,0	5,8	4,2	3,8	
1173	33	25	21	13	8,0	6,6	5,1	
1323	40	31	26	16	12	8,5	7,0	6,2

Gebiet (20 000—28 000 cm^{-1}) wurden für jede Temperatur ungefähr hundertundfünfzig einzelne Werte bestimmt. Der mittlere Fehler betrug etwa $\pm 3\%$. Im Bandengebiet stiess die Auswertung naturgemäß auf einige Schwierigkeiten. Die in Tabelle 1 angeführten ε -Werte für das Bandengebiet stellen Mittelwerte der Enveloppe der Bandenspitzen dar, aufgenommen bei gleicher Spaltbreite und gleicher Belichtungszeit. Die Fehlergrenze dürfte hier ca. $\pm 15\%$ betragen. Eine graphische Darstellung der gemittelten Messwerte für drei Temperaturen findet sich in Fig. 8. Ein typisches Photogramm mit Aufnahmen bei *einer* Schichtdicke und vier verschiedenen Temperaturen wird in der Dissertation von SULZER wiedergegeben.

III. Theoretischer Teil.

Vereinfachte, wellenmechanische Behandlung kontinuierlicher Absorptionsspektren.

a) Allgemeine Grundlagen.

Die Gesamteigenfunktion Ψ_{tot} eines zweiatomigen Moleküls lässt sich, solange Schwingung und Rotation nicht merklich gekoppelt sind, als Produkt der Elektroneneigenfunktion Ψ_e , der Rotations-eigenfunktion Ψ_r und der Schwingungseigenfunktion Ψ_v darstellen⁸⁾:

$$\Psi_{\text{tot}} = \Psi_e \cdot \Psi_r \cdot \Psi_v, \quad (\text{a})$$

wobei Ψ_e bzw. Ψ_r bzw. Ψ_v Funktionen der Elektronenkoordinaten x_i , bzw. der Rotationsquantenzahl I , bzw. des Kernabstandes $r - r_0$ sind (r_0 = Gleichgewichtsabstand). Die Übergangswahrscheinlichkeit ist ganz allgemein durch das mittlere elektrische Moment $e \cdot R$ des Übergangs bestimmt (e = Elementarladung, R = Übergangsmatrix). Mit M als elektrischem Moment des ganzen Moleküls ergibt sich für das Übergangsmoment:

$$e \cdot R_{n'n''} = \int \Psi_{n'} M \Psi_{n''} dV, \quad (\text{b})$$

worin $\Psi_{n'}$ und $\Psi_{n''}$ die Eigenfunktionen der kombinierenden Molekülterme (n' , n'') bedeuten. Unter Vernachlässigung der in unserem Falle unwesentlichen Molekülrotation und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Moment des Elektronenanteils M_{el} praktisch

unabhängig von der Vibrationsbewegung und damit als konstant angesehen werden darf, gilt einfach:

$$e \cdot R_{n', n''} = M_{el} \cdot \int_0^{\infty} \Psi_v'(r) \cdot \Psi_v''(r) \cdot dr \quad (c)$$

Die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten erfordert also

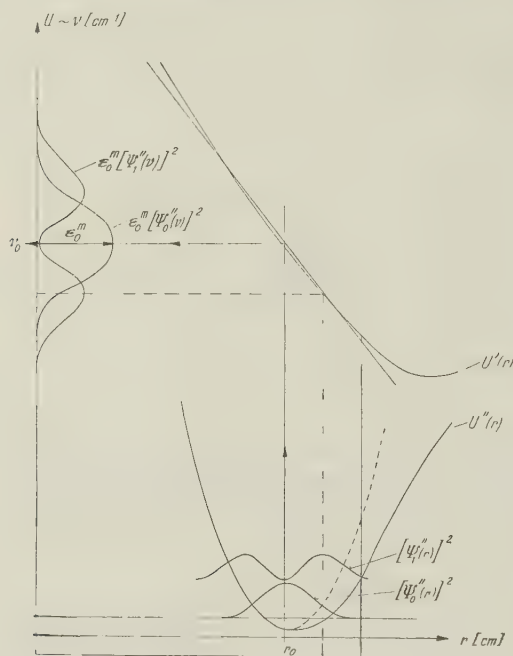


Fig. 2.

Reflexionsmethode nach Condon für die graphische Darstellung eines kontinuierlichen Absorptionsspektrums.

in Näherung von Gleichung (c) nur die Auswertung des sogenannten „Überlappungsintegrals“ der Kerneinschwingungsfunktionen:

$$\int_0^{\infty} \Psi_v'(r) \Psi_v''(r) dr. \quad (d)$$

Gleichung (d) stellt die Ausgangsgleichung für alle unsere weiteren Rechnungen dar.

Eine gute Näherung zur Ermittlung der Intensitätsverteilung in einem kontinuierlichen Molekülspektrum stellt eine von CONDON¹⁰⁾

qualitativ beschriebene graphische Reflexionsmethode dar. Diese soll hier unter vereinfachenden Voraussetzungen mathematisch ausgewertet werden. Nach CONDON erhält man die relative Intensitätsverteilung des aus einem Elektronenübergang resultierenden Absorptionskontinuums dadurch, dass man die quadrierten Eigenfunktionen des Grundzustandes (Fig. 2) an der oberen Potentialkurve reflektiert und die so erhaltenen Werte noch mit dem entsprechenden ν -Wert multipliziert. Die mathematische Formulierung der Reflexion stösst wegen der Krümmung der oberen Potentialkurve $U'(r)$ (Fig. 2), deren mathematische Form meistens nicht bekannt ist, auf Schwierigkeiten. Wir wollen daher folgende vereinfachende Annahmen treffen:

1. In dem für die Absorption massgebenden Gebiet lasse sich die obere Potentialkurve durch eine *Gerade* ersetzen.

2. Im Grundzustand lasse sich das Molekül als *harmonischer* Oszillator auffassen. Die Potentialkurve $U''(r)$ entspricht dann einer Parabel, und die Schwingungseigenfunktionen sind Hermite'sche Orthogonalfunktionen ν ter Ordnung.

3. Es gelte für jede Temperatur:

$$\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_{\nu}}{\nu} d\nu = \text{const.}$$

d. h. die Absorptionsstärke des gesamten Elektronenübergangs bleibe für jede Temperatur dieselbe. Diese übliche Annahme bildet überhaupt die Grundvoraussetzung für jede wellenmechanische Berechnung mit normierten Funktionen. Über die Berechtigung dieser Annahme im allgemeinen und im Falle der Halogenspektren im besonderen siehe MULLIKEN²²⁾ 23). Wir dürfen jedoch den ν -Faktor vernachlässigen und setzen:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu} \cdot d\nu \approx \text{const.}$$

Die Berücksichtigung dieses Faktors bietet zwar keine besonderen Schwierigkeiten, sie erweist sich jedoch als unwesentlich für die relative Intensitätsverteilung selbst über ein grosses Frequenzintervall.

Von diesen vereinfachenden Annahmen ausgehend lässt sich nun die weitere wellenmechanische Berechnung *in aller Strenge* durchführen. Als Ausgangsgleichung erhalten wir:

$$\varepsilon_{\nu}(\nu) \sim [\Psi_{\nu}(r)]^2 \sim [\Psi_{\nu}(\nu)]^2, \quad (1)$$

$\varepsilon_v(\nu)$ = partieller *temperaturunabhängiger* Extinktionskoeffizient bei der Wellenzahl ν , herrührend vom v ten Schwingungsniveau.

In Gleichung (1) darf man $[\Psi_v(r)]^2$ ohne weiteres durch $[\Psi_v(\nu)]^2$ ersetzen, da durch Reflexion an einer Geraden der relative Verlauf einer Kurve nicht geändert wird. Als Proportionalitätskonstante wählen wir das Absorptionsmaximum ε_0^m beim absoluten Nullpunkt, wo sich alle Moleküle im tiefsten Schwingungsterm ($v = 0$) des Grundzustandes befinden. Gleichung (1) wird nun:

$$\varepsilon_v(\nu) = \varepsilon_0^m [\Psi_v(\nu)]^2. \quad (2)$$

ε_0^m kann, wie später gezeigt wird, aus einer einzigen Messung ermittelt werden.

Experimentell direkt messbar ist nur der *temperaturabhängige* totale Extinktionskoeffizient $\varepsilon_T(\nu)$ definiert durch

$$\varepsilon_T(\nu) = \frac{1}{c \cdot d} \log \left(\frac{I_0}{I} \right), \quad (\text{vgl. S. 657}) \quad (3)$$

Die Intensitätsverteilung ist ausser von den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $[\Psi_v(\nu)]^2$ noch von den mit den statistischen Gewichten g multiplizierten Besetzungszahlen N_v der einzelnen Schwingungsniveaus v abhängig. Da für die Schwingungsterme generell $g = 1$ ist, erhält man für die Besetzungszahl von Planckschen Oszillatoren bei Gültigkeit der Maxwell-Boltzmann-Verteilung:

$$N_v = N_{\text{tot}} \frac{e^{-\frac{h \cdot c}{k} \frac{\omega_0}{T} \left(v + \frac{1}{2} \right)}}{\sum_{v=0}^{\infty} e^{-\frac{h \cdot c}{k} \frac{\omega_0}{T} \left(v + \frac{1}{2} \right)}} = e^{-\frac{\Theta_0}{T} v} \left(1 - e^{-\frac{\Theta_0}{T}} \right), \quad (4)$$

wenn die Gesamtzahl aller Moleküle

$$N_{\text{tot}} = \sum_{v=0}^{\infty} N_v \equiv 1$$

gesetzt und als übliche Abkürzung die charakteristische Temperatur

$$\Theta_0 = \frac{h \cdot c}{k} \omega_0 = 1,439 \omega_0$$

eingeführt wird (ω_0 = Eigenschwingungsfrequenz des harmonischen Oszillators in cm^{-1}).

Bedeutend gemäss Gleichung (2) $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_v$ die partiellen temperaturunabhängigen Extinktionskoeffizienten für die Übergänge vom Schwingungsniveau $v = 0, 1, 2 \dots v$, und $N_0, N_1, N_2 \dots N_v$ die zugehörigen relativen Besetzungszahlen, so ergibt sich für den totalen temperaturabhängigen Extinktionskoeffizienten $\varepsilon_T(v)$:

$$\varepsilon_T(v) = \varepsilon_0 N_0 + \varepsilon_1 N_1 + \dots + \varepsilon_v \cdot N_v. \quad (5)$$

Unter Einsetzen der Werte N_v aus Gleichung (4) und mit der Abkürzung $z \equiv e^{-\Theta_v/T}$ wird:

$$\varepsilon_T(v) = (1 - z) (\varepsilon_0 + z \varepsilon_1 + z^2 \varepsilon_2 + \dots z^v \cdot \varepsilon_v + \dots) \quad (6)$$

Durch die Gleichungen (2) und (6) ist die relative Intensitätsverteilung für jede Temperatur völlig bestimmt.

Nach Formel (1) und in Anlehnung an die Bezeichnung von PAULING und WILSON gilt für

$$\varepsilon_v(v) \sim [\Psi_v(\xi)]^2,$$

wobei $\Psi_v(\xi)$ eine Hermitesche Orthogonalfunktion v -ter Ordnung bedeutet. Sie ist gegeben durch

$$\Psi_v(\xi) = G_v \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot H_v(\xi); \quad \xi = \sqrt{\alpha}(r - r_0); \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{4\pi^2 \cdot \mu \cdot c \cdot \omega_0}{h}; \quad \mu = \text{reduzierte Masse}$$

$$G_v = \text{Normierungsfaktor} = \left\{ \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^v \cdot v!} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad (8)$$

$H_v(\xi)$ = Hermitesches Polynom v -ten Grades;

$$H_v(\xi) = (-1)^v e^{\xi^2} \frac{d^v}{d\xi^v} (e^{-\xi^2}). \quad (9)$$

Ferner gilt die Normierungsbedingung:

$$\int_0^\infty [\Psi_v(\xi)]^2 d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad 0 \leq v \leq \infty.$$

Durch Kombinieren von Gleichung (2) und (6) erhält man für den relativen Intensitätsverlauf

$$\varepsilon_T(\xi) = \varepsilon_0^m (1 - z) \{ [\Psi_0(\xi)]^2 + z [\Psi_1(\xi)]^2 + \dots \} \quad (10)$$

$$\text{oder} \quad \varepsilon_T(\xi) = \varepsilon_0^m (1 - z) \sum_{v=0}^{\infty} [\Psi_v(\xi)]^2 z^v.$$

Unter Beachtung folgender Punkte gelingt es, (10) geschlossen darzustellen*). Es gilt:

$$e^{-\xi^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\xi - \frac{k^2}{4}} dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-il\xi - \frac{k^2}{4}} dl. \quad (a)$$

$$\Psi_v(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 2^v \cdot v!} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^v}{d\xi^v} (e^{-\xi^2}). \quad (b)$$

Nun ist gemäss (a)

$$\frac{d^v}{d\xi^v} (e^{-\xi^2}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int (ik)^v e^{ik\xi - \frac{k^2}{4}} dk. \quad (c)$$

Durch Einsetzen von (c) in (10) und Summieren ergibt sich:

$$\sum_{v=0}^{\infty} [\Psi_v(\xi)]^2 z^v = \frac{e^{\xi^2}}{4\pi^{3/2}} \int \int dk dl e^{i(k-l)\xi - \frac{k^2+l^2}{4} + \frac{1}{2}klz}. \quad (d)$$

Die Integration wird ausgeführt, indem man zweimal Formel (a) anwendet, und man findet:

$$\varepsilon_T(\xi) = \varepsilon_0^m \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} e^{-\frac{1-z}{1+z} \xi^2}. \quad (11)$$

Die Variable ξ wird durch die Wellenzahl ν in der Form $\nu - \nu_0/\Delta\nu_0^*$ ersetzt. (Der Faktor $1/\sqrt{\pi}$ spielt für die relative Intensitätsverteilung keine Rolle.) Mit $z = e^{-\Theta_0/T}$ und unter Einführung der hyperbolischen Funktionen wird:

$$\varepsilon_T(\nu) = \varepsilon_0^m \left\{ \operatorname{Tg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\operatorname{Tg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_0^*} \right)^2}. \quad (12)$$

Bezeichnet man mit $\Delta\nu_0^*$ bzw. $\Delta\nu_T^*$ die natürliche Halbwertsbreite, deren Ordinate (Fig. 3) für $T = 0^\circ \text{ K}$, bzw. für beliebige Tempera-

*) Herrn Prof. Dr. FIERZ vom Institut für theoretische Physik an der Universität Basel, von dem die nachfolgende einfache mathematische Ableitung stammt, möchten wir an dieser Stelle unseren besten Dank aussprechen. (Vgl. Dissertation P. SULZER, 1952.)

tur T gerade den e -ten Teil des Maximums ε_0^m bzw. ε_T^m beträgt, so besteht zwischen $\Delta\nu_0^*$ und $\Delta\nu_T^*$ die einfache Beziehung

$$\Delta\nu_T^* = \Delta\nu_0^* \left\{ \text{Ctg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Mit Formel (12) ist die geschlossene Darstellung der temperaturabhängigen Intensitätsverteilung eines Absorptionskontinuums gelungen. Die Absorptionskurven bei verschiedenen Temperaturen lassen sich durch Gaußsche Kurven mit konstantem Flächeninhalt darstellen.

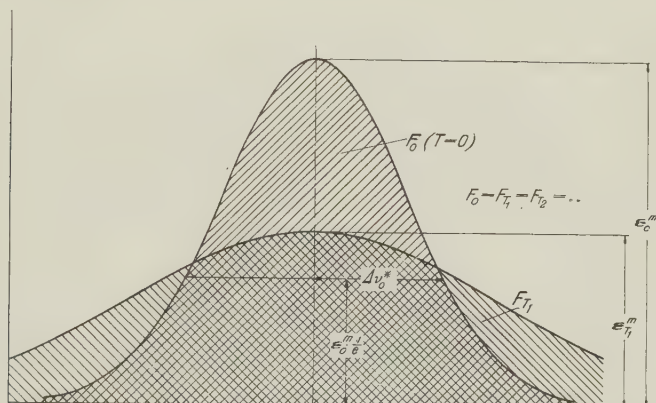


Fig. 3.

Schematische Darstellung der nach Formel 12 berechneten Intensitätsverteilung für zwei Temperaturen ($T_0 = 0$ und T_1). Flächeninhalt $F =$ konstant.

Zur Berechnung der Konstanten ε_0^m , dem Absorptionsmaximum, bei $T = 0^\circ \text{ K}$, lässt sich aus Formel (12) folgende einfache Relation ableiten:

$$\varepsilon_T^m = \varepsilon_0^m \left\{ \text{Tg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

das heisst bei Kenntnis der charakteristischen Temperatur $\Theta_0 = 1,439 \omega_0$ kann unter Anwendung von Gleichung (14) die gesuchte Konstante ε_T^m aus einem bei beliebiger Temperatur T gemessenen Intensitätsmaximum ε_T^m berechnet werden.

Ein interessanter Zusammenhang besteht übrigens zwischen ε_T^m und der mittleren Schwingungsenergie \bar{E}_{v_T} gleicher Temperatur des harmonischen Oszillators:

$$\bar{E}_{v_T} = h c \omega_0 \left\{ (e^{\Theta_0/T} - 1)^{-1} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{h c \omega_0}{2} \text{Ctg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right). \quad (15)$$

Man sieht sofort

$$\varepsilon_T^m \sim (\bar{E}_{v_T})^{-\frac{1}{2}}.$$

Die bei verschiedenen Temperaturen gemessenen Intensitätsmaxima ε_T^m verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen mittleren Schwingungsenergien \bar{E}_{v_T} .

Die zur Berechnung nach Formel (12) benötigten Konstanten ε_0^m , Δv_0^* und ν_0 können also Messungen bei einer einzigen Temperatur entnommen werden.

Unter Auswertung von Gleichung 12 lässt sich ferner eine sehr bequeme Darstellungsmethode für kontinuierliche Spektren ableiten. Durch Logarithmieren von Gleichung (12) und durch Einsetzen von Gleichung (14) und Gleichung (13) ergibt sich:

$$\ln \left\{ \frac{\varepsilon_T(\nu)}{\varepsilon_T^m} \right\} = \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_0^*} \right)^2. \quad (16)$$

Trägt man den Extinktionskoeffizienten logarithmisch und $(\nu - \nu_0)$ linear auf, so erhält man Parabeln. Dies ist zur zeichnerischen Darstellung besonders einfach und erleichtert vor allem die Analyse zusammengesetzter, sich überlappender Kontinua. Bei nur teilweise gemessenen Kontinua (das Maximum liege beispielsweise ausserhalb des Messbereiches) können weitere graphische Methoden unter Anwendung der differentialgeometrischen Eigenschaften der Parabeln entwickelt werden.

Unter Anwendung von Gleichung (12) kann auch das Auftreten der von HERCZOG und WIELAND¹⁾ an den Spektren von Cl_2 , Br_2 und HgJ_2 festgestellten temperaturunabhängigen Schnittpunkte leicht erklärt werden. Wären diese Schnittpunkte völlig scharf, so müsste sich für den Verlauf von $\varepsilon_T(\nu)$ eine Funktion ergeben, die a) der Normierungsbedingung genügt, b) deren Maximum für $T' \rightarrow \infty$ den Ordinaten der Schnittpunkte zustrebt. Die Existenz einer solchen Nicht-Gaußschen Funktion ist sehr unwahrscheinlich.

Berechnet man nun nach unserer Gleichung (23) die Koordinaten der Schnittpunkte der $\varepsilon_0(\nu)$ -Kurve mit einer $\varepsilon_T(\nu)$ -Kurve in Abhängigkeit von der Temperatur, so wird mit:

$$\left\{ \text{Tg} \left(\frac{\Theta_0}{2T} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = b \quad \text{und} \quad \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_0^*} = q$$

$$q_s = \left\{ \frac{\ln b}{b^2 - 1} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

wobei q_s die Abszisse des Schnittpunktes bedeutet. Die Grenzwerte der Schnittpunktskoordinaten für $T \rightarrow 0$ werden:

$$\lim_{T \rightarrow 0} q_s = \lim_{b \rightarrow 1} \left\{ \frac{\ln b}{b^2 - 1} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und $\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon_s = \varepsilon_0^m e^{-\frac{1}{2}} = 0,606 \varepsilon_0^m$ (ε_s = Schnittpunktsordinate = ε -Wert im Schnittpunkt q_s). Beim Cl_2 z. B. sinken die Ordinaten der

Schnittpunkte der $\varepsilon_0(\nu)$ -Kurve mit den Kurven von 290° K bzw. 1038° K von 0,57 ε_0^m auf 0,48 ε_0^m . Es ist daher verständlich, dass innerhalb eines nicht allzu grossen Temperaturintervalls und innerhalb der üblichen Messgenauigkeit von ca. 5% die Absorptionskurven *scheinbar in einem Schnittpunkt* zusammenfallen.

Ein Vergleich unserer Rechnungsmethode mit derjenigen anderer Autoren (STUECKELBERG³⁰) für O₂, GIBSON, RICE und BAYLISS¹⁴) für Cl₂, BAYLISS⁶) für Br₂, ROMAND²⁸) für HCl) wird in der Dissertation³¹) ausführlich diskutiert.

IV. Anwendung der abgeleiteten Formeln zur Berechnung der Absorptionsspektren von Cl₂, Br₂ und J₂.

Im folgenden sollen unsere Formeln (14), (12) und (13), die die temperaturabhängige Intensitätsverteilung in einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum erklären, an den Absorptionskurven von Cl₂, Br₂ und J₂ auf ihre Brauchbarkeit geprüft werden. Wie aus den theoretischen Ableitungen ersichtlich ist, brauchen wir zur vollständigen Bestimmung eines Kontinuums ausser der Schwingungsfrequenz ω_0 noch drei empirische Grössen, nämlich ν_0 = Lage des Absorptionsmaximums, ε_0^m = maximaler Extinktionskoeffizient bei $T = 0^\circ$ K und $\Delta\nu_0^*$ = natürliche Halbwertsbreite bei $T = 0^\circ$ K. Die Werte ε_0^m und $\Delta\nu_0^*$ werden unter Benützung der Formeln (14) bzw. (13) aus den $\varepsilon_{T_1}^m$ - bzw. $\Delta\nu_{T_1}^*$ -Werten berechnet, die man aus einer bei beliebiger Temperatur T_1 gemessenen Absorptionskurve bestimmt.

a) Absorptionsspektrum von Chlor.

$\varepsilon_0^m = 70$, $\Delta\nu_0^* = 3200 \text{ cm}^{-1}$, $\nu_0 = 30500 \text{ cm}^{-1}$, $\omega_0 = 565 \text{ cm}^{-1}$. Die für die Berechnung benötigten Konstanten ε_0^m , $\Delta\nu_0^*$ und ν_0 haben wir aus der von GIBSON und BAYLISS¹³) gemessenen Absorptionskurve bei $T = 291^\circ$ K entnommen. Fig. 4 zeigt die berechneten Werte für drei verschiedene Temperaturen als ausgezogene Kurven. Die entsprechenden *Messwerte*¹³) sind als Punkte eingetragen. Tabelle 2 enthält für zehn Wellenzahlen und sechs Temperaturen die berechneten und gemessenen Extinktionswerte $\varepsilon_T(\nu)$. Ferner zeigt Fig. 5 als ausgezogene Kurve das temperaturabhängige Verhalten des Absorptionsmaximums, berechnet nach Formel (14) Die entsprechenden Messwerte finden sich als Punkte aufgetragen.

Systematische Abweichungen von den Messwerten treten in unseren Berechnungen an Chlor nicht auf. Die grössten Abweichungen

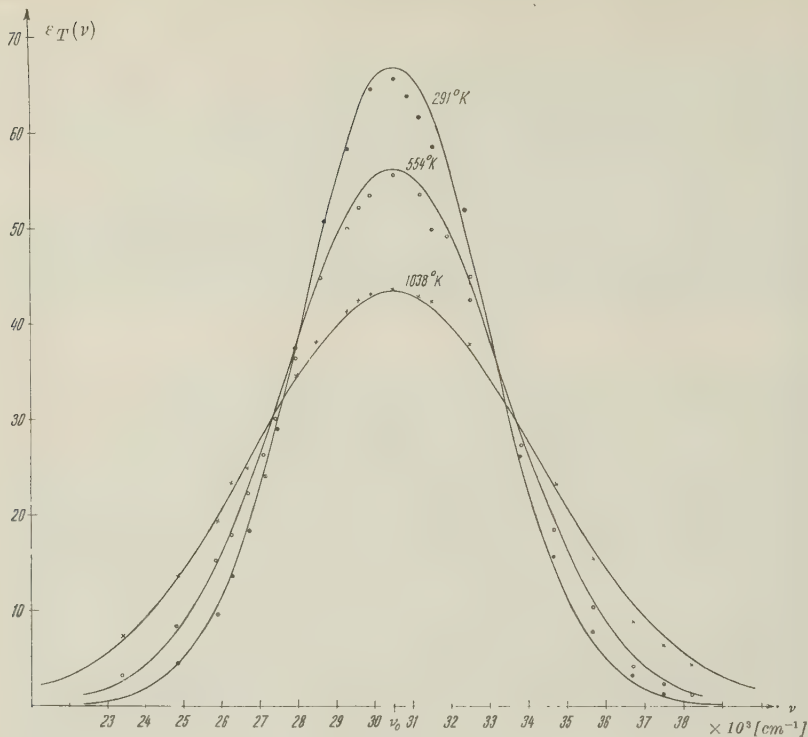


Fig. 4.

Absorptionskontinuum von Cl_2 .

x o • gemessene Werte nach GIBSON und BAYLISS,
 ausgezogene Kurven berechnet nach Gl. (12) mit den Konstanten: $\epsilon_0^m = 70$,
 $\Delta\nu_0^* = 3200 \text{ cm}^{-1}$, $\nu_0 = 30500 \text{ cm}^{-1}$, $\omega_0 = 565 \text{ cm}^{-1}$.

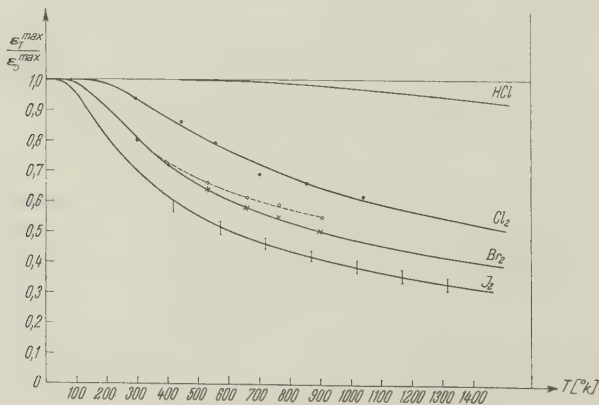


Fig. 5.

Temperaturabhängigkeit der maximalen Extinktionswerte ϵ_T^{\max} , ausgezogene
 Kurven nach Formel 14 berechnet, Punkte gemessen.

betragen ungefähr 5% und liegen somit innerhalb der von GIBSON u. a.¹³⁾ angegebenen Fehlergrenze. Daraus schliessen wir, dass unsere theoretischen Voraussetzungen an diesem Beispiel besonders gut erfüllt sind. Ein weiterer Grund der guten Übereinstimmung besteht darin, dass sich infolge der relativ grossen Grundschnwingungsfrequenz $\omega_0 = 565 \text{ cm}^{-1}$ der Hauptteil der Moleküle auch bei $T = 1038^\circ \text{ K}$ über wenige Schwingungsniveaus verteilt, dass also die Anharmonizität des Oszillators erst bei sehr hohen Temperaturen ins Gewicht fällt. Damit dürfte zusammenhängen, dass beim Chlor eine Verschiebung des Absorptionsmaximums mit zunehmender Temperatur nicht festgestellt wird.

Tabelle 2.

Vergleich der mit Formel 12 berechneten und der von GIBSON u. a. gemessenen Extinktionswerte $\varepsilon [\text{cm}^{-1} (\text{Mol/l})^{-1}]$ von Cl_2 .

$\nu \cdot \text{cm}^{-1}$	$T = 291^\circ \text{ K}$		$T = 441^\circ \text{ K}$		$T = 554^\circ \text{ K}$	
	gem.	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.
38186			0,9	0,95	1,20	1,59
37498	2,7	1,0	1,8	1,94	2,20	2,80
35678	7,9	6,7	9,1	9,06	10,2	10,8
33763	26,0	25,7	27,4	28,3	27,2	29,2
32521	44,7	46,6	41,9	44,8	42,1	43,6
31163	61,3	63,2	56,7	56,1	53,5	53,0
28694	50,6	50,4	47,5	47,8	44,9	45,9
27465	29,0	30,2	29,9	31,1	29,9	32,0
26723	18,2	19,4	19,9	22,0	22,2	23,2
25888	9,4	10,4	12,2	13,4	15,2	15,3

$\nu \cdot \text{cm}^{-1}$	$T = 699^\circ \text{ K}$		$T = 853^\circ \text{ K}$		$T = 1038^\circ \text{ K}$	
	gem.	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.
38186	2,6	2,42	2,7	3,28	4,2	5,0
37498	3,8	4,17	4,4	5,22	6,4	7,25
35678	13,4	12,9	13,6	14,1	15,5	16,2
33763	29,4	29,7	28,9	29,2	30,2	29,7
32521	41,4	41,6	39,7	39,2	37,9	37,4
31163	47,0	48,7	45,5	45,2	42,9	41,9
28694	43,0	43,4	41,5	40,8	38,2	38,6
27465	31,1	32,1	31,3	30,8	31,4	30,9
26723	24,0	24,4	24,3	24,6	26,8	26,0
25886	17,3	17,7	18,5	18,2	19,4	19,7

b) *Absorptionsspektrum von Brom.*

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0A}^m &= 90, & \Delta\nu_{0A}^* &= 1,54 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}, & \nu_{0A} &= 20400 \text{ cm}^{-1} \\ \varepsilon_{0B}^m &= 190, & \Delta\nu_{0B}^* &= 2,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}, & \nu_{0B} &= 24200 \text{ cm}^{-1} \\ \omega_0 &= 323 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

Die Berechnung gestaltet sich infolge gegenseitiger Überlagerung der beiden Einzelkontinua *A* und *B* komplizierter als beim Cl_2 . Wir gehen so vor:

Trägt man die von Acton¹⁾ u. a. gemessenen Extinktionswerte in *logarithmischem Maßstab* für z. B. $T = 293^\circ \text{ K}$ auf (Fig. 6), so setzt sich das Spektrum aus zwei überlagerten Parabeln *A* und *B* zusammen. Ergänzen wir den kurzwelligen Teil von Kurve *A* als Parabel (gestrichelte Kurve in Fig. 6), so ergibt sich Parabel *B* unmittelbar als Differenz der gemessenen Absorptionskurve (ausgezogen in Fig. 6) und der ergänzten Parabel *A*. Die Größen ε_{293}^m und $\Delta\nu_{293}^*$ werden für beide Einzelkontinua abgemessen und daraus unter Benützung von Gleichung (14) und Gleichung (13) ε_{0A}^m bzw. ε_{0B}^m und $\Delta\nu_{0A}^*$ bzw. $\Delta\nu_{0B}^*$ berechnet. Zur Ermittlung der Intensitätsverteilung bei höheren Temperaturen werden beide Einzelkontinua nach Formel (12) berechnet und graphisch addiert.

Die Übereinstimmung mit den von Acton¹⁾ u. a. gemessenen Werten ist befriedigend, besonders im Gebiet 25000 cm^{-1} bis 30000 cm^{-1} (Fig. 7), wo das Einzelkontinuum *B* ungestört erscheint. Im Überlappungsgebiet überraschen einige Abweichungen nicht. Einerseits lässt sich die Lage der beiden Intensitätsmaxima ν_{0A} und ν_{0B} nicht ganz genau lokalisieren, und andererseits wäre auch eine leichte Wellenlängenverschiebung dieser Maxima mit zunehmender Temperatur möglich.

Wegen der komplexen Natur des Absorptionsspektrums von Br_2 kann Formel (14), die die Temperaturabhängigkeit des Intensitätsmaximums eines Einzelkontinuums beschreibt, nicht direkt nachgeprüft werden, denn das experimentell gemessene Intensitätsmaximum ist ja durch Überlagerung der beiden Einzelkontinua *A* und *B* entstanden. Wir berechnen daher nach Formel (12) den Beitrag des Kontinuums *B* an der Stelle ν_{0A} , wo Kontinuum *A* sein Intensitätsmaximum besitzt, für verschiedene Temperaturen.

Die Differenz zwischen dem experimentell gemessenen Wert bei $\nu_{0B} = 24200 \text{ cm}^{-1}$ und dem von Kontinuum *A* herrührenden berechneten Betrag ergibt dann das Maximum von Einzelkontinuum *B*. Diese Werte können jetzt mit den nach Formel (14) berechneten

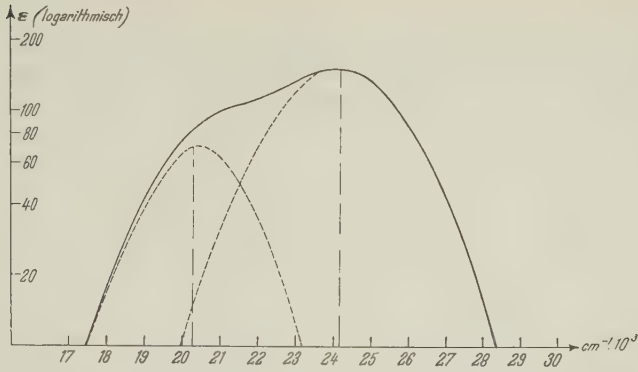


Fig. 6.

Absorptionsspektrum von Br_2 bei $T = 293^\circ \text{K}$, logarithmisch aufgetragen
ausgezogene Kurve: Messkurve nach ACTON,
gestrichelte Kurve: Zerlegung in zwei Einzelkurven (Parabeln).

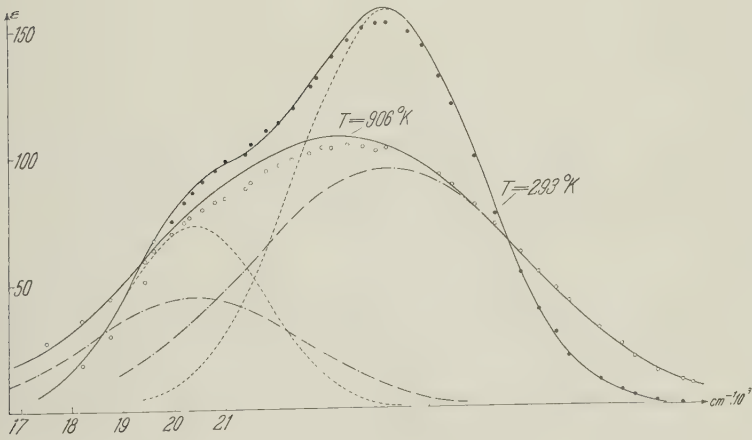


Fig. 7.

Absorptionskurve von Br_2

- - - - - berechnete Einzelkurven für $T = 293^\circ \text{K}$.
- . - . - . berechnete Einzelkurven für $T = 906^\circ \text{K}$.
- graphisch durch Addition der Einzelkurven berechnete Gesamtabsorption.
- } gemessene Punkte nach ACTON bei { 293°K
- oooooooo } 906°K

verglichen werden. In Fig. 5 entsprechen die Punkte, bzw. die durch sie gelegte gestrichelte Kurve den direkt gemessenen, die Kreuze den infolge Überlagerung durch Kontinuum *A* korrigierten Werten. Die letzteren liegen sehr schön auf der nach Formel (14) berechneten (ausgezogenen) Kurve.

c) *Absorptionsspektrum von Jod.*

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^m &= 995; \quad \Delta\nu_0^* = 1,42 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}; \quad \omega_0 = 214,5 \text{ cm}^{-1} \\ \nu_{0,423} &= 19250 \text{ cm}^{-1}; \quad \nu_{0,1323} = 18750 \text{ cm}^{-1}.\end{aligned}$$

Der Vergleich der von uns gemessenen mit den nach Gleichung (12) berechneten ε -Werten wird im *Bandengebiet* von System *B* erschwert. Abgesehen von dem relativ grossen mittleren Fehler von $\pm 15\%$ (vgl. früher) zeigt sich in diesem Gebiet bei etwa 19000 cm^{-1} für *niedere* Temperaturen eine charakteristische Einsattelung, die auch von RABINOWITSCH und WOOD²⁶⁾ sowie von KORTÜM¹⁹⁾ gefunden worden ist. RABINOWITSCH und WOOD haben gezeigt, dass dieser Sattel bei Zugabe von Fremdgasen aufgefüllt wird. Bei genügend hohem Fremdgasdruck (etwa 500 mm) präsentiert sich das Absorptionsspektrum als angenähert symmetrische Gaußsche Kurve. Ein ähnlicher Effekt ist von uns an den bei *höheren* Temperaturen aufgenommenen Absorptionskurven beobachtet worden: die Einsattelung verflacht sich mit zunehmender Temperatur und kann oberhalb etwa 800° K überhaupt nicht mehr beobachtet werden (siehe Fig. 8). Man wäre zunächst versucht, diese Einsattelung, ähnlich wie beim Brom, durch die Überlagerung zweier Einzelsysteme zu erklären. Nun ist aber allgemein bekannt, dass unpolare Moleküle, deren Spektren im gasförmigen Zustand eine durch Überlagerung von Einzelsystemen bedingte Einsattelung aufweisen, diese auch in Lösungsspektren (unabhängig vom inerten Lösungsmittel) beibehalten. So bleibt beispielsweise im Lösungsspektrum von BROM³⁰⁾ der durch die Überlagerung der beiden Systeme *A* und *B* entstandene Sattel eindeutig erhalten. Aus diesem Grunde haben wir das Absorptionsspektrum von in Cyclohexan gelöstem Jod im Gebiet $23000 - 13000 \text{ cm}^{-1}$ untersucht (vgl. Fig. 9, dicke Kurve). Der Sattel ist gänzlich verschwunden, und das Absorptionsspektrum kann mit guter Genauigkeit durch eine Gaußsche Kurve dargestellt werden. (Vergleichshalber sind in Fig. 9 als dünne Kurven noch die Absorptionskurven von gasförmigem Jod bei 0° , 423° und 1323° K dargestellt). Die langwellige Absorptionsbande bei 14200 cm^{-1} , die dem zweiten langwelligen System *A* zuzuschreiben ist, bleibt dagegen auch in Lösung deutlich erhalten.

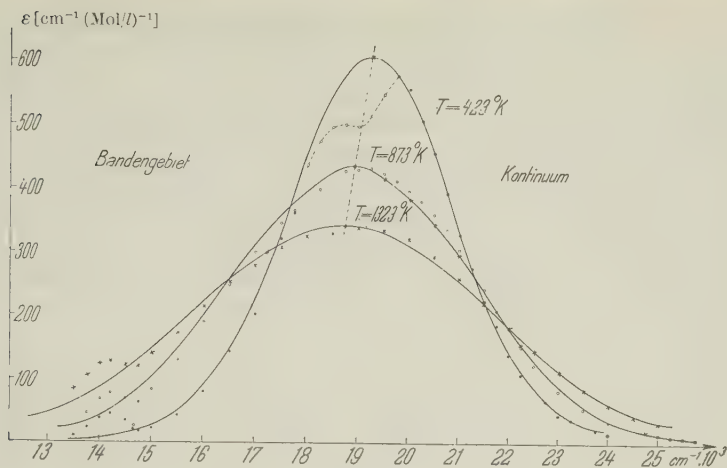


Fig. 8.

Absorptionsspektrum von J_2 bei drei verschiedenen Temperaturen.

Punkte: unsere Messungen; ausgezogene Kurven: nach Formel (12) berechnet.

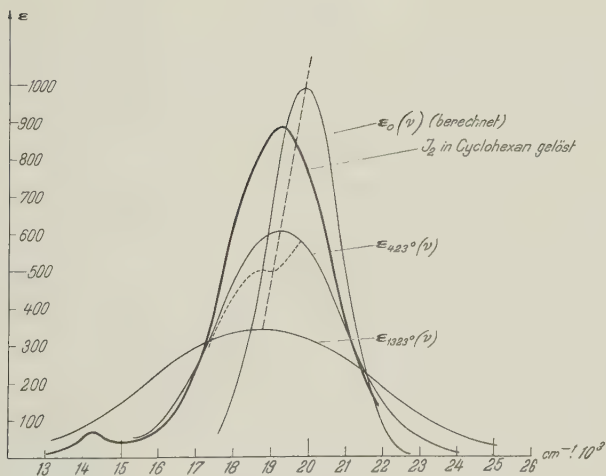


Fig. 9.

Vergleichende Darstellung des Absorptionsspektrums von J_2 bei $T = 0^\circ K$ (nach Formel (12) berechnet; Lage des Maximums angenommen)

$T = 423^\circ K$, $T = 1323^\circ K$ und bei $291^\circ K$ in Lösung.

Wir schliessen daraus, dass im Gegensatz zum Brom die Einsattelung beim Jod nicht durch Überlagerung von zwei Einzelsystemen zustande kommt. Vielmehr möchten wir uns der von Luck²⁰⁾ geäusserten Vermutung anschliessen, wonach die Einsattelung bei Jod einfach auf die scheinbare, durch die Linienstruktur des Bandengebietes bedingte Ungültigkeit des Lambert-Beerschen Gesetzes zurückzuführen ist. Mit zunehmendem Druck (hervorgerufen durch Fremdgaszusatz, Lösungsmittel oder Temperaturerhöhung), werden die einzelnen Rotationslinien mehr und mehr verbreitert, und man nähert sich den normalen, für ein *Kontinuum* geltenden Verhältnissen, wobei der Sattel verschwindet.

Einer Berechnung der Intensitätsverhältnisse mit Hilfe von Formel (12) steht noch als weitere Schwierigkeit die mit zunehmender Temperatur beobachtete Verschiebung des Intensitätsmaximums nach längeren Wellen gegenüber (Fig. 8). Wir können jedoch diese temperaturbedingte Verschiebung leicht empirisch berücksichtigen. Es zeigt sich nämlich, dass sich die Absorptionsmaxima mit steigender Temperatur praktisch linear mit der Frequenz verschieben. Zur Berechnung des Absorptionsspektrums als Funktion von Frequenz und Temperatur gehen wir nun folgendermassen vor: Aus den Messungen bei z. B. 1323° K werden ε_0^m und $\Delta\nu_0^*$ nach Formel (14) bzw. (13) berechnet. (Wir müssen in diesem Falle von Messungen bei höheren Temperaturen ausgehen, bei denen die Einsattelung völlig aufgefüllt ist.) Daraus wird ε_{423}^m , die theoretisch maximale Extinktion bei $T = 423^\circ$ K berechnet, die jedoch wegen des Sattels erwartungsgemäss nicht mit der Messung übereinstimmt. Die gemessenen Extinktionsmaxima ε_{1323}^m und ε_{873}^m werden durch die in Fig. 8 gestrichelte Gerade verbunden und ε_{423}^m darauf abgetragen. Die weitere Rechnung gestaltet sich nun gleich wie beim Chlor, nur mit dem Unterschied, dass die Maxima auf der gestrichelten Geraden liegen und somit die ganzen Absorptionskurven mit zunehmender Temperatur nach längeren Wellen verschoben werden. Fig. 8 zeigt für drei Temperaturen die so berechneten Kurven (ausgezogen). Die Messwerte aus Tabelle 1 sind als Punkte eingetragen. Messung und Berechnung stimmen im *kontinuierlichen* Absorptionsgebiet gut überein. Ein Gang in den Abweichungen wird nicht beobachtet. Die grössten Fehler betragen ca. 6%. Die Übereinstimmung ist selbst im Bandengebiet bei hohen Temperaturen befriedigend. In Anbetracht der grossen Streuung der Messwerte in diesem Gebiet legen wir dieser Tatsache jedoch keine grosse Bedeutung bei.

V. Bemerkung zur Anwendung der abgeleiteten Formeln auf mehratomige Moleküle.

Unsere Formel (12) lässt sich auch sehr gut zur Berechnung der von ALMASY und LÄMMEL⁵⁾ gemessenen Absorption von Diphenyl verwenden, wenn man dieses als zweiatomiges Molekül mit $\omega_0 = 267 \text{ cm}^{-1}$ ²⁷⁾ [= Schwingungsfrequenz der gegeneinander schwingenden Phenylkerne*)] behandelt (vgl. Fig. 10). Bei einer Ausdehnung unserer Rechnungen auf n-atomige Moleküle zeigt sich, dass

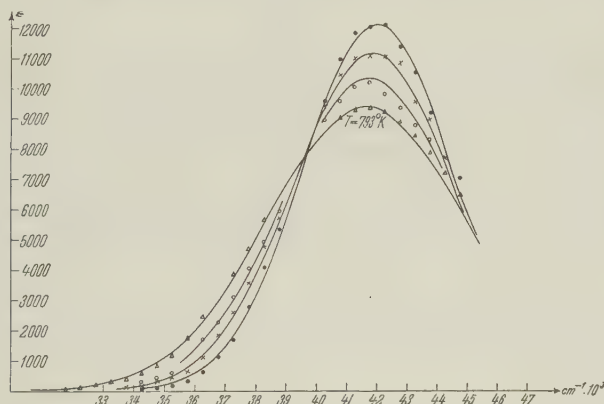


Fig. 10.

Absorptionsspektrum von Diphenyl bei vier Temperaturen (in ° K).

Punkte: ●, x, o, ▲ nach Messungen von ALMASY und LAEMMEL;
ausgezogene Kurven: von uns nach Formel (12) berechnet mit: $\epsilon_0^m = 19150$,
 $\Delta\nu_0^* = 2200$, $\nu_0 = 42200 \text{ cm}^{-1}$, $\omega_0 = 267 \text{ cm}^{-1}$.

$T_1 = 443^\circ \text{ K}$, $T_2 = 533^\circ \text{ K}$, $T_3 = 633^\circ \text{ K}$, $T_4 = 793^\circ \text{ K}$.

eine Berücksichtigung sämtlicher (3n-5) bzw. (3n-6) Schwingungsfrequenzen zu völlig sinnlosen Ergebnissen führen würde. Rein empirisch ergibt sich vielmehr, dass nur einige wenige oder, wie im Falle des Diphenyls, sogar nur eine einzige Schwingungsfrequenz berücksichtigt werden müssen, um Übereinstimmung mit den experimentellen Absorptionskurven zu erzielen. Diese Gesichtspunkte werden ausführlich in der Dissertation von P. SULZER³¹⁾ diskutiert.

Den Herren Proff. W. SAXER (ETH., Zürich) und F. ALMASY (Universität Zürich) sind wir für nützliche Diskussionen zu grossem Dank verpflichtet.

*) Diese Interpretation der ramanaktiven Frequenz 267 cm^{-1} ist nach brieflicher Mitteilung von Professor CH. MANNEBACK (Bruxelles) zum mindesten sehr wahrscheinlich.

Literatur.

- ¹⁾ A. P. ACTON, R. G. AICKIN, N. S. BAYLISS, J. chem. Phys. **4**, 474 (1936).
 - ²⁾ R. G. AICKIN, N. S. BAYLISS, Trans. Farad. Soc. **33**, 1333 (1937).
 - ³⁾ R. G. AICKIN, N. S. BAYLISS, Trans. Farad. Soc. **34**, 1371 (1938).
 - ^{3a)} R. G. AICKIN, N. S. BAYLISS u. A. L. G. REES, Proc. Soc. Roy. (Lond.) **169**, 234 (1938).
 - ⁴⁾ F. ALMASY, Helv. Phys. Acta **10**, 471 (1937).
 - ⁵⁾ F. ALMASY, H. LÄMMEL, Helv. Chim. Acta **33**, 2092 (1950).
 - ⁶⁾ N. S. BAYLISS, Proc. Roy. Soc. (London) A **158**, 551 (1937).
 - ⁷⁾ N. S. BAYLISS, A. L. G. REES, J. chem. Phys. **7**, 854 (1939).
 - ⁸⁾ M. BORN, R. OPPENHEIMER, Ann. Physik **84**, 457 (1927).
 - ⁹⁾ W. G. BROWN, Phys. Rev. **37**, 1007 (1930).
 - ¹⁰⁾ E. U. CONDON, Phys. Rev. **32**, 858 (1928).
 - ¹¹⁾ O. DARBYSHIRE, Proc. Roy. Soc. (London) A **159**, 93 (1937).
 - ¹²⁾ E. ELLIOTT, Proc. Roy. Soc. **123**, 629 (1929); **127**, 638 (1930).
 - ¹³⁾ G. E. GIBSON, N. S. BAYLISS, Phys. Rev. **44**, 188 (1933).
 - ¹⁴⁾ G. E. GIBSON, O. K. RICE, N. S. BAYLISS, Phys. Rev. **44**, 193 (1933).
 - ¹⁵⁾ S. F. GOODEVE, B. A. STEPHENS, Trans. Farad. Soc. **32**, 1517 (1936).
 - ¹⁶⁾ HR. HALBAN, G. KORTÜM, B. SZIGETI, Ztschr. f. El. Ch. **42**, 628 (1936).
 - ¹⁷⁾ A. HERCZOG, K. WIELAND, Helv. Phys. Acta **21**, 6 (1948); **22**, 552 (1949).
 - ¹⁸⁾ G. HERZBERG, Spectra of Diatomic Molecules (1950) (D. van Nostrand Company, New York).
 - ¹⁹⁾ G. KORTÜM, G. FRIEDHEIM, Ztschr. f. Naturforschg. **2a**, 21 (1947).
 - ²⁰⁾ W. LUCK, Ztschr. f. Naturforschg. **6a**, 191 u. 313 (1951).
 - ²¹⁾ R. S. MULLIKEN, J. chem. Phys. **4**, 620 (1936); **8**, 234 (1940); Phys. Rev. **57**, 500 (1940).
 - ²²⁾ R. S. MULLIKEN, J. chem. Phys. **7**, 14 (1939).
 - ²³⁾ R. S. MULLIKEN, J. chem. Phys. **8**, 234 (1940).
 - ²⁴⁾ M. N. PERLMANN and S. K. ROLLEFSON, J. chem. Phys. **9**, 362 (1941).
 - ²⁵⁾ L. PAULING and WILSON, Introd. to Quantum Mechanics, Mc. Graw-Hill (1935).
 - ²⁶⁾ E. RABINOWITSCH, W. G. WOOD, Trans. Farad. Soc. **32**, 540 (1936).
 - ²⁷⁾ M. ROLLA, Boll. Sc. Fac. Chim. Ind. (Bologna) Oct. (1941) XIX.
 - ²⁸⁾ J. ROMAND, Thèse, Paris (1949).
 - ²⁹⁾ F. RUSSELL, J. of Math. and Phys. (1933).
 - ³⁰⁾ E. C. G. STUECKELBERG, Phys. Rev. **42**, 518 (1932).
 - ³¹⁾ P. SULZER, Diss. ETH., Zürich (1951).
 - ³²⁾ D. T. WARREN, Phys. Rev. **47**, 1 (1935).
-

Effet Hall et température dans les conducteurs ferromagnétiques

par J.-P. Jan (Lausanne).

(4. IX. 1952.)

Summary. The HALL effect is considered as a particular case of MEIXNER's phenomenological relations between the electrical and thermal currents, the electrical field and the temperature gradient. These equations make it possible to work out a theory of measurement, indicating that experiments, under certain restrictions, generally give the isothermal HALL effect, and this even if conditions are adiabatic.

In the case of ferromagnetics, the HALL effect is the sum of two terms: the field effect and the magnetization effect; this makes necessary the introduction of two HALL constants.

The magnetization HALL effect is the mean value of the spontaneous effects; more detailed calculations of the mechanism of orientation show what conditions have to be fulfilled if the latter is to be proportional to the observable magnetization.

A number of errors have been studied: finite length of the samples, position of the probes, obliquity of the sample in the magnetic field, and the influence of the sample on the latter.

Theory (PERRIER) shows that knowledge of the HALL effect necessitates the determination of two parameters; in our experiments, we determined the HALL voltage and the resistivity on the same specimens. This allows the calculation of the ordinary parameter (HALL resistivity), the angle of galvanomagnetic anisotropy and the transversal galvanomagnetic conductivity.

The variation with temperatures in the range of -190°C to $+600^{\circ}\text{C}$ has been studied in iron and nickel. The latter parameter presents a thermal variation quite simple.

The magnetization HALL constant depends mostly on purity. For the same metal, it increases with resistivity.

N. B. Ce mémoire est le résumé d'une partie d'une thèse de doctorat présentée à l'Université de Lausanne en juillet 1952. L'autre partie, concernant des expériences effectuées en Hollande, au Laboratoire Kamerlingh Onnes de l'Université de Leiden, avec la collaboration de M. H. M. GIJSMAN, a fait l'objet d'un mémoire paru dans *Physica* et les *Communications from the Kamerlingh Onnes Laboratory of the University of Leiden*¹⁾ ainsi que d'une note à la Société suisse de physique²⁾.

Des mémoires détaillés sur l'ensemble de ce travail sont déposés à la Bibliothèque cantonale et universitaire de Lausanne.

Les unités sont celles du système GIORGI. Il est systématiquement fait usage du terme «*magnétogalvanique*» introduit par PERRIER et plus conforme à l'usage français (facteur \rightarrow effet).

§ 1. L'effet Hall envisagé comme un cas particulier de relations phénoménologiques très générales.

Sur la base de considérations très générales, expérimentales et énergétiques, MEIXNER³⁾ a établi des équations phénoménologiques entre le gradient de température, le champ électrique, le courant électrique et le courant calorifique dans un milieu conducteur anisotrope quelconque :

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \varrho_{ik} j_k + \varepsilon_{ik} G_k + \frac{1}{e} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \\ w_i &= -\pi_{ik} j_k + \lambda_{ik} G_k + \frac{\xi}{e} j_i, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ces équations, qui décrivent les phénomènes électriques, thermiques et thermoélectriques, sont relatives à des coordonnées cartésiennes $Ox_1x_2x_3$. Les indices répétés sous-entendent une sommation de 1 à 3. Les grandeurs sont :

E_i : vecteur champ électrique (des équations de MAXWELL);

$G_i = -\partial T/\partial x_i$: vecteur gradient de température changé de signe;

j_i : vecteur densité de courant électrique;

w_i : vecteur densité de courant calorifique;

e : charge de l'électron (grandeur négative);

ϱ_{ik} : tenseur de résistivité électrique isotherme;

λ_{ik} : tenseur de conductibilité calorifique en l'absence de courant électrique;

ε_{ik} : tenseur de pouvoir thermoélectrique intrinsèque;

π_{ik} : tenseur PELTIER;

ξ : potentiel chimique des électrons, fonction de l'état du milieu, et figurant dans la fonction de répartition de FERMI :

$$f = [e^{(E-\xi)/kT} + 1]^{-1}.$$

Les équations (1) fixent la notation adoptée ici; elle varie d'un auteur à l'autre, surtout en ce qui concerne l'ordre des indices ou les signes des coefficients. La définition de la densité de courant calorifique varie également d'un auteur à l'autre, mais cela n'affecte en rien les grandeurs mesurables.

Dans le cas d'un milieu isotrope soumis à un champ magnétique parallèle à l'axe Ox_3 , ces équations prennent la forme suivante,

invariante par rapport à une rotation d'un angle quelconque autour de cet axe :

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varrho_{11} \dot{j}_1 - \varrho_{21} \dot{j}_2 + \varepsilon_{11} G_1 - \varepsilon_{21} G_2 + \frac{1}{e} \frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \\ E_2 &= \varrho_{21} \dot{j}_1 + \varrho_{11} \dot{j}_2 + \varepsilon_{21} G_1 + \varepsilon_{11} G_2 + \frac{1}{e} \frac{\partial \xi}{\partial x_2}, \\ E_3 &= \varrho_{33} \dot{j}_3 + \varepsilon_{33} G_3 + \frac{1}{e} \frac{\partial \xi}{\partial x_3}, \\ w_1 &= -\pi_{11} \dot{j}_1 + \pi_{21} \dot{j}_2 + \lambda_{11} G_1 - \lambda_{21} G_2 + \frac{\xi}{e} \dot{j}_1, \\ w_2 &= -\pi_{21} \dot{j}_1 - \pi_{11} \dot{j}_2 + \lambda_{21} G_1 + \lambda_{11} G_2 + \frac{\xi}{e} \dot{j}_2, \\ w_3 &= -\pi_{33} \dot{j}_3 + \lambda_{33} G_3 + \frac{\xi}{e} \dot{j}_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

L'effet HALL isotherme ($G_i = 0$) se manifeste dans un milieu plan isotrope perpendiculaire au champ magnétique, donc parallèle au plan Ox_1x_2 . La fonction ξ y est alors constante, et les deux premières relations (2) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varrho_{\perp} \dot{j}_1 - \varrho_H \dot{j}_2, \\ E_2 &= \varrho_H \dot{j}_1 + \varrho_{\perp} \dot{j}_2, \\ E_3 &= \varrho_{\parallel} \dot{j}_3, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

en posant

$\varrho_{21} = \varrho_H$: résistivité de HALL isotherme;

$\varrho_{11} = \varrho_{\perp}$: résistivité isotherme pour un champ magnétique perpendiculaire au courant;

$\varrho_{33} = \varrho_{\parallel}$: résistivité isotherme pour un champ magnétique parallèle au courant.

Le milieu étudié a la forme d'une plaque rectangulaire parcourue par une nappe de courant uniforme parallèle à Ox_1 (fig. 1). Les formules se simplifient encore et donnent :

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varrho_{\perp} \dot{j}, \\ E_2 &= \varrho_H \dot{j}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

où $\dot{j}_1 = \dot{j}$, $\dot{j}_2 = \dot{j}_3 = 0$.

La différence de potentiel entre les deux points A et B , situés sur une perpendiculaire aux lignes de courant, vaut

$$V_A - V_B = U_{AB} = E_2 b = \varrho_H \dot{j} b, \quad (5)$$

où b désigne la distance AB égale dans le cas de la figure à la largeur de la plaque. Dans la littérature, cette différence de potentiel est donnée par la formule

$$U_{AB} = RB \dot{j} b, \quad (6)$$

où B désigne l'induction magnétique à l'intérieur de l'échantillon étudié et R la constante de HALL. La grandeur

$$\varrho_{21} = \varrho_H = RB \quad (7)$$

est ainsi celle qui représente généralement l'effet HALL; elle est nommée ici *résistivité de Hall* et n'est autre que l'une des composantes du tenseur de résistivité isotherme dans un champ magnétique.

L'angle φ formé par le champ électrique et la densité de courant est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\varrho_H}{\varrho_{\perp}}. \quad (8)$$

Le phénomène de HALL n'est autre que l'un des aspects de l'anisotropie de la conductibilité électrique causée par le champ magnétique. L'angle φ en est une autre représentation, que des méthodes de mesure comme celle de CORBINO mettent directement en évidence.

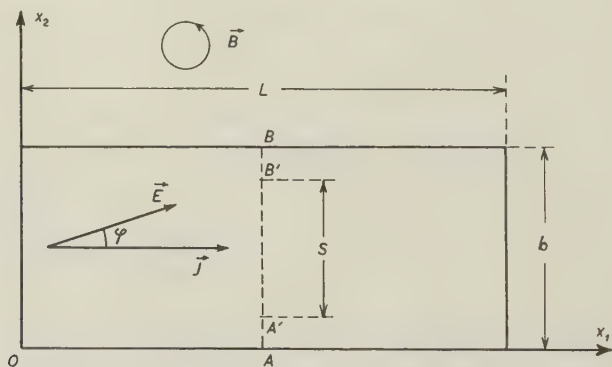


Fig. 1.

Position de la plaque par rapport aux axes de coordonnées.

La connaissance complète du phénomène de HALL nécessite la mesure de deux grandeurs sur le même échantillon, puisque les équations (4) contiennent deux paramètres indépendants, ϱ_{\perp} et ϱ_H . Les expériences décrites dans ce mémoire ont permis la mesure de ces deux grandeurs par des méthodes classiques; l'angle φ se calcule alors par la formule (8).

Il est indispensable que les deux paramètres indépendants soient mesurés sur le même échantillon; ils sont en effet très sensibles au degré de pureté du métal.

Un troisième paramètre a été étudié. La résistivité de HALL:

$$\varrho_H = \frac{E_2}{j} = \frac{E \sin \varphi}{j} \quad (9)$$

est le rapport entre la composante du champ électrique perpendiculaire au courant et la densité de courant. La *conductibilité magnétogalvanique transversale* γ_H est le rapport entre la composante de densité de courant perpendiculaire au champ électrique et ce dernier:

$$\gamma_H = \frac{j \sin \varphi}{E} = \frac{\varrho_H}{\varrho_1^2 + \varrho_H^2} \cong \frac{\varrho_H}{\varrho_1^2}, \quad (10)$$

la formule approchée tenant compte de l'inégalité $\varrho_H \ll \varrho_1$. Ce paramètre, introduit par PERRIER⁴⁾, présente une variation thermique très simple comme l'ont déjà montré des expériences préliminaires⁵⁾.

L'effet HALL est envisagé ici comme un caractère tensoriel de la résistivité. Cette conception simplifie notablement les raisonnements et permet des calculs d'une grande généralité sans faire intervenir de notion ambiguë telle qu'une force électromotrice de HALL.

§ 2. L'effet Hall des ferromagnétiques.

a) *Effet champ et effet aimantation.* La formule (7) ne s'applique pas aux ferromagnétiques où la résistivité de HALL n'est pas, pour une température donnée, proportionnelle à l'induction magnétique, comme c'est le cas pour la plupart des autres métaux. Les résultats expérimentaux sont bien représentés en introduisant deux constantes de HALL comme le font PUGH, ROSTOKER et SCHINDLER⁶⁾: une *constante de Hall aimantation* R_1 (extraordinary HALL constant) relative à l'intensité d'aimantation, et une *constante de Hall champ* R_0 (ordinary HALL constant) relative au champ magnétique:

$$\varrho_H = R_0 \mu_0 H + R_1 J = R_0 (\mu_0 H + \alpha J), \quad (11)$$

avec

$$\alpha = \frac{R_1}{R_0}. \quad (12)$$

Le rapport α des deux constantes de HALL est supérieur à l'unité; c'est le *paramètre du champ* (field parameter).

L'aimantation et le champ n'ont donc pas le même effet sur les électrons de conduction. Si, dans le domaine microphysique, le champ magnétique appliqué est uniforme, il n'en est certainement pas de même de l'intensité d'aimantation. Comme la répartition

des électrons de conduction n'est elle-même pas uniforme, il n'y a rien d'étonnant à ce que l'effet moyen, décrit par les champs *macro-physiques*, soit différent pour le champ magnétique et pour l'intensité d'aimantation. En d'autres termes, la moyenne des phénomènes microphysiques ne peut pas toujours être décrite simplement à l'aide des champs macrophysiques.

L'expérience fournit des courbes comme celle de la fig. 2, obtenue sur un échantillon de nickel du commerce. Dans la région (A), le champ magnétique à l'intérieur de l'échantillon est négligeable :

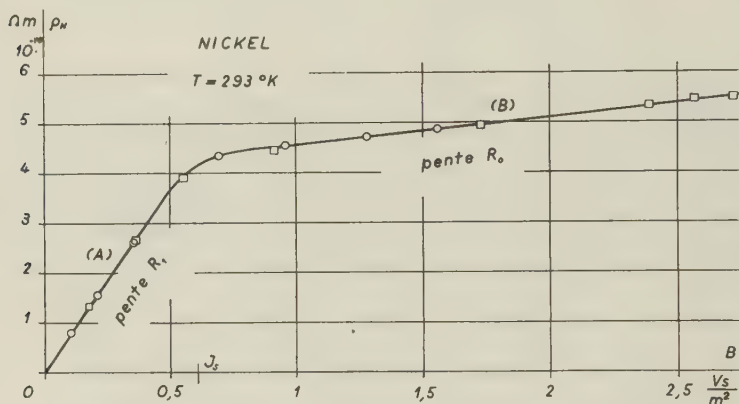


Fig. 2.

Résistivité de HALL du nickel en fonction de l'induction magnétique, à la température du laboratoire. L'effet aimantation et l'effet champ sont nettement séparés. Les mesures de Lausanne (carrés) et de Leyde (cercles) sont en excellent accord. J_s est l'intensité d'aimantation spontanée.

l'effet aimantation apparaît seul. Dans la région (B), l'effet champ est isolé, car l'aimantation a atteint sa valeur de saturation et ne varie plus. C'est seulement au voisinage de la température de CURIE que les deux effets ne sont plus nettement séparés car champ et aimantation varient simultanément.

De même que la courbe d'aimantation, l'effet HALL mesuré sur des échantillons plans ne présente pas d'hystérèse, à cause du champ démagnétisant très élevé.

La formule (11) est la plus simple décrivant les résultats expérimentaux, mais il est possible d'imaginer une infinité d'expressions (par exemple non linéaires pour certaines valeurs de H et de J) rendant tout aussi bien compte des expériences. La résistivité de HALL ρ_H est en effet envisagée comme fonction des deux variables J et H , mais les expériences classiques ne permettent pas de les faire varier indépendamment l'une de l'autre.

En vertu de la relation

$$B = \mu_0 H + J, \quad (13)$$

ϱ_H peut également s'écrire

$$\varrho_H = R_0[B + (\alpha - 1) J] = R_0[\alpha B + (1 - \alpha) \mu_0 H], \quad (14)$$

donc s'exprimer en fonction de deux quelconques des trois grandeurs B , H et J , choisies comme variables indépendantes. Il est ainsi nécessaire de préciser que R_0 est la constante champ à *intensité d'aimantation constante*, et R_1 la constante aimantation à *champ magnétique constant*.

Tous les paramètres envisagés sont des fonctions de la température, illustrées par les résultats expérimentaux.

b) *Effets spontanés*. L'aimantation spontanée des domaines de WEISS doit être la cause d'un effet HALL spontané, comme l'a supposé PERRIER⁷⁾. L'effet HALL aimantation est la moyenne de tous les effets spontanés, ceux-ci se compensant quand l'aimantation observable est nulle. Un calcul effectué par PERRIER⁸⁾ et plus tard par PUGH et ses collaborateurs⁶⁾ montre que cet effet d'orientation est sensiblement proportionnel à l'aimantation observable, ce qui justifie l'intervention de J au premier degré dans la formule (11).

Le calcul qui suit va permettre de préciser dans quelle mesure les hypothèses conduisent à ce résultat. Dans chaque domaine de WEISS, le champ électrique et la densité de courant sont reliés par l'équation (3) à laquelle il convient de donner une forme vectorielle indépendante de la direction de l'aimantation spontanée, qui varie d'un domaine à l'autre:

$$\vec{E} = \varrho_{\perp s} \vec{j} + \vec{n} (\vec{j} \cdot \vec{n}) (\varrho_{\parallel s} - \varrho_{\perp s}) + \varrho_{Hs} \vec{n} \times \vec{j}. \quad (15)$$

L'indice s rappelle qu'il s'agit des résistivités spontanées. La grandeur

$$\vec{n} = \frac{\vec{J}_s}{J_s} \quad (16)$$

est un vecteur unité dans la direction de l'aimantation spontanée \vec{J}_s . Il est bien entendu que les champs des vecteurs \vec{E} , \vec{j} , \vec{J}_s ne sont pas uniformes: c'est seulement en moyenne, sur un grand nombre de domaines, que le courant électrique circule dans la direction Ox_1 (fig. 1).

L'observation fournit la valeur moyenne sur un grand nombre de domaines de la composante E_2 du champ électrique, soit :

$$\overline{E_2} = \frac{1}{b} \int_0^b [\varrho_{\perp s} j_2 + (\varrho_{\parallel s} - \varrho_{\perp s}) n_2 (\vec{n} \cdot \vec{j}) + \varrho_{Hs} (n_3 j_1 - n_1 j_3)] dx_2. \quad (17)$$

Le calcul des intégrales nécessiterait la connaissance de la répartition des directions des aimantations spontanées ainsi que de l'orientation des lignes de courant dans les divers domaines. Pour aboutir à la proportionnalité de la résistivité de HALL à l'aimantation observable, certaines hypothèses simplificatrices sont nécessaires.

Le calcul de PERRIER⁸⁾ admet l'uniformité du champ électrique et une symétrie de révolution des directions d'aimantation spontanée des divers domaines autour de Ox_3 . Il aboutit à la proportionnalité de la conductibilité magnétogalvanique transversale γ_H à l'aimantation observable.

Les calculs de PUGH et ses collaborateurs⁶⁾ supposent par contre une répartition uniforme du courant, et des valeurs des résistivités spontanées ($\varrho_{\perp s}$, $\varrho_{\parallel s}$, ϱ_{Hs}) indépendantes de l'orientation de l'aimantation spontanée par rapport aux axes des cristaux élémentaires.

Dans ces conditions, $j_1 = j$, $j_2 = j_3 = 0$, et (17) devient

$$\overline{E_2} = j(\varrho_{\parallel s} - \varrho_{\perp s}) \frac{1}{b} \int_0^b n_1 n_2 dx_2 + j \varrho_{Hs} \frac{1}{b} \int_0^b n_3 dx_2. \quad (18)$$

En admettant encore que la première intégrale soit nulle, ce qui est réalisé si les aimantations spontanées des divers domaines présentent une symétrie de révolution autour de Ox_3 , il reste

$$\overline{E_2} = j \varrho_{Hs} \int_0^b \frac{J_{3s}}{J_s} dx_2 = \varrho_{Hs} \frac{J}{J_s} j. \quad (19)$$

La comparaison à (4) montre que

$$\varrho_H = \frac{\varrho_{Hs}}{J_s} J; \quad (20)$$

la résistivité de HALL est proportionnelle à l'aimantation observable pour l'effet aimantation (l'effet champ a été laissé systématiquement de côté).

Il convient de remarquer que ϱ_H et γ_H ne peuvent pas être tous deux proportionnels à l'aimantation observable. En effet, la formule (10) qui les relie fait intervenir la résistivité ϱ_{\perp}^2 , dont la variation en fonction de l'aimantation observable n'est pas linéaire. Comme les deux calculs présentent le même degré d'approximation,

il est probable qu'aucun de ces deux paramètres n'est rigoureusement proportionnel à l'aimantation observable. Cette proportionnalité est toutefois bien vérifiée dans les limites de nos expériences. Une précision de l'ordre du millième, pratiquement irréalisable pour ce genre de mesures, pourrait seule la mettre en défaut.

En résumé, la proportionnalité de l'effet HALL aimantation à l'aimantation observable n'est assurée théoriquement qu'en première approximation; ϱ_H et γ_H ne peuvent être tous deux proportionnels à J que si l'on néglige la variation magnétique de résistance. Le calcul suppose d'autre part une symétrie suffisante de la répartition des directions des aimantations spontanées des divers domaines et que les résistivités spontanées (résistivité de HALL comprise) soient indépendantes de la direction de l'aimantation spontanée relativement aux axes cristallographiques.

La formule (20) montre que la mesure de l'effet aimantation permet le calcul de la résistivité de HALL spontanée:

$$\varrho_{Hs} = \varrho_H \frac{J_s}{J} \cong \varrho_H \frac{J_s}{B} = R_1 J_s \quad (21)$$

car dans les champs extérieurs faibles, $H \cong 0$ et $B \cong J$. La mesure fournit ϱ_H et B . L'aimantation spontanée J_s est le produit de la masse spécifique, mesurée sur les échantillons et corrigée à l'aide du coefficient de dilatation, et de l'intensité d'aimantation par unité de masse, grandeur peu sensible aux impuretés et à la structure; il a été fait usage des données de WEISS et FORRER^{9) 10)} pour le nickel, et de celles de PREUSS¹¹⁾ pour le fer. Il est ainsi possible de déterminer les effets spontanés sans atteindre la saturation, comme l'a remarqué PERRIER¹²⁾.

Un calcul simple montre que les droites (A) et (B) représentant respectivement l'effet aimantation et l'effet champ (fig. 2) se coupent au point d'abscisse égale à l'aimantation spontanée. L'expérience décèle des écarts à cette règle, écarts légèrement supérieurs aux incertitudes expérimentales. Ils proviennent probablement du fait que l'effet HALL aimantation n'est pas en toute rigueur proportionnel à l'aimantation observable, comme le montrent les calculs ci-dessus.

§ 3. Etude de diverses causes d'erreurs.

a) *Théorie de la mesure.* La résistivité de HALL s'obtient par la mesure d'une différence de potentiel. Cette mesure est compliquée par l'apparition d'une différence de température entre les points A et B (fig. 1) ou *effet Ettingshausen*. A cause des effets thermo-électriques, les grandeurs mesurées peuvent différer sensiblement

de celles que l'on désire obtenir. Les équations phénoménologiques de MEIXNER permettent de prévoir ce qui sera mesuré. Elles ont été appliquées par KOHLER¹³⁾ à l'effet NERNST et le sont ici à l'effet HALL.

L'effet HALL isotherme a été examiné au § 1. Il est donné par les relations

$$G_i = 0; \quad E_2 = \varrho_{21} j = R_i B j; \quad (22)$$

la constante de HALL porte ici l'indice i pour désigner les conditions isothermes. Pour les ferromagnétiques, B doit être remplacé par $\mu_0 H + \alpha J$.

Les effets transversaux adiabatiques sont définis dans la littérature par les conditions

$$w_2 = 0, \quad G_1 = 0. \quad (23)$$

Ils ne sont ainsi adiabatiques que dans la direction Ox_2 . Les équations (2) donnent alors:

$$G_2 = \frac{\pi_{21}}{\lambda_{11}} j = P B j, \quad (24)$$

$$E_2 = \left[\varrho_{21} + \left(\varepsilon_{11} - \frac{1}{e} \frac{d\xi}{dT} \right) \frac{\pi_{21}}{\lambda_{11}} \right] j = R_a B j. \quad (25)$$

Le gradient de température transversal G_2 n'est autre que l'effet ETTINGSHAUSEN, représenté par la constante P . Le champ électrique transversal E_2 fait intervenir une constante de HALL adiabatique

$$R_a = R_i + \left(\varepsilon_{11} - \frac{1}{e} \frac{d\xi}{dT} \right) P \quad (26)$$

qui diffère de la constante isotherme par un terme d'origine thermoélectrique dû à l'effet ETTINGSHAUSEN et par un terme *non mesurable* dû au potentiel chimique et qui peut être laissé de côté:

$$R_a = R_i + \varepsilon_{11} P \quad (27)$$

Une définition différente du courant d'énergie calorifique pourrait du reste conduire directement à cette dernière expression.

La fig. 3 schématise le dispositif de mesure de la tension de HALL par compensation. Les points A et B entre lesquels on se propose de mesurer la différence de potentiel, et qui se trouvent aux températures T_A et T_B , sont reliés, par des fils homogènes de pouvoir thermoélectrique intrinsèque supposé isotrope ε_s , à une enceinte isotherme à température T_0 . Cette dernière contient un galvanomètre employé comme instrument de zéro et un compensateur de résistance r parcouru par un courant d'intensité I . L'intégration de la

première équation (1) le long du contour fermé $ACEFDBA$ conduit, après calculs, et en supposant les champs uniformes dans la plaque, à la valeur suivante lue au potentiomètre :

$$U = rI = \varrho_{21} j b + \int_A^B \varepsilon_{21} G_1 dx_2 + \int_{T_A}^{T_B} (\varepsilon_s - \varepsilon_{11}) dT. \quad (28)$$

Dans ce cas très général, les mesures fournissent donc :

1° un terme dû à l'effet HALL isotherme ;
2° un terme dû au gradient de température longitudinal (effet NERNST), et

3° la f. é. m. du couple thermoélectrique plaque-sondes entre les températures T_A et T_B , où peuvent intervenir les effets RIGHI-LEDUC et ETTINGSHAUSEN.

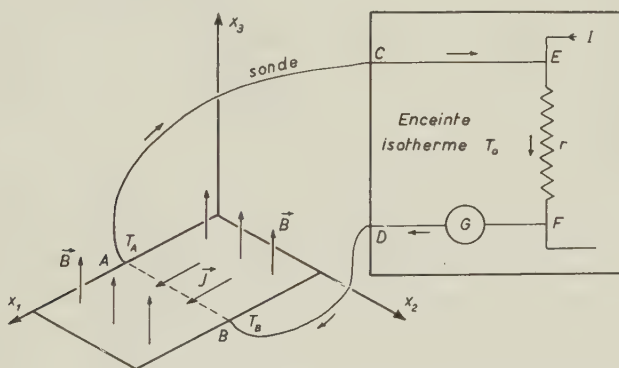


Fig. 3.

Représentation schématique de la mesure de l'effet HALL par compensation.

Dans les conditions isothermes :

$$G_1 = G_2 = 0, \quad T_A = T_B, \quad U = \varrho_{21} j b = R_i B j b, \quad (29)$$

et la mesure fournit bien l'effet HALL isotherme. Dans les conditions adiabatiques, on trouve, en supposant les températures T_A et T_B très voisines :

$$\begin{aligned} U &= \left[\varrho_{21} + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_s) \frac{\pi_{21}}{\lambda_{11}} \right] j b = \\ &= [R_i + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_s) P] B j b = (R_a - \varepsilon_s P) B j b. \end{aligned} \quad (30)$$

La mesure fournit ainsi la tension de HALL isotherme, augmentée de la f. é. m. du couple thermoélectrique formé par la plaque et les sondes entre les températures T_A et T_B . Le terme perturbateur

($\varepsilon_{11} - \varepsilon_s$) P est généralement négligeable, surtout si l'on prend soin de choisir des sondes du même métal que la plaque. Que les conditions soient isothermes, adiabatiques ou autres, la mesure fournit alors sensiblement l'effet HALL isotherme. *La constante de HALL adiabatique de la formule (27) n'est pas mesurable.*

Le pouvoir thermoélectrique intrinsèque de sondes ferromagnétiques est anisotrope et dépend de l'aimantation. Une précaution supplémentaire consiste à éviter que les sondes ne traversent une région où la température et le champ magnétique varient simultanément.

b) *Influence de la plaque sur le champ magnétique.* Les grandeurs magnétiques fondamentales sont le champ magnétique H , l'induction magnétique B et l'intensité d'aimantation J à l'intérieur de l'échantillon étudié, reliées par l'équation (13). La seule qui soit directement mesurable est l'induction magnétique B , car elle est égale à celle qui règne à l'extérieur de la plaque (perpendiculaire à un champ uniforme).

La présence d'une plaque ferromagnétique modifiant quelque peu le champ magnétique, elle doit être mesurée en présence d'un échantillon témoin.

c) *Influence de la longueur de la plaque sur les mesures.* L'uniformité postulée des lignes de courant électrique dans la plaque étudiée n'est réalisée que si elle est suffisamment longue. Le courant est amené par deux fortes électrodes de cuivre soudées le long des petits côtés de la plaque; chacun d'eux est alors pratiquement équipotentiel. Il est clair que la tension de HALL tend vers zéro si la longueur L de la plaque tend vers zéro, les électrodes d'aménée court-circuitant alors les sondes de mesure en A et B (fig. 1). La tension mesurée peut ainsi être trop faible.

ISENBERG, RUSSEL et GREENE¹⁴⁾ ainsi que VOLGER¹⁵⁾ ont calculé le potentiel électrostatique en tous les points de la plaque étudiée. Leur calcul est une première approximation basée sur la petitesse de l'angle φ qui permet de négliger tous les termes où son degré est supérieur au premier. Le rapport η de la tension de HALL mesurée sur la plaque de longueur L et de largeur b à la tension que fournirait une plaque de même largeur, mais infiniment longue parcourue par le même courant vaut alors

$$\eta = \frac{8}{\pi^2} \frac{L}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \operatorname{th} \frac{2k+1}{2} \frac{\pi b}{L}. \quad (31)$$

La courbe 1 de la fig. 4 représente η en fonction du rapport L/b .

Les plaques utilisées ici portaient leurs sondes en A' et B' (fig. 1), points situés à la distance s , inférieure à b . Dans ces conditions, le calcul donne

$$\eta = \frac{8}{\pi^2} \frac{L}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{2k+1}{2} \frac{\pi s}{L}}{\operatorname{ch} \frac{2k+1}{2} \frac{\pi b}{L}}. \quad (32)$$

Une étude expérimentale de l'influence de la longueur a été effectuée par HALL¹⁶), qui aboutit à la formule empirique

$$\eta = 1 - 0,157 \sqrt[3]{\frac{L}{b}}, \quad (33)$$

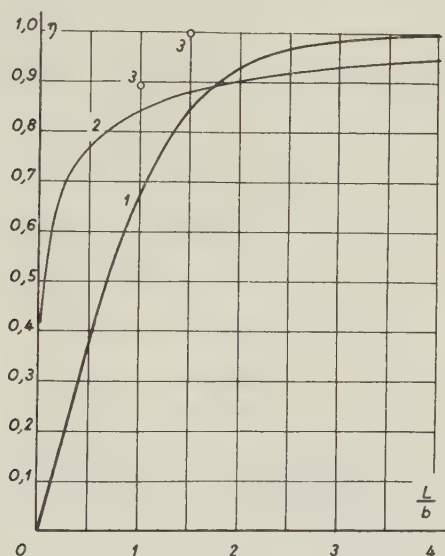


Fig. 4.

Quotient η de la tension HALL mesurée et de la tension HALL d'une plaque infiniment longue en fonction du rapport longueur-largeur L/b .

1. Courbe calculée à l'aide de la formule (31).
2. Résultats expérimentaux de HALL, formule (33).
3. Mesures d'ETTINGSHAUSEN et NERNST.

représentée par la courbe 2, fig. 4. Cette figure représente aussi des résultats plus anciens d'ETTINGSHAUSEN et NERNST, cités par CAMPBELL¹⁷).

Le désaccord entre ces divers résultats est frappant. La courbe 1, dont quelques points ont été vérifiés expérimentalement par ISENBERG, RUSSEL et GREENE¹⁴), semble la plus sûre. Les résultats

de mes mesures n'ont toutefois pas subi de correction. Si l'on admet la validité de la formule (32), ils devraient être augmentés de 3,4 % pour la plaque FeA, de 3,1 % pour la plaque NiA et de 4,3 % pour les plaques *B* et *C* étudiées spécialement aux basses températures¹⁾.

d) *Influence de la position des sondes.* Si les sondes servant à la mesure de l'effet HALL ne sont pas situées exactement sur une perpendiculaire aux lignes de courant, elles accusent une différence de potentiel même en l'absence de champ magnétique. Les différences de potentiel mesurées pour les deux sens du champ magnétiques ne sont ainsi généralement pas opposées, mais leur demi-différence fournit l'effet cherché en éliminant l'influence de la résistance, qui n'est pas modifiée par un changement de signe du

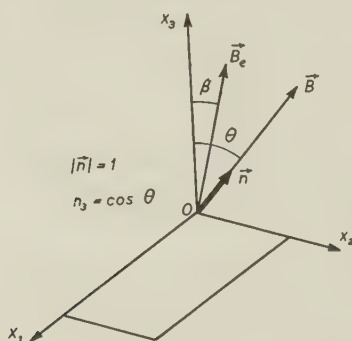


Fig. 5.

Plaque placée obliquement dans le champ.

champ magnétique. Chaque mesure doit ainsi s'effectuer pour les deux sens du champ magnétique: le calcul de moyenne élimine cette cause d'erreur et la suivante.

e) *Obliquité de la plaque dans le champ magnétique.* Une plaque ferromagnétique perpendiculaire à un champ magnétique uniforme se trouve dans une position d'équilibre instable. Elle peut être légèrement oblique, malgré une fixation très rigide. Il peut alors exister une composante sensible de l'induction magnétique dans le plan de la plaque.

Pour soumettre cette cause d'erreur au calcul, fixons les axes de coordonnées à la plaque. L'induction magnétique \vec{B}_e extérieure à la plaque présente avec la normale à celle-ci un très petit angle β (fig. 5). L'induction magnétique interne \vec{B} forme avec la même normale un angle beaucoup plus grand ϑ ($n_3 = \cos \vartheta$), et l'on a

$$B_e \cos \beta \cong B_e = B \cos \vartheta = B n_3. \quad (34)$$

Pour un courant parallèle à Ox_1 , l'équation (3), mise sous une forme vectorielle analogue à (15), fournit la composante de HALL du champ électrique:

$$E_2 = e_H n_3 j + n_1 n_2 j (e_{||} - e_{\perp}). \quad (35)$$

Le deuxième terme ne change pas de signe lors d'un renversement du champ magnétique: il s'élimine par demi-différence comme celui qui provient d'un défaut de position des sondes. La mesure donne le premier, qui, dans les champs faibles est proportionnel à l'induction magnétique (effet aimantation):

$$E_2 = R_1 j n_3 B = R_1 j B_e, \quad (36)$$

en vertu de (34).

Comme l'induction magnétique mesurée est justement B_e , l'obliquité et l'impossibilité de mesurer l'induction magnétique interne se compensent heureusement; en d'autres termes, l'effet HALL est déterminé par la seule composante de l'induction magnétique normale à la plaque.

Dans les champs intenses, l'angle ϑ est faible, tout comme β , car le rapport de leurs tangentes, qui n'est autre que la perméabilité magnétique relative, décroît et tend vers l'unité: l'obliquité ne peut entraîner d'erreur notable.

§ 4. Méthodes de mesure.

a) *Echantillons.* Les plaques dont il est question dans cette étude sont désignées par FeA et NiA. Elles présentent une longueur de 80 mm et une largeur de 30 mm environ; les épaisseurs sont respectivement 0,5 et 2,5 mm. Les amenées de courant sont des blocs de cuivre brasés à l'argent; des sondes, servant aussi bien à la mesure de l'effet HALL qu'à celle de la résistivité, sont serties sur les plaques, ainsi que des couples thermoélectriques permettant la mesure de la température de l'échantillon. La plaque NiA est en nickel du commerce; FeA est du fer électrolytique.

Les dimensions géométriques sont relativement grandes, ce qui facilite leur détermination à la machine à diviser ou au palmer. Les plaques sont revêtues d'amiante, les sondes sont isolées par des tubes de quartz mince; ainsi protégées, elles peuvent être portées à 600° C.

Les plaques B et C, qui ont servi aux mesures à basse température, sont décrites dans *Physica*¹⁾.

b) *Production et mesure des températures.* Les températures supérieures à celle du laboratoire sont produites par un four électrique de construction spéciale, pouvant se loger entre des pôles d'électro-aimant. Sa largeur ne dépasse pas 35 mm.

Les températures inférieures à celle du laboratoire sont produites par de la neige carbonique ou de l'air liquide. Dans ce dernier cas, la plaque est placée dans un vase DEWAR. Les températures intermédiaires s'obtiennent en laissant évaporer l'air liquide: la plaque se réchauffe alors assez lentement pour permettre des mesures, pour autant que l'orifice du vase soit bien isolé thermiquement.

La mesure des températures s'effectue à l'aide des couples thermo-électriques fixés sur les plaques. Leur f. é. m. est mesurée par un millivoltmètre à lecture directe. Ils sont étalonnés par comparaison à des thermomètres à dilatation de liquide; certains ont nécessité un contrôle en quelques points fixes, surtout aux basses températures.

c) *Production et mesure des champs magnétiques.* Les mesures sont effectuées dans un électro-aimant dont les principales caractéristiques ont été communiquées par PERRIER¹⁸⁾ à la Société suisse de physique. Il dispose de plusieurs systèmes de pièces polaires et permet d'atteindre, pour un entrefer de 25 mm, une induction magnétique de $2,7 \text{ Vs/m}^2$ (27 000 gauss); l'intensité du courant qui le parcourt est alors 200 A.

La mesure des champs s'effectue à l'aide d'une bobine de surface connue (80 cm^2) et d'un fluxmètre.

d) *Mesures d'effet Hall et de résistivité.* Ces deux types de mesures ont été effectués de la même manière; seul varie l'ordre de grandeur des f. é. m. à mesurer. La tension de HALL, de l'ordre de quelques microvolts, nécessite certaines précautions bien connues d'isolement électrique et thermique, de blindages, décrites dans *Physica*¹⁾ pour les mesures à basse température.

L'échantillon est parcouru par un courant d'une intensité de 10 à 30 A pour les mesures d'effet HALL, de 1 A environ pour les mesures de résistivité. La tension correspondante est mesurée directement par un galvanomètre étalonné. Certaines mesures ont été facilitées par un dispositif permettant l'étalonnage rapide du galvanomètre au cours des mesures, pour tenir compte des variations éventuelles de la résistance du circuit ou de la sensibilité du galvanomètre. D'autres ont nécessité l'emploi d'un montage compensant les f. é. m. induites par les fluctuations du courant dans l'électro-aimant¹⁾.

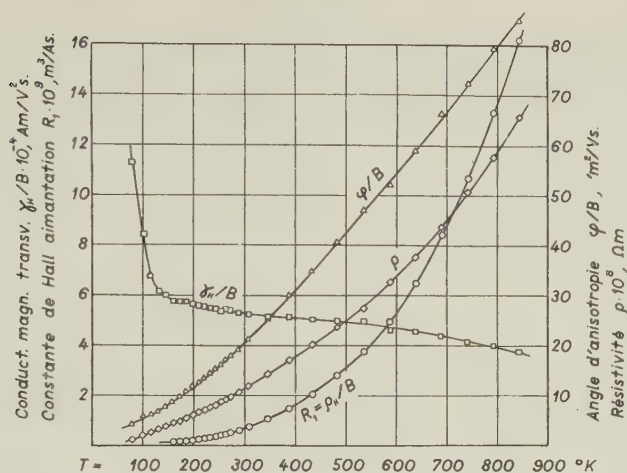


Fig. 6.

Effet HALL aimantation du fer en fonction de la température. Valeurs tirées du tableau 1.

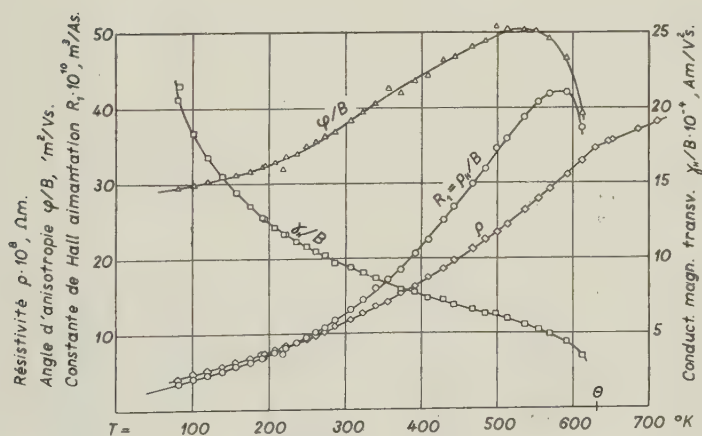


Fig. 7.

Effet HALL aimantation du nickel en fonction de la température. Valeurs tirées du tableau 1. Θ est la température de CURIE.

Tableau 1.

Effet HALL aimantation en fonction de la température. Le tableau donne les grandeurs suivantes:

T : température absolue.

J_s : aimantation spontanée, exprimée en Vs/m².

$R_1 = \varrho_H/B$: constante de HALL aimantation, exprimée en m³/As; la relation avec la constante de HALL exprimée en unités émcgs et rapportée à l'unité de champ magnétique est: 1 m³/As = 10⁷ émcgs.

φ/B : angle d'anisotropie magnétogalvanique, exprimé en minutes d'arc par unité d'induction magnétique.

γ_H/B : conductibilité magnétogalvanique transversale par unité d'induction magnétique.

ϱ_{Hs} , φ_s , γ_{Hs} : mêmes grandeurs, mais relatives à l'effet HALL spontané.

ϱ : résistivité.

T	J_s	$R_1 = \frac{\varrho_H}{B}$	$\frac{\varphi}{B}$	$\frac{\gamma_H}{B}$	ϱ_{Hs}	φ_s	γ_{Hs}	ϱ
°K	$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{As}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$	$\frac{\text{Am}}{\text{V}^2\text{s}}$	Ωm	'	$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$	Ωm
FER								
		10 ⁻¹¹		10 ⁴	10 ⁻¹¹		10 ⁴	10 ⁻⁸
79	2,196	1,30	4,16	11,3	2,85	9,13	24,7	1,07
101	2,192	3,47	5,88	8,42	7,61	12,9	18,5	2,03
116	2,190	4,69	6,11	6,73	10,3	13,4	14,7	2,64
131	2,187	6,39	6,82	6,16	14,0	14,9	13,5	3,22
145	2,183	8,60	7,78	6,00	18,8	17,0	13,0	3,80
159	2,180	11,1	8,70	5,77	24,2	19,0	12,6	4,39
173	2,177	13,9	9,69	5,73	30,2	21,1	12,5	4,93
185	2,173	17,1	10,8	5,75	37,1	23,4	12,5	5,45
198	2,170	20,4	11,7	5,65	44,3	25,3	12,3	6,01
210	2,166	23,9	12,6	5,59	51,8	27,2	12,1	6,54
221	2,162	27,7	13,5	5,54	59,9	29,1	12,0	7,07
232	2,158	31,8	14,4	5,48	68,6	31,0	11,8	7,62
243	2,154	36,2	15,3	5,44	77,9	32,9	11,7	8,15
254	2,151	40,7	16,0	5,33	87,6	34,4	11,5	8,74
263	2,147	45,5	17,1	5,43	97,6	36,7	11,7	9,15
273	2,144	50,3	17,9	5,38	108	38,4	11,5	9,67
289	2,137	59,8	19,3	5,28	128	41,3	11,3	10,6
308	2,130	73,6	21,3	5,23	157	45,5	11,2	11,9
346	2,115	105	25,2	5,13	222	53,3	10,9	14,3
388	2,097	148	30,0	5,15	311	63,0	10,8	17,0
434	2,076	204	34,9	5,05	424	72,4	10,5	20,1
483	2,050	280	40,7	4,99	575	83,4	10,2	23,7
535	2,017	377	47,0	4,97	760	94,8	10,0	27,5
587	1,977	495	52,1	4,63	979	103	9,16	32,7
638	1,932	649	59,0	4,54	1250	114	8,77	37,8
689	1,879	842	66,3	4,41	1580	125	8,29	43,7
741	1,819	1070	72,4	4,15	1940	132	7,55	50,7
792	1,745	1330	79,3	4,00	2320	138	6,98	57,7
843	1,656	1620	85,0	3,76	2690	141	6,23	65,7

Tableau 1 (suite).

T	J_s	$R_1 = \frac{\varrho H}{B}$	$\frac{\varphi}{B}$	$\frac{\gamma H}{B}$	ϱ_{Hs}	φ_s	γ_{Hs}	ϱ
$^{\circ}\text{K}$	$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{As}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$	$\frac{\text{Am}}{\text{Vs}}$	Ωm	'	$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$	Ωm
NICKEL								
		10^{-11}		10^4	10^{-8}		10^4	10^{-8}
81	0,6463	35,4	29,4	20,6	22,9	19,0	13,3	4,15
83	0,6461	34,1	29,4	21,5	22,0	19,0	13,9	3,98
101	0,6450	40,6	29,8	18,5	26,2	19,2	11,9	4,69
120	0,6432	46,0	30,3	16,8	29,6	19,5	10,8	5,23
139	0,6415	51,4	30,7	15,5	33,0	19,7	9,94	5,76
157	0,6393	57,1	31,1	14,4	36,5	19,9	9,19	6,30
175	0,6367	62,8	31,6	13,5	40,0	20,1	8,59	6,83
191	0,6339	68,6	32,2	12,7	43,5	20,4	8,05	7,35
194	0,6333	70,6	32,4	12,6	44,7	20,5	7,95	7,50
207	0,6310	75,0	32,8	12,1	47,3	20,7	7,61	7,88
218	0,6287	73,8	31,8	11,6	46,4	20,0	7,32	7,96
222	0,6278	81,7	33,5	11,6	51,3	21,0	7,27	8,40
236	0,6247	88,2	33,9	11,1	55,1	21,2	6,92	8,92
249	0,6215	94,9	34,8	10,8	59,0	21,6	6,70	9,39
261	0,6185	102	35,6	10,5	63,0	22,0	6,50	9,84
273	0,6153	108	36,2	10,2	66,7	22,3	6,30	10,3
286	0,6111	118	36,8	9,72	72,2	22,5	5,94	11,0
307	0,6039	132	38,3	9,45	79,5	23,1	5,65	11,9
323	0,5979	146	39,5	9,07	87,0	23,6	5,42	12,7
340	0,5910	160	40,6	8,70	94,5	24,0	5,14	13,6
356	0,5836	172	42,5	8,65	100	24,5	5,05	14,1
373	0,5751	188	41,9	7,89	108	24,1	4,54	15,4
391	0,5652	207	43,5	7,77	117	24,6	4,39	16,3
408	0,5548	224	44,2	7,35	124	24,5	4,08	17,4
429	0,5408	251	46,4	7,25	136	25,1	3,92	18,6
443	0,5306	268	46,7	6,88	142	24,8	3,65	19,7
467	0,5103	299	48,2	6,58	153	24,6	3,36	21,3
484	0,4937	319	48,8	6,30	158	24,1	3,11	22,5
499	0,4770	346	50,9	6,31	165	24,3	3,01	23,4
513	0,4600	359	50,4	5,98	165	23,2	2,75	24,5
536	0,4286	387	50,4	5,55	166	21,6	2,38	26,4
554	0,3981	407	50,2	5,22	162	20,0	2,08	27,9
569	0,3682	418	49,2	4,92	154	18,1	1,81	29,2
592	0,3094	420	46,5	4,36	130	14,4	1,35	31,0
612	0,2300	373	39,1	3,45	85,9	9,0	0,79	32,9

§ 5. Résultats expérimentaux.

a) *Résultats.* Les résultats des mesures d'effet HALL aimantation sont consignés dans le tableau 1. Pour le fer, les valeurs spontanées, inaccessibles à la mesure directe, ont été déterminées à l'aide de la formule (21). Pour le nickel, elles ont pu être déterminées directement: le nickel étudié n'a pas manifesté d'effet champ appréciable.

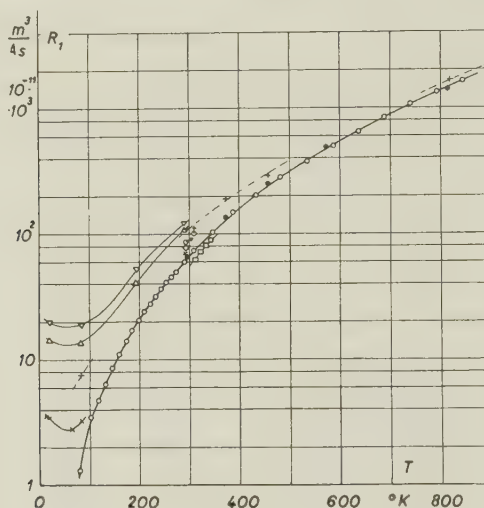


Fig. 8.

Constante de HALL aimantation du fer: résultats de divers auteurs. L'échelle logarithmique fait ressortir les écarts relatifs.

○ FeA	◇ UNWIN	● SMITH, fer électrolytique
× FeB, FeC	⊕ MOREAU	△▽ ALTERTHUM
◇ HALL	+ SMITH, fer KAHLEBAUM	□ BUTLER et PUGH

Les incertitudes sur les valeurs relatives sont de 3% à la température du laboratoire et aux hautes températures. Elles s'accroissent aux basses températures, eu égard à la faiblesse des tensions de HALL pour aller jusqu'à 10%. Sur les valeurs absolues, les dimensions géométriques des échantillons introduisent une incertitude de 3% pour le fer et de 2% pour le nickel.

Les fig. 6 et 7 illustrent le tableau 1. Elles montrent, pour le fer comme pour le nickel, une variation très simple de la conductibilité magnétogalvanique transversale, qui s'accroît constamment quand la température décroît, ainsi que l'avait prévu PERRIER⁴). La loi est comparable à celle que suit la conductibilité électrique.

Les comparaisons aux résultats d'autres auteurs et aux mesures effectuées à basse température sur les plaques *B* et *C* (*Physica*¹⁾) sont représentées par les fig. 8 et 9. Les auteurs consultés sont:

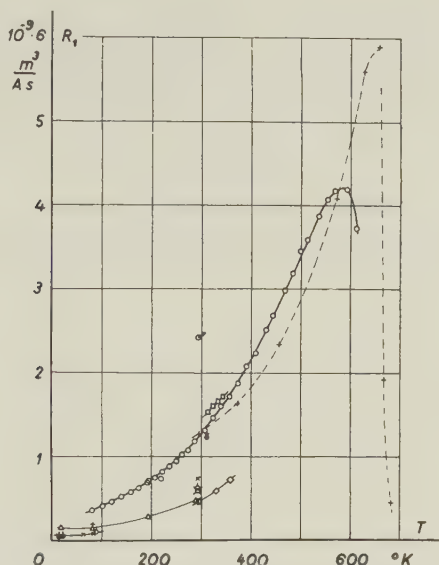


Fig. 9.

Constante de HALL aimantation du nickel. Résultats de divers auteurs.

○ NiA	+ SMITH
× NiB, NiC	◌ KAMERLINGH ONNES et BECKMANN
◇ HALL	□ BUTLER et PUGH
◌ MOREAU	◌ PUGH, ROSTOKER et SCHINDLER
△ ALTERTHUM	◌ ETTINGSHAUSEN et NERNST

ETTINGSHAUSEN et NERNST, MOREAU, UNWIN cités par CAMPBELL¹⁷⁾,

SMITH¹⁹⁾ (1910), la seule étude effectuée sur un très large intervalle de températures,

ALTERTHUM²⁰⁾ (1912), basses températures, fer et nickel,

KAMERLINGH ONNES et BECKMANN²¹⁾ (1913), nickel aux basses températures,

HALL¹⁶⁾ (1925), nickel, quelques valeurs entre la température du laboratoire et 100° C,

BUTLER et PUGH²⁰⁾ (1940): fer et nickel, quelques valeurs entre la température du laboratoire et 100° C, avec mesure simultanée de la résistivité,

PUGH, ROSTOKER et SCHINDLER⁶⁾ (1950), nickel à la température du laboratoire.

La plupart de ces auteurs ont travaillé à une époque où la distinction entre effet champ et effet aimantation n'existait pas encore. La constante de HALL qu'ils indiquent est généralement la constante aimantation, car elle est la plus immédiatement accessible à l'expérience. A l'exception de BUTLER et PUGH²²⁾, aucun d'eux n'a, à ma connaissance, mesuré l'effet HALL et la résistance sur le

Tableau 2.

Influence de la pureté sur l'effet HALL.

Métal	ρ 0° C	ρ	R_1	$\frac{\varphi}{B}$	$\frac{\gamma_H}{B}$
	Ω m	Ω m	$\frac{\text{m}^3}{\text{As}}$	$\frac{\text{'m}^2}{\text{Vs}}$	$\frac{\text{Am}}{\text{Vs}}$
A 20° C	10 ⁻⁸	10 ⁻⁴	10 ⁻¹¹		10 ⁴
Fe, BUTLER . . .	9,4	10,5	47,6	15,6	4,32
Fe A	9,67	10,9	62,7	19,8	5,28
Fe B et C	9,97	11,11	69,8	21,6	5,66
Ni B et C	6,88	7,74	73,3	32,5	12,2
Ni A	10,3	11,3	123	37,3	9,60
Ni, BUTLER . . .	10,4	11,3	140	42,6	11,0
A -190° C					
Fe A	9,67	1,07	1,30	4,16	11,3
Fe B et C	9,97	1,91	3,30	5,96	9,05
Ni B et C	6,88	1,13	8,45	25,8	66,8
Ni A	10,3	3,98	34,1	29,4	21,5

même échantillon. Bien des résultats sont malheureusement inutilisables, car leurs auteurs n'indiquent pas la valeur du champ magnétique.

Les fig. 8 et 9 montrent que, comme pour la résistivité, c'est surtout aux basses températures que les écarts relatifs entre les résultats de divers auteurs sont les plus grands. La constante de HALL aimantation est très sensible aux impuretés. Le tableau 2 contient la liste des métaux étudiés groupés par ordre de résistivités à 0° C croissantes, ainsi que les valeurs de BUTLER et PUGH²²⁾ ramenées à la température du laboratoire par extrapolation linéaire. Il montre que, pour un même métal, la constante de HALL aimantation s'accroît quand la résistivité s'accroît. On peut en conclure que les

impuretés accroissent la résistivité comme la constante de HALL aimantation.

b) *Théorie électronique*. La théorie électronique de l'effet HALL ne concerne jusqu'à maintenant que l'effet champ, qu'il s'agisse de la théorie des électrons libres de SOMMERFELD et FRANK²³) (exposée entre autres par SEITZ²⁴), ou des électrons soumis à l'effet du réseau (MOTT et JONES²⁵), SONDHEIMER²⁶). Sa variation en fonction de la température laisse supposer qu'il faut faire intervenir deux bandes d'électrons de conduction⁴).

L'effet HALL aimantation aussi bien que le paramètre du champ n'ont pas encore reçu d'explication quantitative satisfaisante. On a vu plus haut qu'ils font intervenir directement les mécanismes microscopiques.

L'équipement nécessaire à ces recherches a pu être créé en partie grâce au précieux appui du *Fonds Agassiz* et de la *Société Académique Vaudoise*. Les mesures effectuées à Leyde ont été rendues possibles par une bourse du *Rotary Club* de Lausanne. Veuillez ces institutions trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

Ma gratitude va également au Professeur PERRIER, pour l'intérêt qu'il a continuellement voué à mes recherches.

Lausanne, Laboratoire de physique de l'Université.

Bibliographie.

- 1) J.-P. JAN et H. M. GIJSMAN, Commun. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, Nr. 288 a; *Physica* **18**, 339 (1952).
- 2) J.-P. JAN et H. M. GIJSMAN, *Helv. Phys. Acta* **24**, 636 (1951).
- 3) J. MEIXNER, *Ann. Physik* [5] **35**, 701 (1939).
- 4) A. PERRIER, *Helv. Phys. Acta* **3**, 317 (1930).
- 5) J.-P. JAN, *Helv. Phys. Acta* **22**, 581 (1949).
- 6) E. M. PUGH, N. ROSTOKER and A. SCHINDLER, *Phys. Rev.* [2] **80**, 688 (1950).
- 7) A. PERRIER, *Helv. Phys. Acta* **3**, 400 (1930).
- 8) A. PERRIER, *Helv. Phys. Acta* **6**, 462 (1933).
- 9) P. WEISS et R. FORRER, *Annales de physique* **5**, 153 (1926).
- 10) P. WEISS et R. FORRER, *Annales de physique* **12**, 279 (1929).
- 11) A. PREUSS, thèse, Zürich (1912).
- 12) A. PERRIER, *Helv. Phys. Acta* **6**, 467 (1933).
- 13) M. KOHLER, *Zeitschr. Phys.* **118**, 312 (1941).
- 14) I. ISENBERG, B. R. RUSSEL and R. F. GREENE, *Rev. Scient. Instr.* **19**, 685 (1948).
- 15) J. VOLGER, *Phys. Rev.* [2] **79**, 1023 (1950).
- 16) E. H. HALL, *Phys. Rev.* [2] **26**, 820 (1925).

- ¹⁷⁾ L. L. CAMPBELL. Galvanomagnetic and Thermomagnetic Effects (Longmans, Green & Co., London, 1923).
 - ¹⁸⁾ A. PERRIER, *Helv. Phys. Acta* **21**, 431 (1948).
 - ¹⁹⁾ A. W. SMITH, *Phys. Rev.* [1] **30**, 1 (1910).
 - ²⁰⁾ H. ALTERTHUM, *Ann. Physik* [4] **39**, 933 (1912).
 - ²¹⁾ H. KAMERLINGH ONNES and B. BECKMANN, *Commun. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden*, Nr. **132a**; *Proc. kon. Acad. Amsterdam* **15**, 981 (1913).
 - ²²⁾ E. H. BUTLER and E. M. PUGH, *Phys. Rev.* [2] **57**, 916 (1940).
 - ²³⁾ A. SOMMERFELD and N. H. FRANK, *Rev. Mod. Phys.* **3**, 1 (1931).
 - ²⁴⁾ F. SEITZ. *The Modern Theory of Solids* (McGraw-Hill, New York and London 1940).
 - ²⁵⁾ N. F. MOTT and H. JONES. *The Theory of the Properties of Metals and Alloys* (Oxford, Clarendon Press, 1936).
 - ²⁶⁾ E. H. SONDHEIMER, *Proc. Roy. Soc. London, A* **193**, 484 (1948).
-

(γ, α) -Prozesse an Li_3^7 , O_8^{16} , Br_{35}^{79} und Br_{35}^{81}

von H. Nabholz, P. Stoll und H. Wäffler*)

Physikalisches Institut der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.

(2. IX. 1952.)

Summary: The nuclear track plate technique has been applied for an investigation of (γ, α) -processes on Li^7 , O^{16} , $\text{Br}^{79, 81}$. The ~ 6 MeV fluorine gamma-rays have been used for the photodisintegration of Lithium, 17,6 MeV Lithium gamma-rays for Oxygen and Bromine. For the reaction $\text{Li}^7(\gamma, \alpha)\text{H}^3$, a cross section of $(2,65 \pm 0,8) \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2$ results with fluorine gamma-rays. The angular distribution of the photo-tritons is given by

$$W(\Theta) = 1 - (0,1 \pm 0,09) \cdot \cos \Theta.$$

The reaction $\text{O}^{16}(\gamma, \alpha)\text{C}^{12}$ has been found to give a cross-section of $(1,95 \pm 0,8) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$ for quanta of 17,6 MeV.

The (γ, α) -reaction on bromine has given a cross-section of $(1,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$ (mean value for both isotopes). This value is in good agreement with the theoretical results deduced from the statistical theory of nuclear reactions.

Einleitung und Zusammenfassung.

Die Seltenheit der (γ, α) -Prozesse an mittelschweren und schweren Kernen erfordert zu ihrem Nachweis sehr intensive Quellen energiereicher Gamma-Strahlung. Solche stehen im allgemeinen nur in Form von Bremsstrahlung (Betatron, Synchrotron) zur Verfügung. Eine Ausnahme bilden die Fälle, bei denen der Nachweis des Prozesses mittels der Technik der Kernphotoplatten möglich ist. Die praktisch nulleffektfreie photographische Methode ist genügend empfindlich, um auch mit den schwachen Intensitäten der aus Kernprozessen (meist Protoneinfangprozessen) stammenden Gammalinien brauchbare Resultate zu liefern. Die mit monochromatischer Strahlung gewonnenen Ergebnisse haben häufig den Vorteil, sich genauer und eindeutiger diskutieren zu lassen als die mit Bremsstrahlung erhaltenen. Im Folgenden soll über eine Untersuchung der genannten Prozesse an den Elementen Lithium, Sauerstoff und Brom berichtet werden.

*) Jetzt Universität Zürich.

Die Ausmessung der mit den γ -Strahlen aus dem Prozess $F_9^{19}(p, \alpha)O_8^{16} + \gamma$ bestrahlten, Li enthaltenden Platten ergab folgende Resultate:

1. $\sigma[Li_3^6(\gamma_{6,13} \text{ MeV}, \alpha) H_1^2] \leq \frac{\sigma[Li_3^7(\gamma_{6,13} \text{ MeV}, \alpha) H_1^3]}{8}$
2. $\sigma[Li_3^7(\gamma_{6,13} \text{ MeV}, \alpha) H_1^3] = (2,65 \pm 0,8) \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2$
3. $W(\Theta) = 1 - (0,1 \pm 0,09) \cdot \cos \Theta$.

Dabei ist Θ der Winkel zwischen einfallendem γ -Strahl und emittiertem Triton. Ein $\cos \Theta$ -Glied, d. h. ein Interferenzterm, entsteht, wenn ED-Strahlung absorbiert wird.

Den (γ, α) -Prozess an O_8^{16} untersuchten wir mit $Li^7(p, \gamma)$ -Strahlen. Dieser Prozess kann auf das erste angeregte Niveau oder auf den Grundzustand des Kohlenstoffs führen. Wir fanden als obere Grenze des Anteils, der in das angeregte Niveau führt, 10% und für den Übergang in den Grundzustand den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma[O_8^{16}(\gamma_{17,6} \text{ MeV}, \alpha) C_6^{12}] = (1,95 \pm 0,8) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

Ferner verglichen wir diese Reaktion mit der Photospaltung des Kohlenstoffs.

Ausser den α -Teilchen aus dem Prozess $O_8^{16}(\gamma, \alpha)C_6^{12}$ fanden wir solche, die dem (γ, α) -Prozess an Br zugeschrieben werden müssen. Den Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion bestimmten wir zu:

$$\sigma_{Br^{79} \text{ und } 81}(\gamma_{17,6} \text{ MeV}, \alpha) = (1,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

Die experimentelle Energieverteilung der α -Teilchen stimmt gut mit jener überein, die die statistische Kerntheorie voraussagt. Wir berechneten auch das Verhältnis $\sigma(\gamma, \alpha) / \sigma(\gamma, n)$ für $E_\gamma = 17,6 \text{ MeV}$. Unser Wert von $\sigma(\gamma, \alpha)$ und der von A. HIRZEL und H. WÄFFLER¹⁶⁾ gefundene Wert für $\sigma(\gamma, n)$, ergeben ein Verhältnis, das mit dem errechneten übereinstimmt, wenn man für den Kernradius den plausiblen Wert $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ annimmt.

1. Photospaltung des Lithiums $[Li_3^7(\gamma, \alpha) H_1^3]$.

1.1 Einleitung und Problemstellung.

E. W. TITTERTON¹⁾ fand die Photospaltung $Li_3^7(\gamma, \alpha)H_1^3$ ($Q = 2,51 \text{ MeV}$) mit den γ -Strahlen aus dem Prozess $Li_3^7(p, \alpha)\alpha + \gamma$. Die statistische Verteilung der Winkel zwischen einfallendem γ -Strahl und der Richtung, in der das α -Teilchen und das Triton diametral auseinander fliegen (Fig. 6), liefert Aufschluss über den Gesamtspin der bei dieser Reaktion auftretende Zustände. Der

Zusammenhang zwischen Multipolordnung der absorbierten γ -Strahlung und Winkelverteilung wird auf Grund unserer Ergebnisse erst am Schluss diskutiert (vgl. 1.4e). Unsere Versuche liefern den Wirkungsquerschnitt der Reaktion und die erwähnte Winkelverteilung.

Wie man aus dem Q -Wert ersieht, ist die Reaktion auch noch mit der γ -Strahlung aus dem Prozess $F_9^{19}(\text{p}, \alpha)\text{O}_8^{16} + \gamma$ ($E_\gamma = 6,13$, bzw. $6,9$ MeV) möglich. Bestrahlungen von Platten mit diesen γ -Energien haben den Vorteil, dass (γ, p) -Prozesse, deren Spuren das Aufsuchen der gewünschten Ereignisse erschweren würden, an den Elementen der Emulsion energetisch nicht möglich sind.

Die Fluorgammastrahlung wurde mit Protonen von ca. $0,4$ MeV Energie erzeugt. Bei dieser Protonenenergie ist die Intensität der $6,13$ MeV-Komponente rund 20mal stärker als diejenige der $6,9$ MeV- γ -Linie²⁾. Mit $E_\gamma = 6,13$ MeV sind folgende Prozesse möglich:

Reaktion	$\text{Li}_3^7 (\gamma, \alpha) \text{H}_1^3$	$\text{Li}_3^6 (\gamma, \alpha) \text{H}_1^2$
Energie	$E_\alpha = 1,56$ MeV	$E_\alpha = 1,53$ MeV
Reichweite . . .	$l_\alpha = 4,5 \mu$	$l_\alpha = 4,5 \mu$
Energie	$E_{\text{H}_1^3} = 2,05$ MeV	$E_{\text{H}_1^2} = 3,06$ MeV
Reichweite . . .	$l_{\text{H}_1^3} = 25 \mu$	$l_{\text{H}_1^2} = 56 \mu$

Die dabei benutzten Reichweite-Energie-Kurven für H_1^2 und H_1^3 erhielten wir auf folgende Weise: Die bekannte Kurve für Protonen rechneten wir mit Hilfe der Beziehung $R = M/Z^2 \cdot f(v)$ auf Tritonen um. Diese neue Kurve transformierten wir affin, bis der experimentell ermittelte Punkt aus der Reaktion $\text{Li}_3^6(\text{n}, \alpha) \text{H}_1^3$ ($Q=4,64$ MeV³⁾; $E_{\text{H}_1^3} = 2,65$ MeV) auf der Kurve lag. Von der so bestimmten Kurve ausgehend fanden wir, wieder mit der oben erwähnten Beziehung, die Reichweiten von Deutonen.

Die zweite Reaktion konnte nicht eindeutig nachgewiesen werden. Wir fanden 9 Spuren mit Totallängen zwischen 55μ und 65μ ; aber nur 3 davon liessen sich auf Grund des Korndichteunterschiedes an der erwarteten Stelle in α -Teilchen und Triton zerlegen. Betrachtet man diese 3 Ereignisse als sicher, so ergibt sich als obere Grenze für den Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion:

$$\sigma[\text{Li}_3^6 (\gamma_{6,13}, \alpha) \text{H}_1^2] \leq \frac{\sigma[\text{Li}_3^7 (\gamma_{6,13}, \alpha) \text{H}_1^3]}{8}.$$

1.2. Experimentelle Angaben.

a) Bestrahlung.

Um während längerer Zeit ohne Unterbruch bestrahlen zu können, konstruierten wir eine rotierende, wassergekühlte Target, deren Dichtung nach dem von WILSON⁴⁾ angegebenen Prinzip gebaut wurde. Dank dem zusätzlichen Einbau eines Ölreservoirs (Fig. 1), von dem aus ein Ölfilm auf der Welle ständig erneuert wird, ergab sich ein einwandfreies Funktionieren während der ganzen Betriebsdauer von ca. 400 Std. Von einem Molybdänofen aus (Fig. 2) konnte - ohne Unterbruch der Bestrahlung - neues CaF_2 auf die Targetscheibe aufgedampft werden.

Für die Bombardierung der Fluortarget stand ein Protonenstrom von 250 μA zur Verfügung.

b) Die Behandlung der Platten.

Wir bestrahlten 200 μ dicke „Kodak NT1 A Li-loaded“-Platten. Vor der Bestrahlung zerstörten wir das latente Bild schon vorhandener Spuren nach der von YAGODA angegebenen Methode (background eradication)⁵⁾.

Aus einer Reihe ausprobiertter Entwickler wählten wir schliesslich den nachstehenden, langsam wirkenden Hydrochinonentwickler, der eine gute Diskrimination zwischen α -Teilchen und H_1^3 ergab:

Hydrochinon	0,8	} verdünnt auf 400 cm ³
Na ₂ SO ₃ + 7 H ₂ O	16,0	
KBr	0,4	
Na ₂ CO ₃ + 10 H ₂ O	12,0	
Kaltbad: 8° C, 1 Std., unverdünnt,		
Warmbad: 22° C, 50 Min., 1:1 verdünnt.		

Die gleichmässige Durchentwicklung konnte verbessert werden, indem am Ende des Warmbades während 30 Min. kontinuierlich auf 8° C abgekühlt wurde. Während dieser halben Stunde ist die Oberfläche der Emulsion immer kälter als deren tiefste Schichten und somit hier die Entwicklung intensiver.

Die Schrumpfung der Platte bestimmten wir durch mechanische Messung der Emulsionsdicke an 6 Stellen vor und nach dem Entwickeln; genauer gesagt: aus den 6 Werten des Verhältnisses s zwischen der Dicke der Emulsion vor und derjenigen nach dem Entwickeln. Wir erhielten im Mittel den Wert $s = 2,75$.

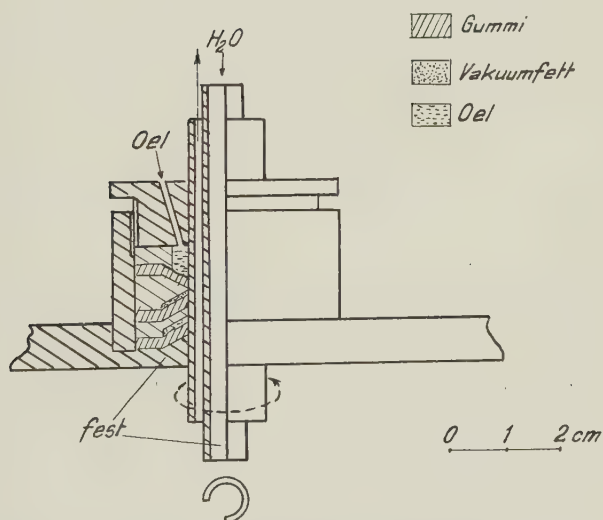
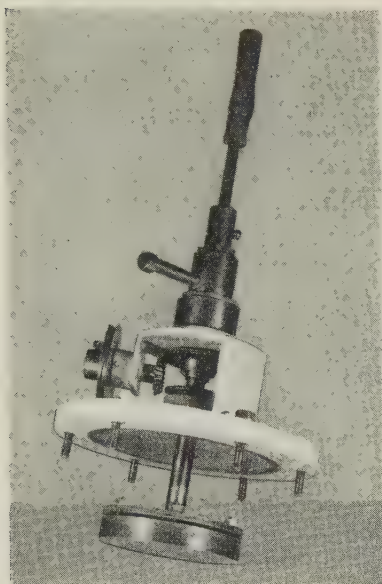


Fig. 1.

Rotierende, wassergekühlte Target mit Detailzeichnung der Durchführung.

1.3. Die Bestimmung des Wirkungsquerschnittes.

Will man den Wirkungsquerschnitt berechnen, so muss man die Zahl der γ -Quanten, welche die in der Platte ausgemessene Zone durchsetzt haben, ferner die Zahl der in ihr liegenden Zerfälle und den Li-Gehalt der Emulsion kennen. Wir werteten von 2 verschiedenen Bestrahlungen je 1 Platte aus, um so die Reproduzierbarkeit unserer Resultate zu kontrollieren.

a) Die Bestimmung der γ -Quantenzahl.

Um die Zahl der von der CaF_2 -Target emittierten γ -Quanten zu bestimmen, stützten wir uns auf eine Arbeit von FOWLER u. a.⁶⁾, worin u. a. die Empfindlichkeit ε eines Zählrohrs berechnet wird. Für den ε -Wert der Fluorgammastrahlung gibt FOWLER auf Grund einer experimentellen Nachprüfung einen maximalen Fehler von 10% an. Zur Kontrolle unserer γ -Intensitätsmessung benutzten wir gleichzeitig ein Aluminium- und ein Bleizählrohr sowie die entsprechenden Umrechnungsfaktoren aus der eben zitierten Arbeit. Die beiden Resultate stimmten innerhalb des statistischen Fehlers überein.

Die benutzten ε -Werte sind berechnet für Zählrohrwandstärken, die der maximalen Reichweite der durch die γ -Strahlen ausgelösten Elektronen entsprechen. Da unsere Zählrohre bei anderer Gelegenheit^{16) 22)} auch zur Intensitätsmessung der $\text{Li}(p, \gamma)$ -Strahlen dienten, wurden die Wandstärken so gewählt, dass die Bedingung für die dort auftretende 17,6 MeV-Komponente erfüllt ist. Diese für $E_\gamma = 6,13$ MeV zu grosse Wandstärke verursacht eine zusätzliche Absorption der γ -Strahlung in der äusseren Schicht der Zählrohrwand. Die Tiefe dieser Schicht ist gleich der Differenz: (totale Wandstärke — maximale Reichweite der Sekundärelektronen für $E_\gamma = 6,13$ MeV).

Die Grösse des Raumwinkels, in den ein γ -Quant emittiert werden muss, damit es mit der von FOWLER angegebenen Wahrscheinlichkeit ε registriert wird, berechnet sich aus dem Abstand R des Zählrohrs von der Target und aus der Zählfläche F . F ist für grosse R gleich dem Produkt aus Zählrohrdurchmesser und wirksamer Fadenlänge l' . Variiert ε längs des Fadens wie $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot q(l)$ wobei $q(l) \leq 1$, so ist

$$l' = \int_0^l q(l) \cdot dl \quad (1)$$

$q(l)$ ermittelten wir durch folgende Messungen: Wir entfernten den dickwandigen Mantel des Messzählrohrs, führten es darauf senk-

recht zwischen zwei zueinander parallelen Zählrohren hindurch und bestimmten so die Zahl der von der Höhenstrahlung ausgelösten 3fach-Koinzidenzen in Abhängigkeit von der Stellung des Messzählrohrs.

Im folgenden sind die Daten zusammengestellt, aus denen sich Absorption und Zählfläche berechnen lassen.

I. Geometrie.

Al-Zählrohr.

Länge des Z.R.-Drahts	$l = 76 \text{ mm}$	} Zählfläche $11,52 \text{ cm}^2$
Wirksame Drahtlänge	$l' = 64 \text{ mm}$	
Durchmesser	$d = 18 \text{ mm}$	
Wandstärke	$D = 38 \text{ mm}$	

Pb-Zählrohr.

Länge des Z.R.-Drahts	$l = 50 \text{ mm}$	} Zählfläche $6,84 \text{ cm}^2$
Wirksame Drahtlänge	$l' = 38 \text{ mm}$	
Durchmesser	$d = 18 \text{ mm}$	

Die Wand setzt sich zusammen aus 13,5 mm Pb und 1 mm Bi (Z.R.-Kathode).

II. Berechnung der Absorption.

Maximale Reichweite der Sekundärelektronen ($E = 5,7 \text{ MeV}$) ausgelöst durch 6,13 MeV- γ -Quanten:

in Al: 13 mm,
in Pb: 2,5 mm.

Absorption der γ -Strahlung in den Zählrohrwänden, $J = J_0 \cdot e^{-\tau \cdot d}$:
Al: $\tau = 0,069 \text{ cm}^{-1}$

$$d = (3,8 - 1,3) \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$$

Pb: Wir setzen den Absorptionskoeffizienten von Bi ($Z = 83$) demjenigen von Pb ($Z = 82$) gleich.

$$\tau = 0,487 \text{ cm}^{-1}$$

$$d = (1,35 + 0,1 - 0,25) \text{ cm} = 1,2 \text{ cm}.$$

Mit diesen Zählrohren eichten wir zwei Monitoren, d. h. wir bestimmten die Relation zwischen der Summe der Stöße der Monitoren und der in den Raumwinkel 4π emittierten Quantenzahl. Dabei benutzten wir das Resultat von DEVONS⁷⁾, der für die Intensitätsverteilung der Fluorgammastrahlung bei $E_\gamma = 0,47 \text{ MeV}$ Isotropie fand. Als Monitoren dienten zwei Geigerzähler mit Al-

Kathoden und 14 mm dicken Bleiwänden. Bei konstanter Temperatur vermindern sich die Schwankungen der Einsatzspannung und damit der Empfindlichkeit; deshalb wurden die Zählrohre in Gefässe eingebaut, die von Leitungswasser durchspült werden. In regelmässigen Zeitabständen von ca. 6 Std. wurde die Empfindlichkeit der Monitoren mit einer Radium- γ -Quelle überprüft und, wenn nötig, durch Regulierung der Spannung wieder auf den Anfangswert eingestellt. So ergab sich der kleine Wert von 4% für den mittleren Fehler des Verhältnisses der beiden Monitorintensitäten während einer Betriebsdauer von 24 Std.

Aus der Stosszahl der Monitoren während der ganzen Bestrahlung lässt sich auf Grund unserer Eichung die Totalzahl der in den Raumwinkel 4π emittierten γ -Quanten berechnen. Für die beiden Bestrahlungen errechneten wir $J_\gamma = (6,4 \pm 1) \cdot 10^{11}$ Quanten, bzw. $J_\gamma = (6,9 \pm 1,1) \cdot 10^{11}$ Quanten. Der Fehler setzt sich zusammen aus den Unsicherheiten in den geometrischen Grössen, dem Einfluss der ε -Schwankungen der Monitoren sowie den 10% Unsicherheit in der Fowlerschen Angabe des ε -Wertes.

Um jenen Bruchteil zu bestimmen, der die Platte durchsetzt hat, müssen wir den Raumwinkel ausmessen, der durch die Platte aufgespannt wird.

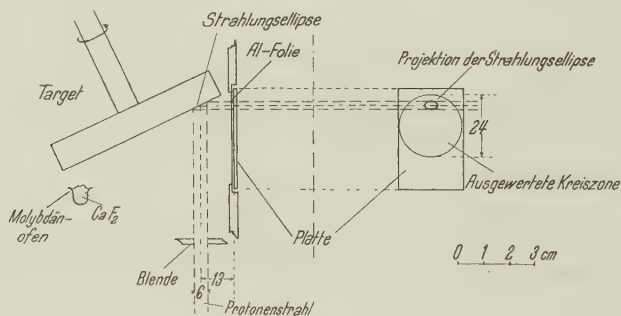


Fig. 2.

Anordnung der Platten bei Bestrahlung zur Bestimmung des Wirkungsquerschnittes.

b) Berechnung des Raumwinkels.

In der Platte zählten wir jene Photospaltungen, die wir innerhalb eines Kreises (vgl. Fig. 2) fanden, der so gewählt wurde, dass er die Projektion der Strahlungseellipse ganz enthält. Unter dieser Voraussetzung kann der Raumwinkel jedes Flächenelements dF_i des Targetflecks in bezug auf das ausgewertete Kreisgebiet einer Arbeit von BERNE⁸⁾ entnommen werden. Mit der Annahme, dass jedes

Flächenelement dF_i während der ganzen Bestrahlungsdauer (24 Std.) gleichviel γ -Quanten emittiert hat, berechnet sich der Anteil der ausgenützten Gesamtstrahlung durch Summation der Beiträge der einzelnen Flächenelemente, was in unserem Falle auf einen totalen Raumwinkel von $\Omega = 1,37$, bzw. $\Omega = 1,34$ führt. Eine Abschätzung des maximalen Fehlers, der sich zur Hauptsache aus der Unsicherheit des Abstandes der Platte ($\pm 0,25$ mm) und aus der oben gemachten Annahme über die Emissionswahrscheinlichkeit zusammensetzt, ergab $\Delta\Omega_{\max} = 5\%$.

c) Bestimmung der Spurenzahl.

Der erwähnte Kreis wurde auf die Platten eingraviert. In Fig. 3 ist die Verteilung der gemessenen totalen Längen für die beiden ausgemessenen Platten getrennt dargestellt. Den Flächen unter den Gauss'schen Kurven entsprechen 268 Spuren in der ersten, 294 in

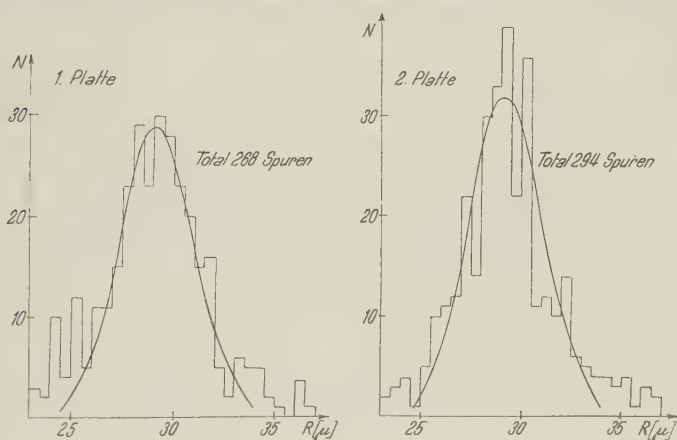


Fig. 3.

$\text{Li}(\gamma, \alpha)\text{H}_3^1 [E_\gamma = 6,13 \text{ MeV}]$: Spurenzahl N in Abhängigkeit der Totallänge R
 $(R = R_\alpha + R_{\text{H}_3^1})$.

der zweiten Platte. Für die Anzahl der übersehenen Spuren dürfen wir weniger als 2% annehmen, wie ein nochmaliges Absuchen durch einen andern Beobachter zeigte. Dagegen wurden 21, bzw. 17 Spuren gefunden, die wohl die richtige Länge hatten, aber auf Grund der Korndichtevariation nicht an der erwarteten Stelle in α -Teilchen und Triton zerlegt werden konnten. Wir nehmen als wahrscheinlichsten Wert der Spurenzahl in der ersten Platte:

$$\begin{aligned} N_s^1 &= 268 \text{ Spuren} + 12 \text{ von } 21 \text{ unsicheren Spuren} \\ &= (280 \pm 25) \text{ Spuren,} \end{aligned}$$

in der zweiten Platte:

$$N_s^2 = 294 \text{ Spuren} + 10 \text{ von } 17 \text{ unsicheren Spuren} \\ = (304 \pm 25) \text{ Spuren.}$$

Diese Zahlen müssen noch mit dem Austrittsfaktor A ,

$$A = \frac{\text{Zahl der entstandenen Spuren}}{\text{Zahl der ausgemessenen Spuren}} = \frac{N_t}{N_s} = 0,72,$$

korrigiert werden.

Dabei wurde ein Ereignis nur dann gezählt, wenn keines der beiden Teilchen aus der Schicht austrat, und wenn der Neigungswinkel Φ' der Spur gegen die Glasebene kleiner als 24° war. Bei steilen Spuren lässt sich nämlich der Korndichteunterschied zwischen α - und H_1^3 -Spur im gesuchten Ereignis nicht mehr gut erkennen. Zur Berechnung des durch diese Neigungsbedingung wegfallenden Teils des ausgenützten Raumwinkels müssen wir an Stelle von Φ' den Wert in der ungeschrumpften Platte $\Phi = 50^\circ$ einsetzen.

Bei der Berechnung von A darf man, wie unsere Messung der Winkelverteilung zeigt (vgl. 1.4), eine isotrope Verteilung annehmen.

d) Li-Gehalt der Platten.

Nach Angaben des Herstellers der Platten enthielten diese 0,0267 g Li pro cm^3 Emulsion, bei normaler Feuchtigkeit. Damit diese Zahl übernommen werden kann, ist darauf zu achten, dass die Platten während der „background eradication“ nicht zuviel Wasser aufnehmen; die Luft darf also nicht ganz mit Wasserdampf gesättigt sein, und Kondenswasserbildung auf den Platten ist zu vermeiden. Es hat sich nämlich gezeigt, dass sich sonst beim Trocknen das eingelagerte Li-Sulfat an der Oberfläche anreichert.

e) Berechnung des Wirkungsquerschnitts.

Nach der Formel

$$\sigma = \frac{N_t \cdot 4\pi}{J_\gamma \cdot \Omega \cdot N_{\text{Li}}},$$

wobei N_t = Zahl der entstandenen Spuren ($= A \cdot N_s$)
 J_γ = in den Raumwinkel 4π emittierte γ -Quantenzahl
 Ω = von der Platte aufgespannter Raumwinkel
 N_{Li} = Zahl der Li-Atome im ausgemessenen Gebiet,

erhalten wir für beide Platten in guter Übereinstimmung:

$$\sigma = (2,65 \pm 0,8) \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2.$$

1.4. Winkelverteilung.

Θ sei der Winkel zwischen einfallendem γ -Strahl und emittiertem Triton. Aus der experimentellen Verteilung des Winkels Θ , wie sie unmittelbar aus den Messungen folgt, berechneten wir $W(\Theta)$ pro Raumwinkeleinheit, wobei zu beachten war, dass der Austrittsfaktor A von Θ abhängt.

Um die Winkel Θ messen zu können, muss zu jedem in der Platte gefundenen Ereignis die Einfallsrichtung rekonstruiert werden, was am raschesten graphisch geschieht. Die γ -Strahlung geht nun aber von einer Fläche aus; die gesuchte Richtung ist demnach um so besser bestimmt, je weiter die Platte vom Entstehungsort der γ -Strahlen entfernt ist. Um nicht allzu lange bestrahlen zu müssen, wählten wir einen mittleren Abstand von 4,5 cm. So erhielten wir nach ca. 160 Std. Bestrahlung durchschnittlich 9 brauchbare Ereignisse pro cm^2 .

a) Das Winkel-Auflösungsvermögen.

Bei gewähltem Abstand hängt die Genauigkeit noch von der Grösse des Targetflecks ab. Die engste Blende im Protonenstrahl, unmittelbar vor der Target, hatte einen Durchmesser von 6 mm. Ein kleinerer Blendendurchmesser macht den Betrieb unstabil, weil die Position des Protonenstrahls kleinen Schwankungen unterworfen ist. Die Geometrie unserer Anordnung ist schematisch in

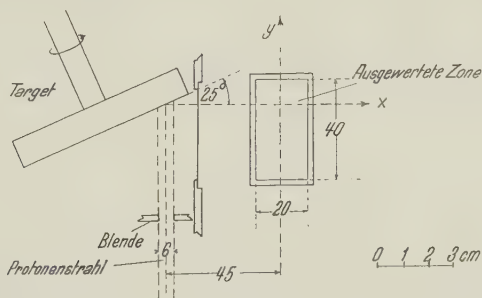


Fig. 4.

Anordnung der Platten bei Bestrahlung zur Bestimmung der Winkelverteilung.

Fig. 4 dargestellt. Vom Punkt mit dem kleinsten Abstand vom Auftreffzentrum der Protonen ($a = 3,5$ cm) erscheint der 6 mm breite Fleck unter einem Winkel von 10° , so dass Θ auf $\pm 5^\circ$ bestimmt ist. Bei einem mittleren Abstand von $a = 4,5$ cm wird der Fehler von Θ : $\pm 4^\circ$.

b) Bestrahlung.

Für die 160 Std. Bestrahlung benötigten wir eine Zeit von 8 Tagen. Um den Einfluss des „fading“ während einer solchen Zeitspanne zu untersuchen, bestrahlten wir in Zeitintervallen von 4 Tagen während je 2 Std. Platten mit Radium-Beryllium-Neutronen. Die Spuren aus dem Prozess $\text{Li}_3^6(n, \alpha)\text{H}_1^3$ vom ersten, fünften und neunten Tag zeigten nur bei ganz schwacher Entwicklung den Einfluss des „fading“.

c) Ausmessung.

Die in Fig. 4 angegebenen x - und y -Achsen wurden in die Platten eingraviert. Von jedem Ereignis wurde ausser der x - und y - auch die z -Koordinate des Trennpunktes $\alpha\text{-H}_1^3$ bestimmt, um die Tiefenverteilung der Ereignisse kontrollieren zu können. Zudem wurden der Winkel zwischen Triton und y -Achse sowie die zur Berechnung der wahren Längen der α - und Triton-Spuren notwendigen Daten aufgenommen.

Auch hier beschränkten wir uns, wie bei der Ausmessung der Platten zur Bestimmung des Wirkungsquerschnitts (vgl. 1.3c), auf jene Spuren, die weniger als 50° gegen die Plattenebene geneigt sind.

d) Berechnung von $W(\Theta)$ aus der experimentellen Statistik.

Um die Winkelverteilung darzustellen, unterteilten wir den Winkelbereich π in Intervalle von je 10° : $0^\circ\text{--}10^\circ = \Delta\Theta_1$, $10^\circ\text{--}20^\circ = \Delta\Theta_2$, usw. Somit stellte sich die Aufgabe, für jedes Intervall $\Delta\Theta_i$ aus der gemessenen Spurenzahl $N_g(\Delta\Theta_i)$ die Anzahl $N(\Delta\Theta_i)$ pro Raumwinkeleinheit zu berechnen:

$$N(\Delta\Theta_i) = \frac{N_g(\Delta\Theta_i)}{\Omega(\Delta\Theta_i)}.$$

$\Omega(\Delta\Theta_i)$ resultiert aus folgender Rechnung: Vorerst muss man sich die Platte in die in Fig. 5 angegebenen Zonen aufgeteilt denken. Wird ein Li-Atom, das in der Zone B z. B. im Punkte P_1 liegt, gespalten, so wird die Spur nur gezählt, wenn sie gegenüber dem Glas einen Neigungswinkel $\Phi \leq 50^\circ$ hat. Dann wird $\Omega(\Delta\Theta_i)$

1^B) für die Intervalle $\Delta\Theta_1$ bis $\Delta\Theta_5$:

$$\Omega^B(\Delta\Theta_i)_1 = 2\pi \int_{(i-1) \cdot 10^\circ}^{i \cdot 10^\circ} \sin \Theta \cdot d\Theta,$$

2^B) für die Intervalle $\Delta\Theta_5$ bis $\Delta\Theta_9$:

$$\Omega^B(\Delta\Theta_i)_2 = 4\pi \int_{(i-1) \cdot 10^\circ}^{i \cdot 10^\circ} \sin \Theta \cdot \arcsin \frac{\sin 50^\circ}{\sin \Theta} \cdot d\Theta.$$

Für einen Punkt der Zone A, der von der Oberfläche den Abstand ξ_2 hat, gilt:

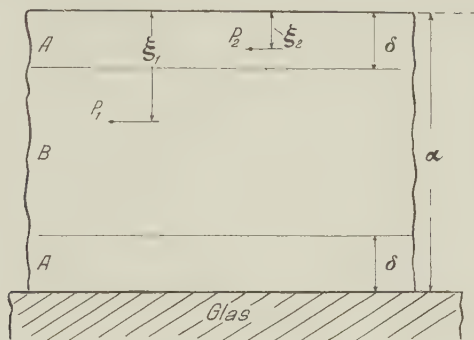


Fig. 5.

Zoneneinteilung der photographischen Schicht zur Berechnung der Intensität pro Raumwinkleinheit.

$$\delta = R \cdot \sin \Theta \quad \text{für } \Theta < 50^\circ \quad \delta = R \cdot \sin 50^\circ \quad \text{für } \Theta \geq 50^\circ$$

R = Summe der Längen von α - und H_β^3 -Spur.

1^A) für die Intervalle $\Delta\Theta_1$ bis $\Delta\Theta_5$: Wir berechnen zuerst $\Omega^{-\xi A}(\Theta)$, gemittelt über ξ im Bereich $\xi = 0$ bis $\xi = R \cdot \sin \Theta$.

$$\begin{aligned} \Omega^{-\xi A}(\Theta)_1 &= 2 \cdot \sin \Theta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \arcsin \frac{\xi}{R \cdot \sin \Theta} \cdot d\xi \right) \\ &= 2 \cdot \sin \Theta \cdot (\pi - 1) \end{aligned}$$

$\Omega^{-\xi A}(\Theta)_1$, integriert über ein Intervall $\Delta\Theta_i$, liefert:

$$\begin{aligned} \Omega^{-\xi A}(\Delta\Theta_i)_1 &= 2(\pi - 1) \int_{(i-1) \cdot 10^\circ}^{i \cdot 10^\circ} \sin \Theta \cdot d\Theta \\ &= 2(\pi - 1) \cdot \{ \cos [(i-1) \cdot 10^\circ] - \cos (i \cdot 10^\circ) \}. \end{aligned}$$

2^A) für die Intervalle $\Delta\Theta_5$ bis $\Delta\Theta_9$, gemittelt über ξ zwischen $\xi = 0$ und $\xi = R \cdot \sin 50^\circ$:

$$\begin{aligned} \Omega^{-\xi A}(\Theta)_2 &= 2 \cdot \sin \Theta \cdot \arcsin \frac{\sin 50^\circ}{\sin \Theta} \\ &\quad + 2 \cdot \sin \frac{1}{R \cdot \sin 50^\circ} \int_0^{R \cdot \sin 50^\circ} \arcsin \frac{\xi}{R \cdot \sin \Theta} \cdot d\xi. \end{aligned}$$

Wie unter 1⁴) findet man den Raumwinkelanteil für ein Intervall $\Delta\theta_i$ durch Integration über θ von $(i-1) \cdot 10^0$ bis $i \cdot 10^0$.

Der endgültige Ausdruck für $\Omega(\Delta\theta_i)$ ist dann gleich der Summe:

$$\Omega(\Delta\theta_i) = \frac{\Omega^B(\Delta\theta_i) \cdot [d - 2 \delta(R, \theta)]}{d} + \frac{\Omega^{-\xi A}(\Delta\theta_i) \cdot 2 \delta(R, \theta)}{d}.$$

Alle vorkommenden Integrale lassen sich bequem geschlossen berechnen, solange jeder Schicht ξ bis $\xi + d\xi$ das gleiche Gewicht zukommt. Im Falle, wo man auf Grund der Tiefenverteilung der Spuren den einzelnen Schichten Gewichte zuordnet, führt graphische Integration schneller zum Ziel.

Unsere Berechnungen von $\Omega(\Delta\theta_i)$ beruhen auf der folgenden Annahme: Die Wahrscheinlichkeit für die Entstehung eines $\text{Li}(\gamma, \alpha)\text{H}_1^3$ -Prozesses und dafür, dass die Spur, wenn sie den gestellten Bedingungen genügt, auch gefunden wird, soll von ξ unabhängig sein. Nun hat sich aber bei der Auswertung gezeigt, dass bei einigen Platten gegen die Oberfläche hin relativ mehr Ereignisse gefunden werden als in tieferen Schichten. Aus der Abweichung zwischen dieser experimentell gefundenen Verteilung und der errechneten ergeben sich Gewichte, die man den einzelnen Schichten zuordnen und — wie erwähnt — in der Berechnung von $\Omega(\Delta\theta_i)$ berücksichtigen muss.

Die Inhomogenität in der Spurenzahl erklärt sich einerseits aus den besseren Beobachtungsverhältnissen an der Oberfläche, andererseits kann — aus Gründen, die schon dargelegt wurden (vgl. 1.3d) — die Li-Konzentration an der Oberfläche manchmal etwas grösser sein als in den tiefsten Schichten.

e) Resultat und Diskussion.

Die so erhaltenen Intensitäten pro Raumwinkeleinheit wurden noch übergreifend gemittelt (siehe Fig. 5):

$$N(\Delta\theta_i) = \frac{N(\Delta\theta_{i-1}) + N(\Delta\theta_i) + N(\Delta\theta_{i+1})}{3}.$$

Sucht man mit dem Ansatz $W(\theta) = 1 - a \cdot \cos \theta$ die beste Anpassung, so findet man $a = 0,1$ mit einem mittleren Fehler von 0,09, d. h.

$$W(\theta) = 1 - (0,1 \pm 0,09) \cdot \cos \theta.$$

Eine solche Winkelverteilung stimmt mit den folgenden Annahmen über die Absorption der γ -Strahlung überein.

Der Grundzustand von Li_3^7 ist sowohl nach den experimentellen Ergebnissen⁹⁾ als auch nach dem Schalenmodell ein $^2P_{3/2}^-$ -Zustand.

Die Winkelverteilung wird isotrop, wenn man annimmt, dass die MD - und EQ -Absorption auf einen ${}^2P_{1/2}^-$ -Zustand führen. Bei ED -Absorption sind die Fälle ${}^2P_{1/2}^+$ und ${}^2P_{3/2}^+$ möglich, die beide mit $l=1$ zerfallen. Ist die erste Möglichkeit allein vorhanden, so erhält man für die Gesamtheit aller Fälle Isotropie. Eine Beimischung von ${}^2P_{3/2}^+$ -Zuständen kann durch Interferenz mit den ${}^2P_{1/2}^-$ -Zuständen Anlass zu einem $\cos \Theta$ -Glied in der Winkelverteilung geben.

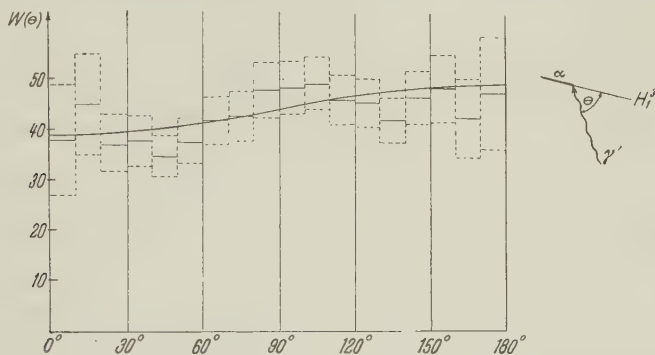


Fig. 6.

$\text{Li}_3^7(\gamma, \alpha) \text{H}_1^3$: Winkelverteilung $W(\Theta)$ auf Grund von 380 Spuren.

2. Gamma-Alpha-Prozess an Sauerstoff.

2.1. Problemstellung.

Am Sauerstoffkern O_8^{16} sind die folgenden zwei (γ, α) -Prozesse möglich:

$$1) \quad \text{O}_8^{16} + \gamma = \text{C}_6^{12} + \alpha \quad Q = 7,21 \text{ MeV}$$

Die Energie $E_\gamma = 17,6 \text{ MeV}$ reicht auch aus für den Übergang in das erste angeregte Niveau des Kohlenstoffs:

$$2) \quad \text{O}_8^{16} + \gamma = \text{C}_6^{*12} + \alpha \quad E^* = 4,47 \text{ MeV}$$

$$\text{C}_6^{*12} = \text{C}_6^{12} + \gamma$$

Die Reaktionen 1) und 2) kann man vergleichen mit den entsprechenden Möglichkeiten beim (γ, α) -Prozess an C, nämlich:

$$1') \quad \text{C}_6^{12} + \gamma = \text{Be}_4^8 + \alpha \quad Q = 7,3 \text{ MeV}$$

$$\text{und } 2') \quad \text{C}_6^{12} + \gamma = \text{Be}_4^{*8} + \alpha \quad E^* = 2,8 \text{ MeV}$$

$$\text{Be}_4^{*8} = 2\alpha + E(2,9 \text{ MeV})$$

Wie man Fig. 7 entnehmen kann, sind die möglichen Zwischen- und Endzustände beim (γ, α) -Prozess an O und C in bezug auf Spin

und Parität identisch. Das führte uns dazu, die Verzweigungsverhältnisse für diese beiden Prozesse miteinander zu vergleichen.

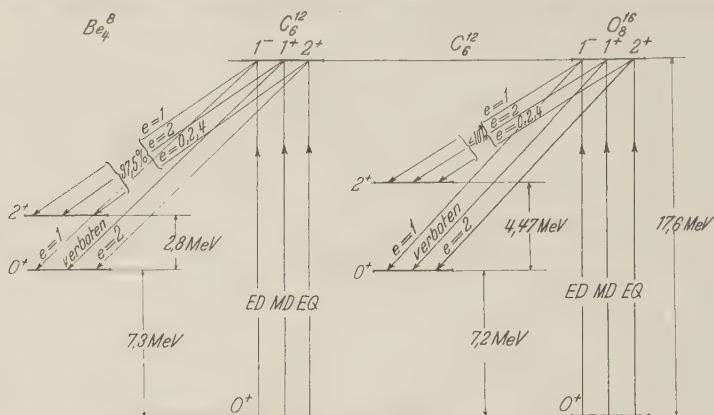


Fig. 7.

(γ, α) -Prozess an C und O.

Dieses Schema soll die Spin- und Paritätseigenschaften veranschaulichen, die zu den Zerfällen durch Absorption von ED -, MD - und EQ - γ -Strahlung gehören. Die höheren Multipolordnungen dürfen bei der hier betrachteten γ -Energie vernachlässigt werden. ED -Absorption ist erst möglich, wenn wir eine Asymmetrie zwischen Neutronen und Protonen zulassen; d. h. wir dürfen kein α -Teilchen-Modell annehmen.

Die Energie der eingezeichneten Niveaus von Be, bzw. C ist durch verschiedene Experimente*) sichergestellt.

Die Zuordnung von Drehimpuls und Parität folgt für Be aus der Energieverteilung der α -Teilchen in C-Sternen**), und bei C findet man 2^- aus der Analyse der Prozesse $Be_8^9(\alpha, n) C_{12}^{12}$ und $N_7^{15}(p, \alpha) C_{12}^{12}$ ***).

*) W. F. HORNYAK et al., Rev. mod. Phys. **22**, 291 (1950).

) V. L. TELEGI, Phys. Rev. **84, 600 (1951).

***) R. R. HAEFNER, Rev. mod. Phys. **23**, 228 (1951).

Die Emissionswahrscheinlichkeit für ein Teilchen, das aus dem Niveau n des Zwischenkerns kommt, und zwar mit dem Bahndrehimpuls l in bezug auf den Restkern, der noch mit der Energie α angeregt ist, ist proportional zu^{10) 11)}:

$$I_{a\alpha l}^n = 4\pi \cdot \frac{h}{m_a} K_{a\alpha}^n \cdot (2I_a + 1) \cdot (2I_R + 1) \cdot |\Phi_{a\alpha l}(R)|^2 \cdot T_{a l}(\varepsilon_\alpha^n)$$

wobei:

I_a = Spin von a ,

I_R = Spin des Restkerns,

$\frac{h}{m_a} \cdot K_{a\alpha}^n$ = Geschwindigkeit von a ,

$\Phi_{a\alpha l}(R)$ = Radialteil der auslaufenden Welle, am Ort R
(R = Kernradius),

$T_{a l}(\varepsilon_\alpha^n)$ = Schwächungsfaktor der auslaufenden Welle, herrührend von der Potential- und Zentrifugalbarriere.

Die Werte I_a und I_R sind für die entsprechenden Übergänge bei C und O gleich. Die zugehörigen Werte von $T_{at}(\epsilon_\alpha^n)$ können, wie aus den folgenden Überlegungen hervorgeht, keine wesentliche Änderung der Verzweungsverhältnisse bewirken. Das α -Teilchen aus dem Prozess 2) hat zwar weniger Energie als dasjenige aus der Reaktion 2'); doch liegt seine Energie $E' \approx 6$ MeV beim Übergang ins angeregte C-Niveau mit $l = 0$ immer noch über der Potentialbarriere. Ist $l = 2$ (Zerfall des 1^+ -Zustandes), so ist die Summe der Höhen von Potential- und Zentrifugalbarriere $\sim 7,5$ MeV, — also 1,5 MeV höher als die α -Energie. Dies ergibt jedoch keine Begünstigung des Überganges in den Grundzustand, da dieser verboten ist und zwar weil es ein Übergang mit $l = 1$ ohne Paritätsänderung wäre.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Verzweungsverhältnissen bedeutet also, dass $|\Phi_{a\alpha l}(R)|^2$ bei C und O verschiedene Werte hat. Dieser Ausdruck kann jedoch nur auf Grund von Annahmen über den Aufbau der Kerne C und O berechnet werden. Die experimentellen Werte für diese Verzweungsverhältnisse werden also zu einem Prüfstein für ein Modell der C- und O-Kerne.

Eine weitere Eigenschaft des O_8^{16} -Kerns erhält man aus folgendem Vergleich: $E_\gamma = 17,6$ MeV reicht auch noch aus für den Prozess $\text{O}_8^{16}(\gamma, 4\alpha)$. Der Wirkungsquerschnitt wird von F. K. GOWARD und J. J. WILKINS¹²⁾ zu $\sigma[\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, 4\alpha)] \approx 1,5 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2$ angegeben. Zusammen mit unserem Wirkungsquerschnitt für den Prozess $\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, \alpha) \text{ C}_6^{12}$ lässt sich das Verhältnis

$$\sigma[\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, 4\alpha)] / \sigma[\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, \alpha) \text{ C}_6^{12}]$$

angeben.

2.2. Experimente.

a) Kohlenstoff.

Wie wir in einer früheren Arbeit¹³⁾ zeigten, beträgt der Anteil der Übergänge in den Grundzustand 2,5%.

b) Sauerstoff.

In einer Kernphotoplatte, die mit Lithiumgammastrahlen bestrahlt wird, können durch folgende Prozesse α -Teilchen entstehen:

1. $\text{O}_8^{16}(\gamma, \alpha) \text{ C}_6^{12}$
2. $\text{C}_6^{12}(\gamma, \alpha) 2\alpha$
3. $\text{N}_7^{14}(\gamma, \alpha) \text{ B}_5^{10}$
4. $\text{Br}_{35}^{79} \text{ und } 81(\gamma, \alpha) \text{ As}_{33}^{75} \text{ und } 77$
5. $\text{Ag}_{47}^{107} \text{ und } 109(\gamma, \alpha) \text{ Rh}_{45}^{102} \text{ und } 105$.

Für die gesuchten α -Teilchen aus dem Prozess 1) errechnet man folgende Energien: Ist $E_\gamma = 17,6$ MeV und der Restkern C_6^{12} nicht angeregt, so wird $E_\alpha = 7,8$ MeV; führt der Zerfall jedoch auf das erste angeregte Niveau von C, so wird $E_\alpha = 4,45$ MeV. $E_\gamma = 14,8$ MeV (2. Komponente der $Li(p, \gamma)$ -Strahlung) führt auf α -Teilchen mit maximaler Energie $E_\alpha = 5,7$ MeV.

Die Reaktion 2) ergibt die bekannten C-Sterne. Da der Wirkungsquerschnitt dieses Prozesses bekannt ist ($\sigma = 2,4 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$)¹²⁾, bestimmten wir σ vom Prozess 1) relativ zu diesem Wert.

Zu den störenden Reaktionen 3)–5) gehören α -Teilchen mit nachstehenden Energien:

$$\text{zu 3)} \quad N^{14} + \gamma \rightarrow B^{10} + \alpha \quad Q = 11,7 \text{ MeV}$$

Führt der (γ, α) -Prozess an N_7^{14} auf den Grundzustand von Bor, so ergibt sich bei $E_\gamma = 17,6$ MeV für das α -Teilchen eine maximale Energie von 4,22 MeV.

$$\text{zu 4)} \quad E_{\alpha \text{ max}} = 12,0 \text{ MeV (Begründung s. Abschnitt 3)}$$

zu 5) Die α -Teilchen aus diesem Prozess sind sehr selten, da die Austrittswahrscheinlichkeit für α -Teilchen aus Ag, verglichen mit derjenigen aus Br, bei derselben Anregung von 17,6 MeV rund 10^3 mal kleiner ist.

Wir haben in einer mit Lithiumgammastrahlung bestrahlten Platte alle α -Spuren zwischen 4 und 13 MeV ausgemessen. Die Energieverteilung der 880 gefundenen Spuren ist in Fig. 8 dargestellt. Aus dieser Verteilung sollte nun das Verhältnis zwischen der Anzahl der α -Teilchen von 7,8 MeV und derjenigen von 4,5 MeV bestimmt werden.

Die Energieauflösung in einer Photoplatte reicht jedoch nicht aus, um die drei Gruppen:

$$\begin{array}{ll} N_7^{14} (\gamma_{17,6}, \alpha) B_5^{10} & E_\alpha = 4,22 \text{ MeV,} \\ O_8^{16} (\gamma_{17,6}, \alpha) C_6^{*12} & E_\alpha = 4,45 \text{ MeV,} \\ O_8^{16} (\gamma_{14,8}, \alpha) C_6^{12} & E_\alpha = 5,7 \text{ MeV,} \end{array}$$

einzelnen zu trennen. Zu diesen Gruppen kommt ein kleiner Beitrag von Po- α -Spuren ($E_\alpha = 5,29$ MeV), der von einer Platte zur andern stark variieren kann, wie Kontrollmessungen an unbestrahlten Platten gezeigt haben. Dagegen lässt sich der Anteil der 7,8 MeV- α -Teilchen gut angeben, wenn man den Beitrag der Br- α -Teilchen (punktierte Linie in Fig. 8) subtrahiert.

Wir gelangten zu folgenden Resultaten: Die Fläche der in Fig. 8 eingezeichneten Gausskurve entspricht 362 Spuren; korrigiert auf Spurenaustritt (vgl. 1.3c), sind es 432 α -Teilchen. Für das gleiche Gebiet ist die korrigierte Zahl der C-Sterne 1116. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung des C- und O-Gehalts der Emulsion:

$$\frac{\sigma[\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, \alpha) \text{C}_6^{12}]}{\sigma[\text{C}_6^{12}(\gamma_{17,6}, \alpha) 2 \alpha]} = 0,82 \pm 0,1.$$

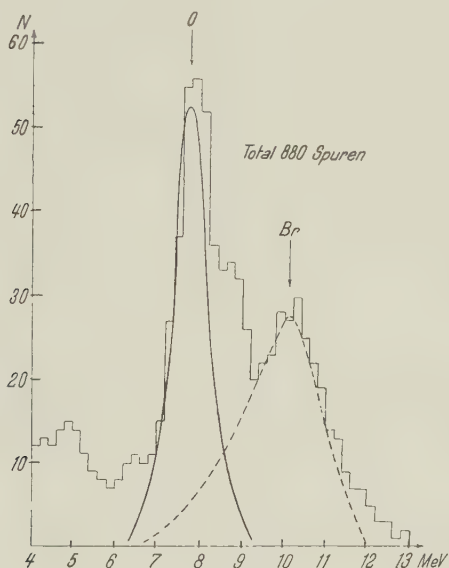


Fig. 8.

α -Spuren aus einer mit $\text{Li}(\text{p}, \alpha)$ -Strahlen bestrahlten Kernphotoplatte.

Der zitierte Wert von $\sigma[\text{C}_6^{12}(\gamma_{17,6}, \alpha) 2 \alpha]$ führt auf den Absolutwert:

$$\sigma[\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, \alpha) \text{C}_6^{12}] = (1,95 \pm 0,8) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

Für den Anteil der Übergänge in das erste angeregte Niveau von C findet man als obere Grenze:

$$\frac{\sigma[\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, \alpha) \text{C}_6^{12}]}{\sigma[\text{O}_8^{16}(\gamma_{17,6}, \alpha) \text{C}_6^{*12}]} > 90.$$

2.3. Diskussion der Resultate.

Das Verzweigungsverhältnis bei der Photospaltung an Sauerstoff ist im Sinne der in der Einleitung 2.1 gemachten Überlegung zu vergleichen mit demjenigen bei der Kohlenstoffphotospaltung. Dort ist der Anteil der Übergänge in den Grundzustand 2,5%; während er bei Sauerstoff mindestens 90% beträgt.

Diese Verschiebung des Verzweigungsverhältnisses bei O zugunsten der Übergänge in den Grundzustand würde verständlich, wenn man zeigen könnte, dass die *ED*-Absorption durch den O-Kern viel grösser ist als diejenige des C-Kerns. Von den drei betrachteten Anregungsarten hat nämlich beim Zerfall des 1-Zustandes der Übergang in den Grundzustand das relativ grösste Gewicht. Für beide Übergänge ist $l = 1$. *ED*-Absorption würde allerdings heissen, dass man sich den angeregten Zustand nicht aus α -Teilchen aufgebaut vorstellen darf.

3. Gamma-Alpha-Prozess an Brom.

3.1. Einleitung.

Bei der experimentellen Bestimmung der Verhältnisse $\sigma(\gamma, p)/\sigma(\gamma, n)$ ergaben sich bei hohen Protonenbindungsenergien Resultate, die gegenüber den nach der statistischen Kerntheorie errechneten Werten 20–100mal zu gross waren¹⁴). Diese Diskrepanz kann am besten erklärt werden, wenn man neben der Zwischenkernbildung auch Zerfälle durch direkten Photoeffekt postuliert¹⁵). Eine direkte Wechselwirkung zwischen γ -Strahl und α -Teilchen ist sehr unwahrscheinlich. Demnach ist zu erwarten, dass die statistische Kerntheorie die richtige Grössenordnung für das Verhältnis $\sigma(\gamma, \alpha)/\sigma(\gamma, n)$ liefert. Das soll nun nachgeprüft werden am Element Brom. Den Wert von $\sigma(\gamma, \alpha)$ erhalten wir aus der nachfolgend besprochenen Messung, und $\sigma(\gamma, n)$ entnehmen wir einer Arbeit von O. HIRZEL und H. WÄFFLER¹⁶).

3.2. Bestimmung des Wirkungsquerschnitts $\sigma(\gamma, \alpha)$, gemittelt für die beiden Bromisotope Br^{79} und Br^{81} .

a) Berechnung der Energieverteilung.

Die Energieverteilung der α -Teilchen in einer mit $Li(p, \gamma)$ -Strahlen bestrahlten Kernphotoplatte weist, wie man aus Fig. 8 ersieht, bei 10 MeV ein Maximum auf, das man den Prozessen $Br^{79}(\gamma, \alpha)$ und $Br^{81}(\gamma, \alpha)$ zuordnen muss. Die eingezeichnete punktierte Linie stellt die auf Grund der statistischen Kerntheorie berechnete Ener-

gieverteilung der α -Teilchen aus diesen Prozessen dar. Ihre Form ergibt sich folgendermassen:

Nach dem Prinzip der „detailed balance“ gilt für die Energieverteilung der austretenden α -Teilchen die Beziehung¹⁰⁾:

$$J(\varepsilon) = \frac{2m}{\hbar} \cdot \varepsilon \cdot \sigma_{\alpha}(\varepsilon) \cdot \omega_R(\varepsilon_{\alpha \max} - \varepsilon) \cdot d\varepsilon,$$

wobei ε = Energie des α -Teilchens

$\varepsilon_{\alpha \max}$ = maximale Energie des α -Teilchens

[= Differenz von Anregungs- und Bindungsenergie]

$\sigma_{\alpha}(\varepsilon)$ = Wirkungsquerschnitt für den inversen Prozess

$\omega_R(\varepsilon_{\alpha \max} - \varepsilon)$ = Niveaudichte des Restkerns.

$\varepsilon_{\alpha \max}$ ist für die beiden Bromisotope verschieden.

Die beste Anpassung der theoretischen Kurve an die experimentell gefundene Verteilung ergibt sich, wenn für Br^{79} ein $\varepsilon_{\alpha \max}$ von 12 MeV im Laborsystem, das sind 12,6 MeV im Schwerpunktssystem, angenommen wird. Um $\varepsilon_{\alpha \max}$ für Br^{81} zu erhalten, berechneten wir die Differenz der Bindungsenergien eines α -Teilchens in Br^{79} , bzw. Br^{81} nach der Massenformel, wie sie von FERMI¹⁷⁾ angegeben wurde. Wir erhielten $\Delta Q = 0,6$ MeV und somit $\varepsilon_{\alpha \max}$ für $\text{Br}^{81} = 11,5$ MeV.

Die Werte von $\sigma_{\alpha}(\varepsilon)$ entnahmen wir einer Arbeit von BLATT und WEISSKOPF¹⁸⁾.

Setzt man den Zerfall eines hoch angeregten Zwischenkerns in Analogie zu einem Verdampfungsprozess, so folgt für $\omega(E)$ die allgemeine Form

$$\omega(E) = C(A) \cdot e^{2[a(A) \cdot E]^{\frac{1}{2}}}$$

(A = Massenzahl des betrachteten Kerns).

Der experimentellen Erfahrung angepasste Kurven $C(A)$ und $a(A)$ finden sich ebenfalls in der erwähnten Arbeit von BLATT und WEISSKOPF¹⁸⁾.

Damit kennt man alle zur Berechnung von $J(\varepsilon)$ notwendigen Grössen. Die in Fig. 8 eingezeichnete Kurve stellt die Superposition der Beiträge von Br^{79} und Br^{81} dar.

Es ist noch zu erwähnen, dass die 14,8 MeV- γ -Linie der $\text{Li}(p, \gamma)$ -Strahlung zu einer Anregung führt, die ganz wenig oberhalb der Potentialbarriere von 14,25 MeV liegt. Also ist der Beitrag dieser Linie, die einem $\varepsilon_{\alpha \max}$ von 9,4 MeV entspricht, ca. $2 \cdot 10^2$ mal kleiner als derjenige der 17,6 MeV-Linie und darf daher vernachlässigt werden.

b) Auswertung der Messungen.

Die Fläche unter der punktierten Kurve von Fig. 8 entspricht 360 Spuren, die ganz in der Schicht der Kernphotoplatte verlaufen. Wenn die Längenverteilung der Spuren und die Plattendicke gege-

ben sind, lässt sich der Austrittsfaktor $A = N_t/N_s$ (vgl. 1.3c) leicht berechnen. Wir erhielten $A = 1,26$ und somit

$$N_{\text{kor.}} = 1,26 \cdot 360 = 453.$$

Im gleichen Gebiet der abgesuchten Platten wurden (mit der Korrektur für den Austritt) 1116 C-Sterne gefunden und damit ein Verhältnis der Wirkungsquerschnitte von

$$\frac{\sigma_{\text{Br}^{79} \text{ und } 81}(\gamma_{17,6}, \alpha)}{\sigma_{\text{C}^{12}}(\gamma_{17,6}, 3\alpha)} = 0,51 \pm 0,05.$$

Benutzen wir den Wert von WILKINS¹²⁾ für den Wirkungsquerschnitt der Kohlenstoffspaltung, so folgt der absolute Wert:

$$\sigma_{\text{Br}^{79} \text{ und } 81}(\gamma_{17,6}, \alpha) = (1,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

3.3. Der Wirkungsquerschnitt $\sigma(\gamma, n)$, gemittelt für die beiden Bromisotope Br^{79} und Br^{81} .

Der Wert von $\sigma(\gamma, n)$ an Br^{79} , bzw. Br^{81} relativ zu $\sigma(\gamma, n)\text{Cu}^{63}$ wurde von O. HIRZEL und H. WÄFFLER¹⁶⁾ bestimmt. Innerhalb der Genauigkeit, mit der wir rechnen wollen, dürfen wir die von ihnen angegebenen Verhältnisse $\sigma(\gamma, n)\text{Br}^{79}/\sigma(\gamma, n)\text{Cu}^{63} = 0,73$ und $\sigma(\gamma, n)\text{Br}^{81}/\sigma(\gamma, n)\text{Cu}^{63} = 0,83$ denjenigen gleichsetzen, die sich für die 17,6-Komponente der $\text{Li}(p, \gamma)$ -Strahlung allein ergeben würden. Für den Wirkungsquerschnitt $\sigma(\gamma_{17,6}, n)\text{Cu}^{63}$ setzen wir als Mittelwert aus verschiedenen Publikationen $0,8 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ ^{16) 19) 20)}. Dann wird, unter Berücksichtigung der Isotopenanteile in Br, der mittlere Wert von $\sigma_{\text{Br}^{79} \text{ und } 81}(\gamma, n) = 0,62 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. Das Experiment liefert somit:

$$\frac{\sigma_{\text{Br}^{79} \text{ und } 81}(\gamma_{17,6}, \alpha)}{\sigma_{\text{Br}^{79} \text{ und } 81}(\gamma_{17,6}, n)} = (1,9 \pm 1) \cdot 10^{-3}.$$

3.4. Berechnung des Verhältnisses $\sigma(\gamma, \alpha)/\sigma(\gamma, n)$, gemittelt für Br^{79} und Br^{81} , bei einer γ -Energie von 17,6 MeV (auf Grund der statistischen Kerntheorie).

Die Austrittswahrscheinlichkeit für ein Teilchen i ist:

$$\eta_i = \frac{\bar{I}_i}{\bar{I}_1 + \dots + \bar{I}_k} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Daraus folgt:

$$\frac{\eta_\alpha}{\eta_n} = \frac{\bar{I}_\alpha}{\bar{I}_n}.$$

Setzt man die Werte für \bar{I} ein, so ergibt sich:

$$\eta_{\alpha} = \frac{(2s_{\alpha} + 1) m_{\alpha} \int_0^{\varepsilon_{\alpha \max}} \varepsilon \cdot \sigma_{\alpha}(\varepsilon) \cdot \omega_R(\varepsilon_{\alpha \max} - \varepsilon) d\varepsilon}{(2s_n + 1) m_n \int_0^{\varepsilon_{n \max}} \varepsilon \cdot \sigma_n(\varepsilon) \cdot \omega_R(\varepsilon_{n \max} - \varepsilon) d\varepsilon} = \frac{1 \cdot F_{\alpha}(\varepsilon_{\alpha \max})}{2 \cdot F_n(\varepsilon_{n \max})}.$$

Die Werte von F_{α} , bzw. F_n sind von BLATT und WEISSKOPF berechnet worden. Wir benutzen zunächst die Angaben für $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-13}$ cm. Da die beiden Prozesse (γ, n) an Br^{79} und Br^{81} je auf einen (u, u) -Kern als Restkern führen, sind die F_n -Werte noch mit 2 zu multiplizieren.

$\varepsilon_{\alpha \max}$ Br^{79} können wir, wie schon erwähnt, unserer Energieverteilung der α -Spuren entnehmen (Fig. 8). Zur Berechnung von $\varepsilon_{n \max}$ benutzen wir die Bindungsenergien 10,6 MeV für Br^{79} , bzw. 9,95 MeV für Br^{81} , woraus schliesslich folgt:

$$\sigma(\gamma, \alpha) = \begin{cases} 8 \cdot 10^{-4} = q^{79} & \text{Br}^{79} \\ 3 \cdot 10^{-4} = q^{81} & \text{Br}^{81} \end{cases}.$$

Um mit dem experimentellen Verhältnis vergleichen zu können, müssen wir die Werte q^{79} und q^{81} gemäss den Isotopenanteilen mitteln. Unter Benützung des experimentellen Wirkungsquerschnittsverhältnisses q_{ex} des (γ, n) -Prozesses an den beiden Bromisotopen kommen wir schliesslich zu:

$$\frac{\sigma_{\text{Br}^{79} \text{ und } 81}(\gamma, \alpha)}{\sigma_{\text{Br}^{79} \text{ und } 81}(\gamma, n)} = \frac{q_{\text{ex}}(q_{\text{th}}^{79} \cdot 50,5 + q_{\text{th}}^{81} \cdot 49,5)}{q_{\text{ex}} \cdot 50,5 + 49,5} = 5,4 \cdot 10^{-4}.$$

Diese Zahl erhöht sich ungefähr um einen Faktor 6, wenn wir mit $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ cm statt mit $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-13}$ cm rechnen.

Das theoretische Resultat kann mit dem experimentellen demnach zur Übereinstimmung gebracht werden, wenn man für den Kernradius einen Wert zwischen $1,3 \cdot 10^{-13}$ cm und $1,5 \cdot 10^{-13}$ cm annimmt. Das zeigt, dass für den betrachteten Zwischenkern von Br^{79} und Br^{81} $|\Phi_{\alpha \lambda}|^2$ (vgl. 2.1) für Neutronen und α -Teilchen bei $E^* = 17,6$ MeV tatsächlich von derselben Grössenordnung ist, wie bei der Berechnung von $\sigma(\varepsilon)$ angenommen wird. Die Vorstellungen, wie sie die statistische Kerntheorie für die Konkurrenz zwischen (γ, n) und (γ, α) einführt, liefern ein Ergebnis, das durch das Experiment bestätigt wird.

Literatur.

- ¹⁾ E. W. TITTERTON, Proc. Phys. Soc. **63**, 915 (1950).
- ²⁾ R. L. WALKER, Phys. Rev. **74**, 327 (1948).
- ³⁾ W. F. HORNYAK and T. LAURITSON, Rev. mod. Phys. **20**, 191 (1948).
- ⁴⁾ R. R. WILSON, Rev. Sc. Instr. **12**, 91 (1941).
- ⁵⁾ H. YAGODA, Rev. Sc. Instr. **21**, 29 (1950).
- ⁶⁾ W. A. FOWLER, C. C. LAURITSON and T. LAURITSON, Rev. mod. Phys. **20**, 236 (1948).
- ⁷⁾ S. DEVONS and M. G. HINE, Proc. Roy. Soc. **199 A**, 56 (1949).
- ⁸⁾ E. BERNE, Rev. Sc. Instr. **22**, 509 (1951).
- ⁹⁾ J. MATTAUCH and S. FLÜGGE, Nuclear Physics Tables.
- ¹⁰⁾ V. F. WEISSKOPF, Lecture Series in Nuclear Physics, p. 81, U.S. Government Printing Office (1947).
- ¹¹⁾ E. FERMI, Nuclear Physics, p. 142, Revised Edition, University of Chicago Press.
- ¹²⁾ F. K. GOWARD and J. J. WILKINS, A.E.R.E., Harwell, 24 march 1952.
- ¹³⁾ H. NABHOLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **25**, 153 (1952).
- ¹⁴⁾ O. HIRZEL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **20**, 373 (1947).
- ¹⁵⁾ E. D. COURANT, Phys. Rev. **82**, 703 (1951).
- ¹⁶⁾ O. HIRZEL und H. WÄFFLER, Helv. Phys. Acta **21**, 200 (1948).
- ¹⁷⁾ E. FERMI, Nuclear Physics, p. 7, Revised Edition, University of Chicago Press.
- ¹⁸⁾ J. M. BLATT and V. F. WEISSKOPF, O. N. R. Techn. Report Nr. 42 (1950).
- ¹⁹⁾ R. L. WALKER, B. D. McDANIEL and M. B. STEARNS, Phys. Rev. **80**, 807 (1950).
- ²⁰⁾ H. E. JOHNS, L. KATZ, R. A. DOUGLAS and R. N. H. HASLAM, Phys. Rev. **80**, 1062 (1950).
- ²¹⁾ J. W. HALPERN, Photoneutron thresholds, University of Pennsylvania.
- ²²⁾ H. WÄFFLER und S. YOUNIS, Helv. Phys. Acta **24**, 483 (1951).

Scintillations de luminescence dans les iodures d'alcalins

par J. Bonanomi et J. Rossel (Université de Neuchâtel).

(6. VI. 1952.)

Summary: The following characteristics of luminescent scintillations produced by γ -rays and α -particles in pure and Tl-activated alkali-iodides have been measured between 77° K and 290° K:

- a) Decay law of the light pulses.
- b) Decay times ($10^{-7} < \tau < 10^3$ sec).
- c) Glow-curves.
- d) Luminescent yield.

The results could be interpreted quantitatively in terms of a model of luminescent center which describes the process as a monomolecular one and allows consistent determinations of the activation energy of the metastable state of the center.

Comparison of the behaviour of activated and unactivated crystals suggests that the action of Tl be limited on the trapping function of the center and the associated non-radiative transition, the emission process being left nearly unperturbed.

I. Introduction.

La luminescence des halogénures d'alcalins activés au thallium a été étudiée de façon approfondie par POHL et ses nombreux collaborateurs¹⁾. Une explication théorique des phénomènes observés a été proposée par SEITZ²⁾. Le principal objet des recherches de l'école de Göttingen était les bandes d'absorption dans l'ultraviolet, bandes dues à la présence dans les cristaux d'halogénures de traces de Tl, et reconnues identiques aux bandes d'excitation lumineuse de la phosphorescence. Le processus d'émission proprement dit n'a été que relativement peu étudié; v. MEYEREN³⁾ a déterminé les spectres d'émission, BÜNGER et FLECHSIG⁴⁾ ont mesuré le phénomène de décroissance de la phosphorescence faible de KCl:Tl.

Les composantes luminescentes à déclin rapide n'ont guère fait l'objet de mesures jusqu'ici en ce qui concerne le temps de décroissance. Depuis l'avènement des compteurs à scintillations en physique nucléaire, elles présentent, outre leur très grand intérêt in-

trinsèque pour la luminescence des solides, un intérêt considérable d'application à la mesure des radiations ionisantes; de plus elles peuvent maintenant être étudiées de façon relativement aisée et complète.

Nous nous sommes proposé de fournir dans ce travail une contribution à la connaissance de la luminescence des halogénures d'alcalins par la méthode du compteur à scintillations, ceci dans le cadre d'une recherche générale sur leurs possibilités comme détecteurs de radiations nucléaires.

Le fait que dans notre cas l'excitation de la luminescence est produite par des particules matérielles de grande vitesse et non par la lumière ultraviolette n'exclut aucunement une comparaison avec les résultats antérieurs obtenus par les méthodes classiques. Nous nous sommes limités au cas des iodures du fait que seul leur spectre d'émission se trouve dans la région spectrale de sensibilité de notre cellule photomultiplicatrice.

II. Préparation des cristaux.

Les cristaux étudiés ont été les iodures de Li, Na, K, Rb, Cs. Comme substances de départ n'ont servi que les produits les plus purs disponibles dans le commerce. Ces substances n'ont pas été soumises à une purification ultérieure.

Les cristaux ont été obtenus soit à partir de la substance fondue, soit à partir de la solution saturée du sel correspondant.

Pour les cristaux formés dans le sel fondu nous avons employé une méthode inspirée de KYROPOULOS⁵⁾. Dans la substance fondue, contenue dans un creuset de platine placé dans un four électrique, plonge verticalement un tube de platine, dont l'extrémité fermée est refroidie par un courant intérieur d'air comprimé. Le cristal croît sur cette extrémité dans le sel fondu vers l'intérieur du creuset. Le fond et le manchon du four possèdent des enroulements chauffants distincts; l'enroulement du manchon a un pas se resserrant vers le haut. En réglant séparément les courants de chauffe, il est ainsi possible d'atteindre une température homogène dans la masse fondue, ce qui permet au cristal de croître uniformément dans toutes les directions. Le four se trouve dans un cylindre de pyrex pouvant être évacué. En cours de croissance, le cristal est lentement sorti du sel en fusion grâce à une écluse étanche permettant à la tige-support du four de coulisser vers le bas. Les cristaux ont été produits, suivant les cas, dans l'air ou dans le vide; pour le iodure de Li, une atmosphère d'argon a été nécessaire du fait de la forte at-

taque chimique par l'air et par suite de la trop rapide vaporisation dans le vide. L'activation des cristaux par le Tl se faisait par addition au sel fondu d'une faible quantité de TlJ (environ 0,1‰). Tous les cristaux ont été produits avec ou sans Tl. La grandeur des monocristaux n'est limitée en principe que par le volume du creuset de platine (diamètre de 3 cm environ).

III. Dispositifs et méthodes de mesure.

L'ensemble des mesures de luminescence ont été effectuées avec un photomultiplicateur RCA 5819. Sa sensibilité spectrale ayant un maximum à 4800 Å, cette cellule est spécialement adaptée aux phosphores émettant dans le bleu.

L'excitation du cristal s'obtenait par irradiation de rayons γ ou α (Co^{60} , $\text{Th}(\text{C} + \text{C}')$, Ra, Po).

Le dispositif expérimental est visible sur la figure 1.

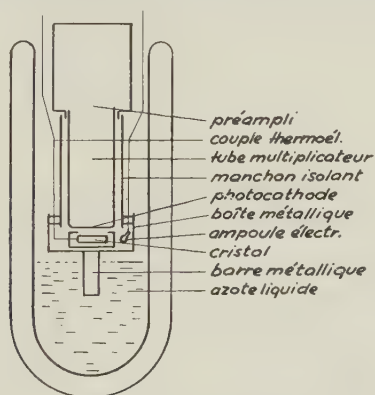


Fig. 1.
Dispositif expérimental.

Les mesures se sont étendues sur un domaine de températures compris entre 290° K et 77° K (azote liquide). La température du cristal pouvait être maintenue constante avec une précision de 0,5° environ. La construction particulière du tube 5819 permet de maintenir la photocathode à - 200° C sans que le socle et le système des électrodes se refroidisse sensiblement.

La petite ampoule à incandescence placée à côté du cristal assure, le cas échéant, par sa radiation rouge et infrarouge, le dépiégeage des électrons capturés dans le cristal.

Les mesures ont porté sur 1^o la forme et la durée du déclin de la luminescence, 2^o son intensité en fonction de la température, 3^o sur la thermoluminescence et 4^o les spectres d'émission.

1^o Mesure du processus de décroissance.

Dans l'hypothèse que, après excitation, l'intensité de l'émission décroît exponentiellement, on peut attribuer à chaque processus luminescent une durée de vie τ (indépendante de l'excitation). Les mesures complètes que nous avons effectuées montrent que c'est effectivement le cas pour tous nos phosphores étudiés.

Les valeurs de τ rencontrées dans nos mesures se distribuent entre $2 \cdot 10^{-7}$ sec et 10^4 sec; la méthode de mesure doit s'adapter de cas en cas à l'ordre de grandeur de τ .

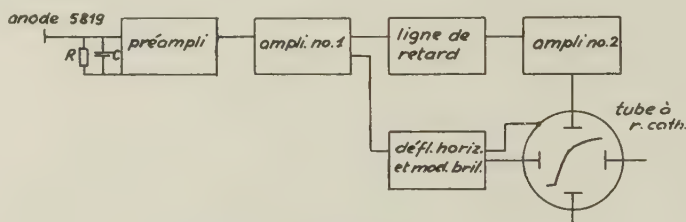


Fig. 2.

Schéma de principe des circuits électriques pour la mesure de τ ;
 10^{-7} sec $< \tau < 10^{-3}$ sec.

a) 10^{-7} sec $< \tau < 10^{-3}$ sec. Ces durées de vie sont mesurées par la méthode du synchroscope, illustrée dans la figure 2. L'impulsion de courant produite par la scintillation dans le tube 5819 est intégrée par la capacité C ($RC \gg \tau$) à l'entrée de l'amplificateur. La durée du front de l'impulsion qui apparaît sur l'oscilloscope permet la détermination directe de τ (fig. 3).

b) 10^{-7} sec $< \tau < 10^{-2}$ sec. Au lieu d'intégrer l'impulsion $J(t)$ comme sous a) on peut choisir $RC \ll \tau$. Chaque électron libéré à la photocathode (par un quantum unique de lumière) produit alors une très courte impulsion à la sortie de l'amplificateur. τ se déduit de la succession temporelle de ces impulsions séparées sur la trace de l'oscillographe.

c) 10^{-2} sec $< \tau < 10^{+2}$ sec. On mesure la décroissance de l'intensité lumineuse après irradiation par une source très intense. Un dispositif pneumatique projetant la source de Ra à quelques mètres derrière un écran de Pb nous a permis de réduire au minimum

(environ 10^{-2} sec) le temps mort entre la fin de l'irradiation et le début de la mesure. Les détails de cette méthode de mesure ressortent du schéma de principe de la figure 4. La courbe décrite par le

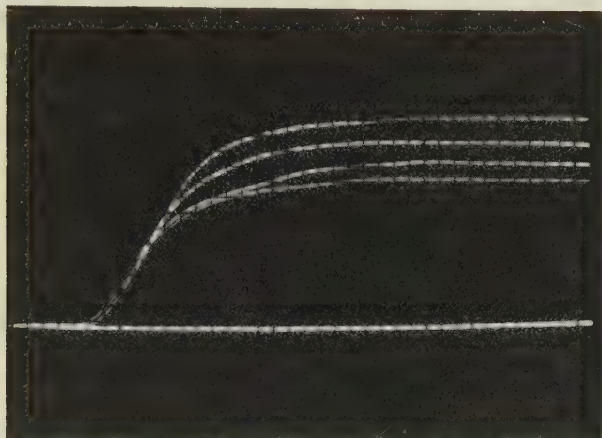


Fig. 3.

Impulsions de scintillation du cristal NaJ:Tl, composante γ_2 , 300°K , $\tau = 0,2 \mu\text{sec}$; excitation par particules α ; $RC \gg \tau$; vitesse de balayage: $0,05 \mu\text{sec/division}$; oscillographe DUMONT 294-A.

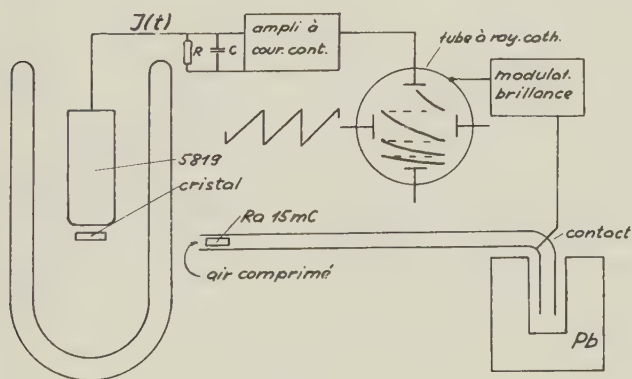


Fig. 4.

Schéma de principe pour la mesure de τ ; $10^{-2} < \tau < 10^{+2}$ sec.

spot de l'oscilloscope est enregistrée photographiquement. La figure 5 donne un exemple d'un tel enregistrement.

d) $10^2 \text{ sec} < \tau < 10^3 \text{ sec}$. Pour la mesure de $J(t)$ l'amplificateur à courant continu peut être remplacé par un galvanomètre sensible

pourvu que $\tau \gg T$ (T = période d'oscillation du galvanomètre). Avec cette méthode il est possible de suivre le déclin de $J(t)$ sur plusieurs ordres de grandeur.

Les lentes et inévitables fluctuations de température de l'ordre de $0,5^\circ \text{C}$ produisent dans le cristal des éruptions de thermoluminescence. C'est cet effet zéro variable qui impose une limite à la sensibilité de la méthode.

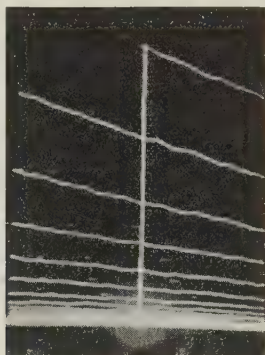


Fig. 5.

Exemple d'une mesure de τ par la méthode c), page 728; cristal KJ:Tl, $T = 217^\circ \text{K}$, fréquence de balayage: 16,7 cycles/sec; oscillographe Cossor Mod. 1035.

2^o Mesure de l'intensité I des scintillations.

Outre le temps de déclin τ des scintillations, leur variation d'intensité avec la température est une donnée importante. En général les scintillations contiennent plusieurs composantes à temps de déclin différents. Par un choix approprié de l'élément RC à l'entrée de l'amplificateur, il est possible de suivre séparément la variation d'intensité de chaque composante.

Dans le cas d'un cristal à une seule composante luminescente, la mesure peut se faire en déterminant au galvanomètre le photocourant total en fonction de la température.

3^o Mesure de la thermoluminescence.

Lorsque le cristal à étudier a été irradié à basse température et est ensuite lentement réchauffé, il émet pendant le processus de réchauffement une radiation luminescente dont l'intensité I en fonction de la température T peut être mesurée au galvanomètre. La courbe $I(T)$ («glow-curve»), dont la forme est caractéristique

de la substance, présente généralement des maxima prononcés pour certaines températures T_G . La forme de ces courbes et, en particulier, la position des maxima a été mesurée, ainsi que leur dépendance de la vitesse de réchauffement $\beta = dT/dt$.

La figure 6 présente deux « glow-curves » du même cristal (NaJ:TI) pour différentes vitesses de réchauffement. Notons que pour β petit, non seulement les maxima sont déplacés vers les températures plus basses, mais encore la résolution est accrue.

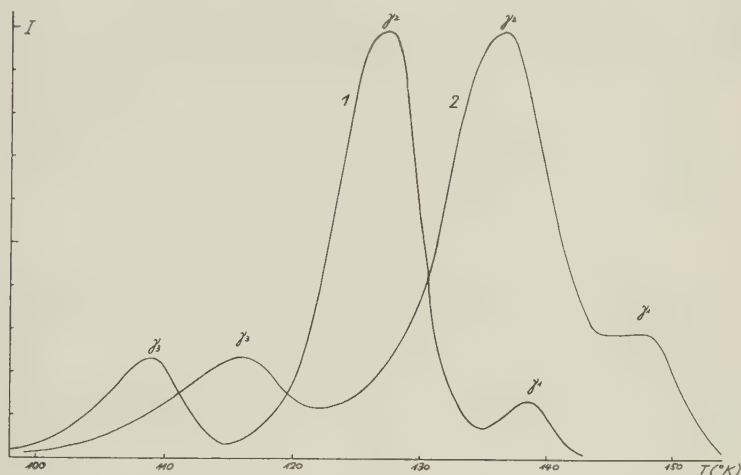


Fig. 6.

NaJ:TI, glow-curves. Courbe 1: $\beta = dT/dt = 0,4 \cdot 10^{-2} (^{\circ})/\text{sec.}$

Courbe 2: $\beta = dT/dt = 5 \cdot 10^{-2} (^{\circ})/\text{sec.}$

4⁰ Mesure des spectres d'émission.

N'ayant pas à disposition un spectrographe de grande luminosité, nous avons déterminé approximativement le domaine spectral des bandes d'émission à l'aide de filtres interférentiels.

IV. Modèle théorique.

Les résultats expérimentaux obtenus nous ont suggéré pour la description du phénomène de luminescence et la corrélation des différentes observations un modèle simple du type proposé par RANDALL et WILKINS⁶). Ce modèle permet de rendre compte à la fois des décroissances exponentielles caractéristiques des substances étudiées ainsi que de leur dépendance de la température et de la loi

de variation du rendement lumineux avec la température. Il est fondé sur l'hypothèse de défauts du réseau cristallin localisés et servant, à la fois, de trappes pour les électrons et de centres d'émission lumineux.

Immédiatement après l'excitation du cristal par une particule ionisante rapide, des électrons libres qui se trouvent dans la bande de conduction sont capturés par les centres lumineux. Nous devons admettre que ce processus de capture se déroule en un temps suffisamment court par rapport au phénomène lumineux, pour qu'il n'ait pas d'influence mesurable sur l'évolution temporelle de ce dernier. Il faut admettre de plus que les trous positifs laissés

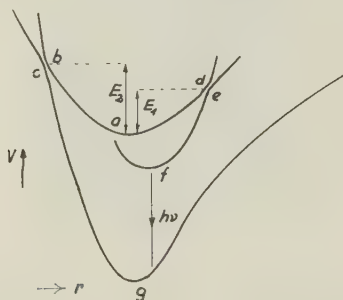


Fig. 7.

dans la bande remplie sont suffisamment mobiles pour se combiner en un temps très court avec les électrons primitivement liés aux centres lumineux. Cette hypothèse paraît plausible si l'on tient compte des mesures récentes de diffusion et de mobilité dans les cristaux de diamant⁷⁾, AgCl⁸⁾ et germanium⁹⁾. Elle n'implique pas d'ailleurs que les cristaux lumineux soient nécessairement photoconducteurs.

Enfin la cohérence des différentes observations assurée par ce modèle simple indique que les processus de repiégeage, s'ils existent, sont négligeable.

Le centre lumineux excité est décrit (fig. 7) par les courbes de potentiel V en fonction de r , la coordonnée de configuration généralisée de l'électron dans le défaut cristallin. L'électron est parvenu de la bande de conduction dans le niveau métastable a (piège). De là, le niveau fondamental ne peut être atteint que par activation thermique ou optique (infrarouge).

Après absorption d'une énergie d'activation E_1 , l'électron peut atteindre le niveau fondamental par $d \rightarrow e \rightarrow f$ et l'émission simultanée

d'un quantum de lumière $h\nu$; l'autre possibilité est la transition non-radiative par $b \rightarrow c$ nécessitant une activation égale à E_2 . Les probabilités par unité de temps du processus radiatif et de la transition non-radiative seront notées respectivement k_1 et k_2 ; elles seront de la forme:

$$k = s \cdot e^{-E/kT}. \quad (1)$$

L'intensité relative de la lumière émise à l'état stationnaire a pour valeur*):

$$\frac{I}{I_0} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} = \frac{1}{1 + \frac{s_2}{s_1} e^{-(E_2 - E_1)/kT}} \quad (2)$$

soit

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + c \cdot e^{-\Delta E/kT}} \quad (3)$$

ou

$$\ln \frac{I_0 - I}{I} = \frac{-\Delta E}{kT} + \ln c. \quad (4)$$

Ces expressions donnent la variation de l'intensité de la luminescence avec la température en régime d'irradiation constante.

Le processus d'émission décrit par notre modèle est *monomoléculaire pour les temps accessibles aux mesures* ($t > 10^{-7}$ sec). La décroissance est donnée par la condition:

$$\frac{dn}{dt} = -n \cdot (k_1 + k_2).$$

où n est le nombre de centres excités (égal au nombre d'électrons libérés). Toutes les mesures de τ effectuées semblent indiquer que $k_1 \gg k_2$ (à une exception près qui sera discutée plus tard) si bien que l'intensité I décroît exponentiellement suivant la loi:

$$I = I_0 \cdot e^{-k_1 \cdot t} \quad (5)$$

avec la constante de déclin (vie moyenne)

$$\tau = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{s_1} \cdot e^{E_1/kT}. \quad (6)$$

La mesure de τ en fonction de T permet ainsi la détermination des constantes s_1 et E_1 .

*) Il est clair qu'il en est de même pour l'intensité intégrée d'une scintillation.

Si, après avoir irradié la cristal à basse température (τ très grand), on le réchauffe à la vitesse constante $\beta = dT/dt$, le nombre de photons émis par seconde sera :

$$-\frac{dn}{dt} = nk_1 = I(T).$$

Cette équation intégrée fournit la loi d'intensité de la thermoluminescence («glow-curve») :

$$I(T) = n_0 \cdot k_1 \cdot e^{-\frac{1}{\beta} \cdot \int_{T_0}^T k_1 \cdot dT}. \quad (7)$$

La courbe $I(T)$ présente un maximum pour la température T_G qui dépend de β suivant la relation :

$$\ln \beta = -\frac{E_1}{kT_G} + \ln s_1 + 2 \cdot \ln T_G - \ln \frac{E_1}{k}. \quad (8)$$

Si l'on mesure T_G pour différentes vitesses de réchauffement, β , on voit que la thermoluminescence permet également de déterminer les deux grandeurs caractéristiques s_1 et E_1 .

Le contrôle expérimental de l'une quelconque des relations (2) à (8) n'est pas suffisant pour démontrer la validité du modèle choisi. C'est davantage la cohérence interne du système, assurée par la compatibilité des différentes prédictions théoriques, qui sera une preuve de son efficacité. C'est de ce point de vue que nous allons présenter les résultats des mesures effectuées.

V. Résultats expérimentaux.

Nous allons discuter ici successivement chacune des substances étudiées, quant au temps de déclin τ , à l'intensité d'émission et à la thermoluminescence. Nous divisons la luminescence de chaque substance relativement à τ en différentes composantes $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Seules les composantes les plus intenses ont été mesurées.

Les résultats des mesures sont donnés schématiquement dans les figures synoptiques 8, 9, 13, 16 et 18. Les courbes qui y sont présentées n'ont qu'un caractère qualitatif indiquant le comportement général des substances; les graphiques des mesures exactes sont donnés séparément.

Dans les cas où la dépendance de τ de la température est faible ($E_1 < 0, 1 \text{ eV}$, formule (6)), E_1 n'a pas été déterminé et τ est considéré comme constant.

1⁰ Iodure de Lithium.

Le matériel pur (fourni par MERCK) ne donne à la température ordinaire que de très faibles scintillations dont la hauteur cependant s'accroît rapidement en refroidissant (fig. 8 et 19).

En ajoutant au sel fondu des traces de TIJ, on observe à la température ordinaire déjà, des scintillations considérables dont la

LiJ composante γ_1

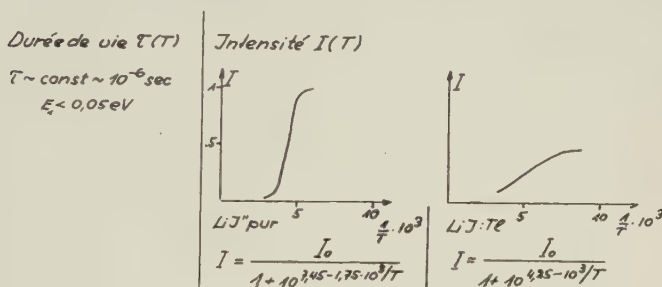


Fig. 8.

Résultats des mesures pour le iodure de lithium.

NaJ, composantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

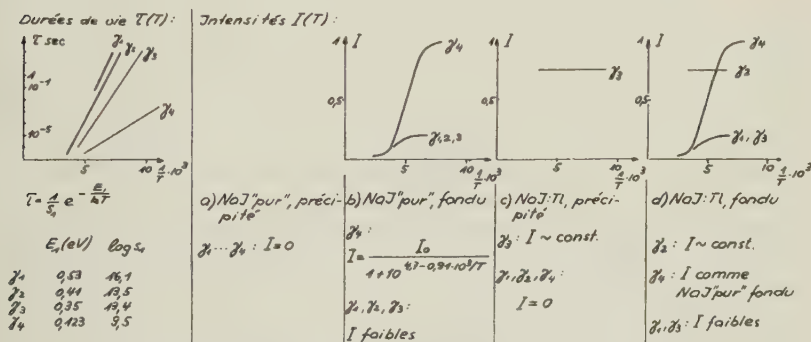


Fig. 9.

Résultats des mesures pour le iodure de sodium.

hauteur augmente également lorsqu'on abaisse la température. La rapidité de l'accroissement de même que l'intensité maximum atteinte sont cependant notablement plus faibles que pour le cristal pur*) (voir tableau I).

La couleur de la lumière émise est jaune dans les deux cas.

*) Cette propriété du cristal pur nous paraît devoir fournir une très intéressante possibilité de réalisation de détecteur de neutrons lents à haute efficacité et grande résolution.

2° Iodure de sodium.

Nous distinguons quatre composantes différentes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ en ce qui concerne τ (fig. 9).

La figure 10 donne pour les différents cristaux mesurés la valeur de $\log \tau$ en fonction de $1/T$. Les points de mesure se groupent de façon bien distincte sur quatre droites $\gamma_1 \dots \gamma_4$ et démontrent ainsi l'accord avec la formule (6). Remarquons que sur chacune des

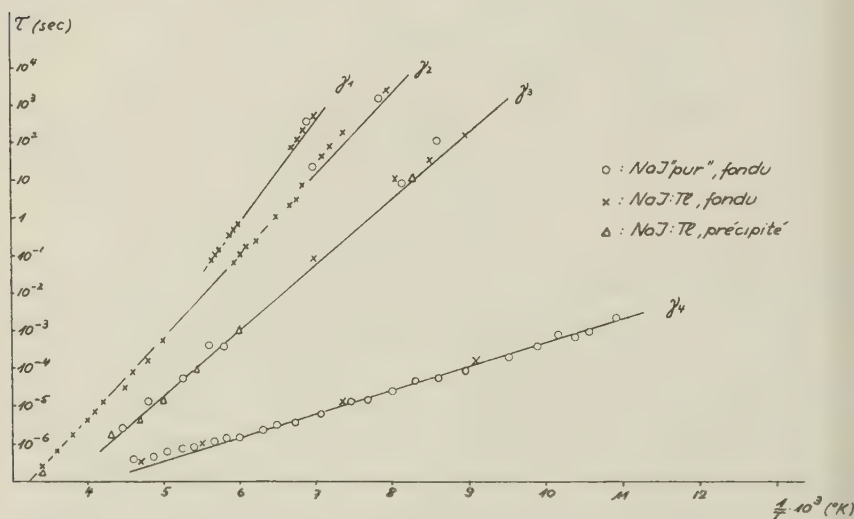


Fig. 10.

NaJ ; $\log \tau = f(1/T)$. Les droites γ_1, γ_2 et γ_3 sont calculées à partir de la thermoluminescence.

droites se trouvent des points appartenant aussi bien aux cristaux purs qu'aux cristaux activés au TL.

Le mécanisme luminescent que nous avons admis exige suivant la relation (5) une décroissance exponentielle de l'intensité $I(t)$. L'expérience ne confirme qu'approximativement ce résultat pour NaJ . La figure 11 donne une mesure de $I(t)$ à -137°C pour la composante γ_2 du cristal NaJ:TL . On voit que la courbe $\log I = f(t)$ n'est pas une droite exacte, mais présente une certaine concavité. Cette légère déviation de la loi exponentielle n'est pas un argument contre le modèle choisi. Il est permis en effet d'admettre, comme le font RANDALL et WILKINS⁶⁾ pour KCl:TL , que l'énergie d'activation E_1 des pièges fluctue autour d'une valeur moyenne; on peut, en fait, s'y attendre si les pièges ont une légère interaction et sont

soumis à des fluctuations de distribution spatiale, ce qui est physiquement très possible⁹). Dans notre cas, une variation de E_1 de 1% conduit à une variation de τ de 40% environ. Cette dispersion de τ suffit à expliquer la déviation de la forme exponentielle observée. Les valeurs de τ données dans la figure 10 sont donc en réalité des valeurs moyennes.

En dépit de cette légère indétermination de τ ($\Delta\tau/\tau = 40\%$) le temps de déclin est suffisamment bien défini pour séparer facilement dans tous les cas rencontrés les différentes composantes, quand elles interviennent simultanément. Nous en donnons un exemple

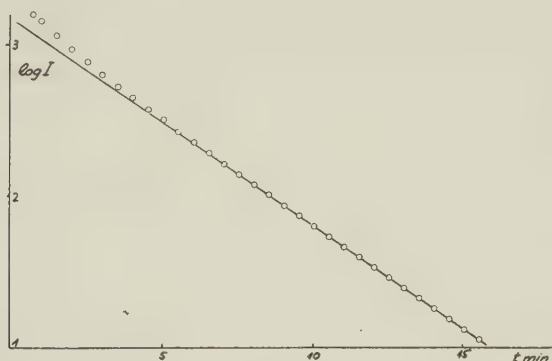


Fig. 11.

NaJ:Tl, composante γ_2 , décroissance de l'intensité $I(t)$, $T = 136^\circ \text{ K}$; déviation de la loi exponentielle.

pour le cristal NaJ:Tl à une température de -107° C . A cette température, les quatre composantes sont excitées en même temps, de telle sorte que l'intensité est donnée par l'expression :

$$I(t) = a_1 \cdot e^{-t/\tau_{\gamma_1}} + a_2 \cdot e^{-t/\tau_{\gamma_2}} + a_3 \cdot e^{-t/\tau_{\gamma_3}} + a_4 \cdot e^{-t/\tau_{\gamma_4}}$$

où aucun des 4 coefficients a_1, a_2, \dots n'est petit vis-à-vis des autres.

$\tau_{\gamma_4} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$ se détermine par la méthode a), page (6); $\tau_{\gamma_3} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$ est mesuré par la méthode b), page (9); $\tau_{\gamma_2} = 0,10 \text{ sec}$ et $\tau_{\gamma_1} = 0,65 \text{ sec}$ s'obtiennent par la méthode c), page (9) et la courbe correspondante est donnée figure 12. Les composantes rapides γ_4 et γ_3 sont depuis longtemps éteintes lorsque débute la mesure si bien que la courbe obtenue est la superposition de γ_1 et γ_2 . La représentation comme somme de deux décroissances exponen-

tielles est absolument nette bien que les deux temps de déclin ne se distinguent que d'un facteur 6,5.

La courbe de thermoluminescence a été mesurée pour les quatre exemplaires de cristaux soumis aux différents traitements. Dans le domaine de température qui nous est accessible se trouvent trois maxima (fig. 6) correspondant aux composantes γ_1 , γ_2 et γ_3 ; le maximum appartenant à γ_4 se trouve au-dessous de 77° K. La distribution des intensités sur les trois maxima est en accord avec l'intensité relative des trois composantes de scintillations pour les différents cristaux, à savoir:

- NaJ«pur», non fondu, aucun des maxima n'est observé.
- NaJ«pur», fondu, les trois maxima sont présents.
- NaJ:Tl, fondu, le maximum γ_2 est prépondérant (voir fig. 6).
- NaJ:Tl, tiré de la solution, seul le maximum γ_3 est observé.

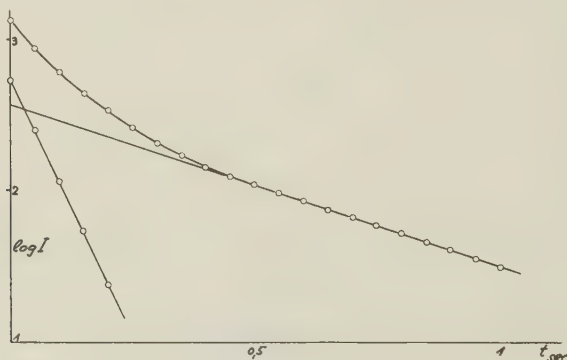


Fig. 12.

NaJ:Tl, décroissance de l'intensité $I(t)$, superposition des 2 composantes γ_1 et γ_2 , $\tau_{\gamma_1} = 0,65$ sec, $\tau_{\gamma_2} = 0,10$ sec, $T = 166^\circ$ K.

Les deux «glow-curves» de la figure 6 (cristal b)) permettent au moyen de l'équation (8) de déterminer les constantes E_1 et s_1 . Les droites $\ln \tau = + E_1/eT - \ln s_1$ correspondant aux trois paires de valeurs E_1, s_1 calculées sont tracées figure 10 et désignées par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Elles passent de façon très satisfaisante par les points mesurés.

Les «glow-curves» des cristaux c) et d) ont été utilisées de la façon suivante: l'équation (8) peut s'écrire sous la forme

$$\ln \beta - 2 \cdot \ln T_G + \ln \frac{E_1}{k} = - \frac{E_1}{k} \cdot \frac{1}{T_G} + \ln s_1 \equiv \ln \tau(T_G) \quad (9)$$

faisant apparaître le logarithme de τ pour la température T_G . Comme il suffit d'introduire pour E_1 sous le logarithme une valeur

approximative et que β ainsi que T_G ont été mesurés, le membre de gauche de (9) fournit une valeur de τ pour la température T_G du maximum. Les valeurs ainsi calculées de $\tau(T_G)$ ont été portées dans la figure 10 où elles coïncident parfaitement avec les temps mesurés directement.

Le maximum du spectre d'émission se trouve à 4000 Å environ et se déplace légèrement vers les longueurs d'ondes plus longues aux basses températures.

KJ, composantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

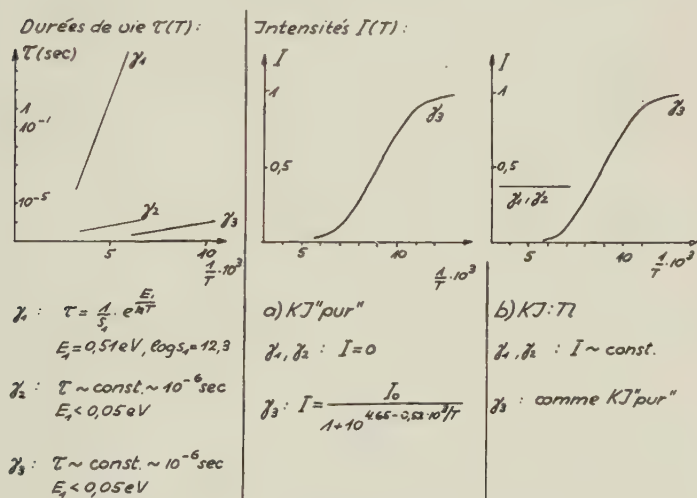


Fig. 13.

Résultats des mesures pour le iodure de potassium.

3° Iodure de potassium.

Les scintillations se laissent décomposer en trois composantes γ_1 , γ_2 et γ_3 (fig. 13).

Comme pour le iodure de sodium, les cristaux ont été produits à partir de la solution concentrée ou de la substance fondue, à la fois avec ou sans addition de thallium. Cependant au contraire de NaJ, les cristaux de iodure de potassium ne présentent, quant aux propriétés qui nous intéressent ici, aucune différence s'ils sont produits par précipitation en solution, ou après fusion de la substance, autrement dit le traitement thermique n'a pas d'influence. Il suffit donc de distinguer entre KJ«pur» et KJ:Tl.

La décroissance de l'émission $I(t)$ de la composante γ_1 , est, aux erreurs de mesure près, exactement exponentielle comme nous l'avions déjà indiqué dans une communication précédente¹⁰⁾.

La figure 14 représente les mesures de τ en fonction de $1/T$. La droite tracée par les points expérimentaux donne les valeurs des constantes $E_1 = 0,51$ eV et $s_1 = 2,1 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$.

La thermoluminescence du cristal KJ:Tl donne des courbes possédant plusieurs maxima. Parmi ceux-ci le plus important à -100°C est dû à la composante γ_1 ; les autres appartiennent à des composantes trop faibles pour être étudiées utilement.

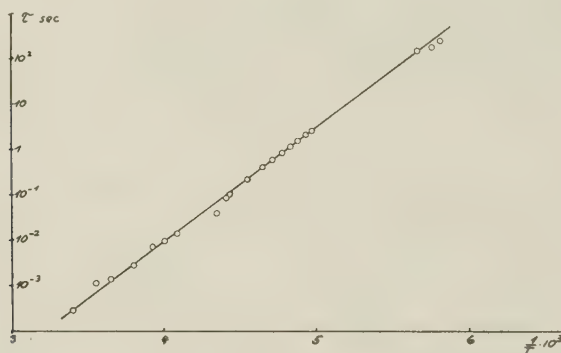


Fig. 14.

KJ:Tl, composante γ_1 , $\tau = \frac{1}{s_1} \cdot e^{\frac{E_1}{kT}}$, $E_1 = 0,51$ eV et $s_1 = 2,1 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$.

Nous avons entrepris de calculer théoriquement la forme de la courbe du maximum à -100°C d'après la relation (7) qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{I(T)}{I_0} = e^{-\left(\frac{E_1}{kT} + \frac{s_1}{\beta} \int_{T_0}^T e^{-E_1/kT} dT\right)}.$$

Cette expression ne contient que des grandeurs connues à savoir $\beta = dT/dt$ qui est directement mesuré et les constantes E_1 et s_1 qui ont été déterminées ci-dessus à partir du comportement expérimental $\tau(T)$. L'intégrale dans l'exposant conduit à la fonction

$$-E i(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$$

pour laquelle il existe des tables complètes¹¹⁾. La figure 15 donne la courbe ainsi calculée et en même temps les points expérimentaux.

Insistons sur le fait qu'aucun des paramètres de la courbe théorique n'a été emprunté à la mesure de la thermoluminescence elle-même, mais uniquement à celle totalement indépendante des temps de déclin. La concordance de la courbe calculée et des points de mesure est très remarquable (la petite discrédance sur le flanc droit provient de la contribution du maximum voisin).

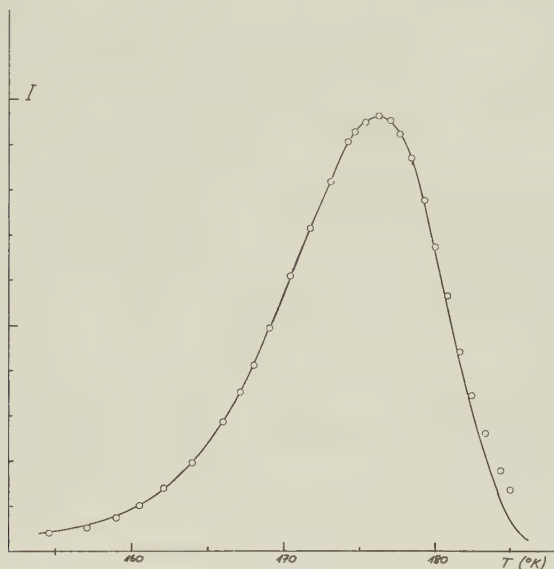


Fig. 15.

KJ:Tl, «Glow-curve», points mesurés, courbe calculée:

$$I(T) = I_0 e^{\left(-\frac{\alpha}{T} + \frac{s_1}{\beta} \int_0^T e^{-\frac{\alpha}{T'}} dT' \right)}$$

avec: $\alpha = 5,9 \cdot 10^3(^{\circ})$ $s = 2,1 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$ $\beta = 3,33 \cdot 10^{-2} (^{\circ})/\text{sec}$
(α et s déduits de la loi de $\tau(T)$)

Le maximum du spectre d'émission se trouve à 4200 Å environ et se déplace légèrement vers les longueurs d'ondes plus courtes aux basses températures.

4° Iodure de rubidium.

Pour RbJ, les scintillations sont la superposition de trois composantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ dont les temps de déclin sont indiqués figure 16.

Nous distinguons les deux cristaux RbJ«pur» et RbJ:Tl.

RbJ composantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

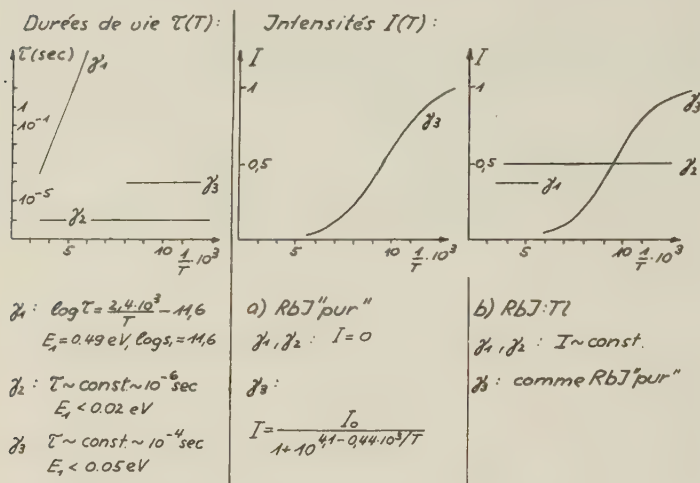


Fig. 16.

Résultats des mesures pour le iodure de rubidium.

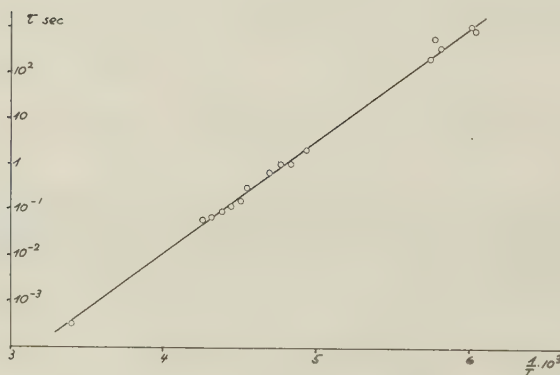


Fig. 17.

RbJ:Tl, composante γ_1 , $\tau = \frac{1}{s_1} e^{E_1/kT}$, $E_1 = 0.49 \text{ eV}$ et $s_1 = 4 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$.

Seule la composante γ_1 a été étudiée avec quelque précision. Le déclin de l'intensité $I(t)$ dévie de la loi exponentielle; cependant, ici comme dans le cas du iodure de sodium, il est possible de donner une valeur moyenne du temps de déclin τ . A la température ordinaire $\tau = 6 \cdot 10^{-4}$ sec et varie suivant la loi $\tau = 1/s_1 \cdot \exp(E_1/kT)$ avec $E_1 = 0,49$ eV et $s_1 = 4 \cdot 10^{11}$ sec $^{-1}$. La figure 17 donne la courbe expérimentale.

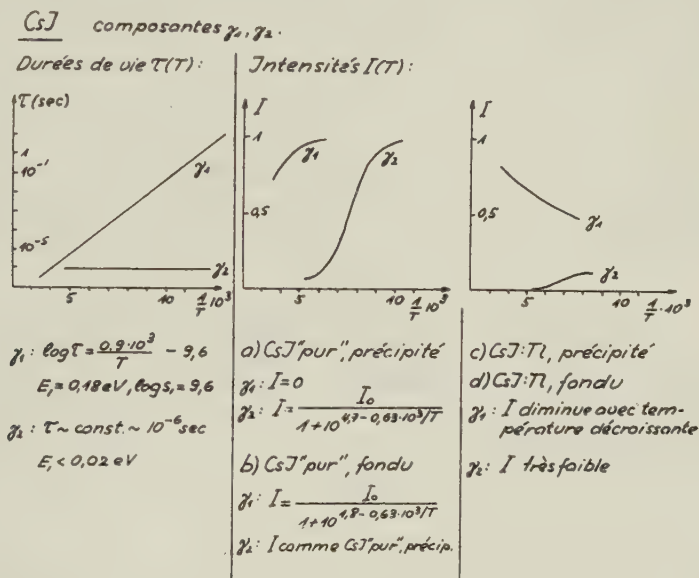


Fig. 18.

Résultats des mesures pour le iodure de césium.

La thermoluminescence du cristal présente un maximum à -100°C environ. A partir de la variation de cette température T_G avec la vitesse de réchauffement $\beta = dT/dt$, on obtient suivant l'équation (8) les constantes caractéristiques $E_1 = 0,46$ eV et $s_1 = 10^{11}$ sec $^{-1}$, en accord satisfaisant avec les valeurs déduites ci-dessus de la variation de τ avec la température.

5° Iodure de césium.

Parmi les différentes composantes deux, désignées par γ_1 et γ_2 ont été plus spécialement étudiées. Les propriétés des défauts cristallins dont elles résultent sont données sur la figure 18.

Il semble que pour la production de la composante γ_1 — la seule existant à température ordinaire — un traitement thermique soit

nécessaire en l'absence de Tl, mais par contre qu'un tel traitement soit superflu en présence de Tl.

Qu'il s'agisse effectivement, avec ou sans Tl, de la même imperfection cristalline γ_1 semble démontré par le fait que le temps de déclin τ est dans les deux cas le même et la dépendance de température de τ également.

La thermoluminescence ne conduit ici à aucun résultat, les maxima de température T_G correspondant aux deux centres γ_1 et γ_2 se trouvant au-dessous de 77° K.

Rendements lumineux comparatifs.

Le tableau I donne une idée de l'intensité lumineuse relative des différents phosphores mesurée par l'amplitude des impulsions sur l'anode du multiplicateur. L'excitation en surface se faisait par particules α (Po) ce qui, avec une géométrie constante, assurait un

Tableau I.

Intensité relative des scintillations. (Excitation par particules α .)

Substance	Méthode de préparation	Composante	τ μ sec	T	Intensité J
LiJ:Tl	poudre fondue	γ_1	~ 1	20° C	7
LiJ«pur»	poudre fondue	γ_1	~ 1	77° C	60
NaJ:Tl	poudre fondue, grande concentration de Tl	γ_2	0,13	20° C	100*)
NaJ:Tl	monocristal fondu	γ_2	0,13	20° C	30
NaJ:Tl	poudre précipitée de la solution	γ_3	0,13	20° C	120
NaJ«pur»	fondu	γ_4	~ 1	-100° C	55
KJ:Tl	fondu ou précipité	γ_2	0,2	20° C	50
KJ«pur»	fondu ou précipité	γ_3	~ 1	77° K	180
RbJ:Tl	fondu	γ_2	~ 1	20° C	35
CsJ:Tl	fondu ou précipité	γ_1	0,6	20° C	60
CsJ«pur»	fondu	γ_1	0,6	20° C	60
CsJ«pur»	précipité	γ_2	~ 1	77° K	700

*) Valeur de référence, posée arbitrairement égale à 100.

rendement optique sensiblement identique dans tous les cas. Les valeurs indiquées ne sont qu'approximatives par suite de l'influence sensible des conditions de préparation des cristaux. Notons spécialement la grandeur des scintillations de CsJ«pur» à la température de 77° K; le rendement absolu n'est pas loin d'atteindre ici 100%.

VI. Discussion et conclusions.

1° Loi de déclin.

Il est usuel dans les études de luminescence de considérer deux types de déclin, hyperbolique ou exponentiel, correspondant aux mécanismes les plus simples susceptibles de décrire le phénomène. Un modèle théorique où la vitesse du processus est conditionnée par la recombinaison des électrons libres de la bande de conduction avec les trous positifs laissés dans la bande remplie, correspond à une réaction bimoléculaire obéissant à l'équation différentielle

$$I(t) = - \frac{dn}{dt} = \alpha n^2$$

dont la solution est représentée par la courbe (hyperbole):

$$I(t) = \frac{I_0}{(1 + \alpha t)^2}.$$

Par contre si l'on admet que le processus déterminant le déclin de la luminescence se produit à l'intérieur d'un seul centre luminescent — comme c'est le cas pour notre modèle — on a alors affaire à une réaction monomoléculaire définie par l'équation

$$I(t) = - \frac{dn}{dt} = k_1 \cdot n$$

conduisant à la loi exponentielle:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-k_1 t}.$$

Remarquons que parmi les nombreux phosphores connus, seuls un nombre très réduit obéissent à une loi de déclin hyperbolique ou exponentielle pure.

De tous les iodures d'alcalins étudiés par nous, seul KJ:Tl possède un déclin exactement exponentiel; tous les autres présentent en représentation logarithmique des courbes déviant plus ou moins des droites de décroissance idéales (fig. 11). Ces courbes ne sont cependant pas en contradiction avec le modèle proposé, sitôt que l'on admet une certaine distribution de temps de déclin $\tau = 1/k_1$ autour d'une valeur moyenne. Cette façon de faire nous semble physiquement plausible vu que la dispersion de valeurs nécessaire pour rendre compte des déviations est faible. Il est clair que ce procédé de superposition de décroissances exponentielles ne saurait être

exagérément utilisé; il peut en effet rendre compte, par un choix approprié de la distribution des τ et de sa largeur, de toute forme de déclin y compris l'hyperbolique comme l'ont montré RANDALL et WILKINS⁶). Nous nous garderons pour cette raison d'attacher une trop grande importance à la loi de déclin observée; en particulier elle n'apparaît pas dans notre cas comme étant une preuve suffisante du caractère monomoléculaire du processus de luminescence.

2° Variation du temps de déclin avec la température.

Le modèle théorique utilisé exige une dépendance du type:

$$k_1 = 1/\tau = s_1 \cdot e^{-E_1/kT}. \quad (6)$$

Notre étude confirme cette loi dans une mesure qui ne semble avoir jamais été trouvée pour aucun phosphore. Dans NaJ:Tl, la composante γ_2 par exemple suit la loi (6) sur 10 ordres de grandeur de τ avec uniquement quelques déviations infimes (fig. 10).

La mesure de τ en fonction de T nous a permis de reconnaître la validité de la loi (6) et de déterminer l'énergie E_1 pour 7 composantes en tout. Les valeurs trouvées pour E_1 sont comprises entre 0,6 et 0,1 eV.

Pour les autres composantes il a été possible de constater une augmentation de τ par abaissement de la température comme l'exige l'expression (6), cependant la dépendance de T était trop faible pour permettre le contrôle précis de la loi.

De la validité de la formule (6) il découle que dans les iodures d'alcalins le phénomène de luminescence rapide est en fait une phosphorescence liée à l'existence de pièges d'où les électrons ne peuvent sortir, après capture, que par activation thermique. La dépendance de la température du type (6) qui en résulte n'est cependant pas caractéristique d'un processus monomoléculaire et pourrait également s'appliquer à une réaction bimoléculaire¹²).

En fait, seuls les résultats que nous avons obtenus pour la thermoluminescence indiquent que les pièges coïncident spatialement avec les centres luminescents ce qui établit le caractère monomoléculaire du processus.

3° Thermoluminescence.

Forme et positions des «glow-curves» sont déterminées uniquement par les équations (7) et (8) aussitôt que l'on se donne les deux paramètres E_1 et s_1 qui simultanément définissent totalement $\tau(T)$ par la relation (6).

Nous avons pu contrôler la validité des équations (7) et (8) sur 3 phosphores différents :

a) Les 3 paires de valeurs E_1 , s_1 , déterminées par les 3 composantes γ_1 , γ_2 , γ_3 de NaJ à partir des « glow-curves » et de l'équation (8) sont en complet accord avec celles obtenues au moyen de la dépendance de température de τ et de l'équation (6) (fig. 10).

b) La « glow-curve » définie par l'équation (7) a été calculée au moyen des valeurs E_1 , s_1 correspondant à la composante γ_1 de KJ:Tl et obtenues à partir de la variation expérimentale de τ avec la température. Cette courbe coïncide de façon parfaite avec la courbe expérimentale (fig. 15). Au contraire la forme de la courbe relative à un processus bimoléculaire serait essentiellement différente¹²⁾ et ne pourrait pas être adaptée aux points expérimentaux.

c) Pour RbJ:Tl, nous avons à nouveau trouvé une bonne concordance entre les valeurs E_1 , s_1 déterminées indépendamment d'une part à partir de $\tau(T)$ et d'autre part au moyen de la thermoluminescence.

Les équations (7) et (8) sont des conséquences directes de l'équation différentielle $dn/dt = -k_1 \cdot n$ caractéristique de la décroissance exponentielle. Le fait qu'elles sont en accord avec l'expérience justifie donc après coup notre procédé consistant à considérer les courbes de déclin comme superposition d'expressions exponentielles. L'incompatibilité des relations (7) et (8) et du processus bimoléculaire nous apparaît comme l'argument le plus probant en faveur du modèle théorique choisi.

4^o Luminescence des cristaux « purs ».

Très peu de données existent sur la luminescence des halogénures d'alcalins « purs ». Il n'est donc pas possible « a priori » de dire avec certitude si la luminescence que nous avons observée n'est pas provoquée par la présence d'impuretés incontrôlables en quantités minimales ; il suffit de se rappeler en effet que l'addition d'une substance étrangère dans une proportion de 1:10⁶ peut transformer un cristal inerte en un phosphore de forte luminosité.

Nous pensons toutefois pouvoir attribuer la luminescence observée au cristal pur, sur la base des arguments suivants :

a) Les substances utilisées pour la préparation des cristaux étaient de provenances différentes. L'intensité de la luminescence

et son comportement avec la température sont parfaitement reproductibles (fig. 19).

b) Les courbes $I(T)$ de la figure 19 présentent un *déplacement systématique* très frappant dans le sens d'une diminution de température pour la suite croissante de numéros atomiques des alcalins de LiJ à RbJ; l'énergie ΔE (tableau de la fig. 19) diminue régulièrement de LiJ à RbJ. En termes de notre modèle, cela signifie que les énergies d'activation pour les transitions radiative et non-radiative ont tendance à s'égaliser. (L'exception manifestée par CsJ peut s'expliquer par le fait que sa structure cristalline — réseau cubique type CsCl — est différente, alors que les 4 premières substances cristallisent dans le même réseau cubique type NaCl.)

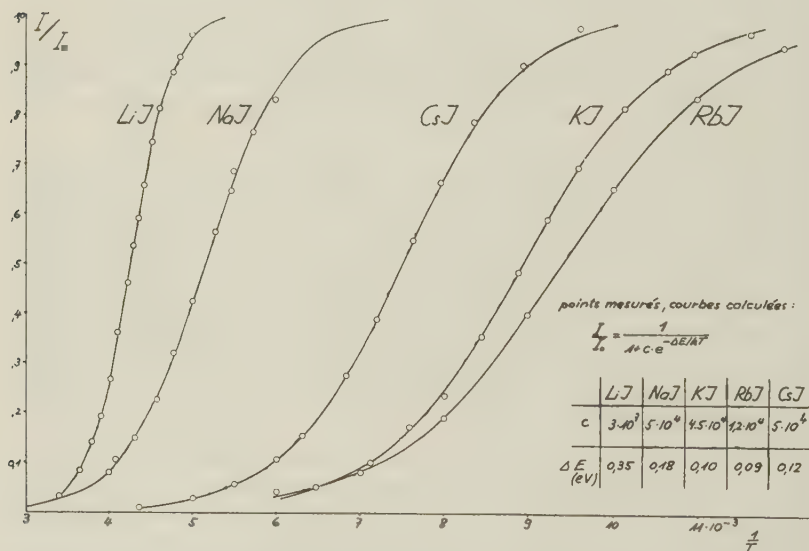


Fig. 19.

Intensité de la luminescence des cristaux «purs» en fonction de la température.

Le fait que pour toute la série des iodures «purs» l'intensité de la luminescence est en accord avec les prédictions du modèle, démontre que le mécanisme de la luminescence est ici pratiquement indépendant de réseau cristallin; il est uniquement lié à des *défauts cristallins de même nature* dont seules les caractéristiques varient avec la substance. Cette conclusion est supportée d'autre part par l'observation que les composantes γ_4 de NaJ«pur» et γ_1 de CsJ«pur» n'apparaissent qu'après traitement thermique du cristal.

5° Influence du thallium.

Dans son étude théorique des halogénures d'alcalins activés au Tl, SERTZ²⁾ considère le ion Tl^+ comme responsable de toutes les propriétés luminescentes de ces cristaux. Il ne fait pas de doute que l'absorption ultra-violette et l'excitation de la luminescence par la lumière U.V. doivent être attribuées au thallium. L'influence du thallium sur le processus d'émission est cependant beaucoup moins direct. Il nous semble plutôt que les imperfections cristallines qui déterminent le temps de déclin des différentes composantes et à partir desquelles se fait l'émission de lumière sont présentes dans le cristal même sans aucune addition de thallium. Le Tl n'aurait donc une influence que sur le rendement luminescent et serait sans action déterminante quant au temps de déclin et au spectre émis. Nos mesures fournissent quelques arguments à l'appui de ces considérations :

a) Le rendement luminescent de LiJ en fonction de la température est presque identique avec ou sans Tl; la seule différence est que la courbe $I = f(1/T)$ est un peu plus raide et atteint un maximum plus élevé en l'absence de Tl (fig. 8). τ n'est pas influencé par l'adjonction de Tl.

b) Pour NaJ:Tl fondu, la luminescence à température ordinaire est due entièrement à la composante γ_2 dont l'intensité n'est pas sensiblement affectée par abaissement de la température (fig. 9). Pour NaJ«pur» fondu, cette même composante se manifeste au-dessous de $-100^\circ C$ avec une intensité 10 fois plus faible environ. Le fait que cette composante puisse apparaître dans NaJ«pur» démontre que les défauts cristallins correspondants ne doivent pas leur existence au Tl; cependant celui-ci exerce une forte action de renforcement.

c) Pour la composante γ_1 de CsJ, l'action du Tl a les mêmes effets qu'un traitement thermique du cristal.

d) Dans tous les cristaux étudiés, les spectres d'émission avec ou sans Tl sont peu différents, du moins pour des concentrations de Tl pas trop fortes ($< 1\%$ environ).

Il semble donc difficile d'attribuer au ion thallium un rôle d'une importance directe dans l'émission des scintillations à déclin rapide.

6° Limites de validité du modèle théorique et extension possible.

La relation $1/\varepsilon = k_1$ (6) n'est valable qu'à la condition que $k_1 \gg k_2$. Il est clair cependant que ceci n'est pas réalisé sur tout le domaine de température étudié. Aux hautes températures pour lesquelles l'intensité est faible on se trouve au-dessous du point d'inflexion T_k

des courbes $I(T)$ (fig. 19 et équation 3), température pour laquelle $k_1 = k_2$; au-dessus de T_k il s'ensuit même que $k_1 < k_2$. Comme l'expérience indique que toujours $E_1 < E_2$, le segment de courbe $\log \tau = f(1/T)$ est plus raide pour $T > T_k$ que pour $T < T_k$. Notre modèle exige donc, du moins dans un domaine de température restreint au voisinage des intensités faibles et des temps de déclin les plus courts, une déviation vers le bas de la « droite » $\log \tau = f(1/T)$.

L'expérience ne semble pas confirmer cette prédiction du modèle. Pour la plupart des cristaux, la mesure de τ dans le domaine critique ($T > T_k$) n'a pas une précision suffisante pour donner une indication certaine sur ce point. Seul NaJ (composante γ_4 , fig. 14) présente au-dessus de 190° K un net désaccord avec la prédiction théorique.

La raison de cette divergence peut être cherchée dans la durée très courte de déclin de ces composantes ($\tau \leq 0,5 \mu\text{sec}$) dans le domaine critique de température ($T > T_k$). Il est en effet fort plausible que les déclins très rapides ne soient pas conditionnés par $k_1 + k_2$, mais bien par la vitesse de capture des trous positifs et des électrons par les centres luminescents: les processus de déclin très rapides — ainsi que le début des plus lents — encore accessibles aux mesures seraient donc déjà du type bimoléculaire.

L'intervention du processus bimoléculaire ne suffit pas cependant à rendre compte également de deux faits expérimentaux assez étonnants et physiquement inexplicables et qui rendent souhaitable une légère extension du modèle théorique utilisé jusqu'ici. Ces deux faits sont les suivants:

a) Le rendement lumineux augmente dans tous les cas lorsque la température diminue; ΔE de l'équation (3) doit donc être positif c'est-à-dire qu'il faut, dans notre modèle, avoir toujours $E_1 < E_2$.

b) Comment expliquer que dans certains cas examinés plus haut l'adjonction de thallium n'a d'influence que sur les constantes E_2 et s_2 (modification du rendement) et aucune sur E_1 et s_1 ou sur le spectre d'émission?

Une légère modification du modèle permet d'éliminer les trois difficultés ci-dessus; on admettra qu'en réalité le piège, avec l'énergie d'activation E_2 , et le centre d'émission luminescent, caractérisé par E_1 , ne forment pas un tout unique, mais sont séparés l'un de l'autre dans le sens que la probabilité de transition λ de l'électron de l'un à l'autre est indépendante de la température et de l'ordre de 10^8 sec^{-1} .

On peut voir facilement alors que le déclin lumineux et sa dépendance de la température ne sont plus conditionnés que par k_1 ;

d'autre part l'équation de rendement (3) avec les paramètres c et ΔE est maintenant remplacée par $I/I_0 = \lambda/(\lambda + k_2) = [1 + s_2/\lambda \exp. (-E_2/kT)]^{-1}$, c'est-à-dire que $c = s_2/\lambda \sim 10^{-8} s_2$ et $\Delta E = E_2$. Il est plausible dans ces conditions d'admettre que le Tl n'agit que sur le piège ce qui ne modifie plus que la grandeur E_2 .

7° *Nature physique du complexe piège-centre luminescent.*

Il est difficile de préciser uniquement sur la base des expériences réalisées, à quelle situation physique au sein de la substance et à quel type de défaut cristallin particulier peut correspondre le modèle de centre luminescent qui nous a permis d'effectuer la corrélation des résultats expérimentaux. Il semble qu'il s'agisse avant tout de centres où la fonction de piège à électron et celle d'émission luminescente sont dans une large mesure indépendantes. Il existe plusieurs types de centres dont les caractéristiques luminescentes sont semblables, mais de formation différente: les uns sont déjà présents dans la poudre cristalline non traitée, d'autres sont produits ou favorisés par traitement thermique du cristal, une troisième catégorie enfin par l'introduction de Tl dans le réseau.

La fonction piège et en particulier le processus non radiatif qui y est associé, est en général fortement influencée par l'addition de Tl. Par contre la cohérence des temps de déclin pour les défauts produits de façon différente rattache le processus d'émission à une barrière de potentiel de plus grande stabilité.

D'autre part la très faible variabilité des spectres émis laisserait supposer que la transition radiative est largement conditionnée par le ion halogène du réseau. La bande d'émission voisine de 4000 Å indique un écart d'énergie considérable entre le niveau métastable et le niveau final de la transition radiative; ceci probablement exclut la possibilité pour ce processus d'être lié à la formation d'un centre F . Une indication dans un sens analogue est fournie par le rendement luminescent en énergie très élevé observé dans le cas de CsJ.

Récemment¹³⁾ des investigations par absorption de lumière ou par thermoluminescence ont indiqué une relation entre le processus d'émission luminescente et la modification (éventuellement destruction) de centres de coloration (color centers), qui pourraient être des centres V . La possibilité d'un rôle plus direct du trou positif dans le processus d'émission, que celui que nous avons envisagé, n'est donc pas exclu.

Nous espérons que l'étude systématique de l'influence du traitement thermique ainsi que l'influence d'impuretés et de centres F introduits dans les cristaux en concentrations connues, permettra

d'identifier de façon complète la nature physique des imperfections cristallines luminescentes dans les iodures d'alcalins.

Ce travail a été rendu possible grâce à l'appui financier de la commission suisse d'énergie atomique (C.S.A.). Nous sommes d'autre part reconnaissants à *Ebauches S.A.* de l'appui matériel qui nous a été fourni.

Bibliographie.

- ¹⁾ R. HILSCH, Z. f. Ph. **44**, 860 (1927). A. SMAKULA, *ibid.* **46**, 558 (1928). R. HILSCH et R. W. POHL, *ibid.* **48**, 384 (1928); **57**, 145 (1929); **59**, 812 (1930).
- ²⁾ F. SEITZ, J. of Chem. Phys. **6**, 150 (1938).
- ³⁾ VON MEYEREN, Z. f. Physik, **61**, 321 (1930).
- ⁴⁾ W. BÜNGER et W. FLECHSIG, Z. f. Physik **67**, 42 (1931).
- ⁵⁾ KYROPOULOS, Z. f. anorg. Ch. **154**, 308 (1926).
- ⁶⁾ J. T. RANDALL et M. H. F. WILKINS, Proc. Roy. Soc. (A) **184**, 366 (1945).
- ⁷⁾ E. A. PEARLSTEIN et R. B. SUTTON, Phys. Rev. **79**, 907 (1950).
- ⁸⁾ L. P. SMITH, Semi-Conducting Materials, p. 114 (Butterworth's Scientific Publications, London 1951).
- ⁹⁾ W. SHOCKLEY, Electrons and Holes in Semiconductors, Van Nostrand, New York, 1950.
- ¹⁰⁾ J. BONANOMI et J. ROSSEL, Helv. Phys. Acta **24**, 310 (1951).
- ¹¹⁾ T. AKAHIRA, Sc. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo, Tab. 3, 181—215 (1929).
- ¹²⁾ FERD. E. WILLIAMS et H. EYRING, J. Chem. Phys. **15**, 289 (1947), G. F. J. GARLICK, Cornell Symposium of the Am. Phys. Soc., Preparation and Characteristics of Solid Luminescent Materials (John Wiley and Sons, Inc., 1948).
- ¹³⁾ C. J. DELBECO, P. PRINGSHEIM et P. JUSTER, J. of Chem. Phys. **19**, 574 (1951); J. SHARMA, Phys. Rev. **85**, 692 (1952).

Der Fremdgaseinfluss von Stickstoff auf die Lichtabsorption des Sauerstoffs als Funktion vom Druck

von Walter Heilpern.

(25. VIII. 1952.)

A. Zusammenfassung.

Im Gebiet des Absorptionskontinuums des Sauerstoffes zwischen $\lambda = 2100$ und 2400 \AA und bei 8 verschiedenen Drucken (zwischen 50 und $126,7 \text{ kg/cm}^2$) wurden die Extinktionskoeffizienten für ein Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch von derselben Zusammensetzung wie Luft bestimmt. Proben atmosphärischer Luft zeigten bei gleichem Gesamtdruck innerhalb der Versuchsgenauigkeit dieselben Resultate. Es ergab sich, dass die Absorption (ebenso wie die des reinen Sauerstoffs) mit dem Druck exponentiell ansteigt. Der gefundene Wert der Druckexponenten ist fast unabhängig von der Wellenlänge und im Mittel um den Betrag $0,23$ kleiner als bei Sauerstoff.

Ferner konnte gezeigt werden, dass für den Einfluss des Stickstoffs auf die Absorption des Sauerstoffs die Angströmsche Annahme nicht gilt. Der Einfluss des Stickstoffs wächst bei konstanten Drucken mit zunehmender Wellenlänge.

Für die Wellenlänge $\lambda = 2144 \text{ \AA}$ wird unter Zuhilfenahme älterer Messungen des Verfassers an Sauerstoff bei kleinen Drucken die folgende Interpolationsformel angegeben, die im Druckintervall von $0,2$ bis 130 kg/cm^2 gültig ist und den Einfluss des Stickstoffs berücksichtigt:

$$\varepsilon_P = (6,169 \pm 0,224) \cdot 10^{-5} p_1 + (9,300 \pm 0,091) \cdot 10^{-5} p_1^2 \\ + (4,007 \pm 0,162) \cdot 10^{-5} p_1 p_2$$

(ε_P ist dabei der Extinktionskoeffizient der Luft beim Gesamtdruck P , der sich aus den Partialdrucken p_1 und p_2 des Sauerstoffs bzw. Stickstoffs zusammensetzt.)

Mit Hilfe der Ergebnisse von Buisson und Mitarbeitern lassen sich entsprechende Formeln für 7 weitere Wellenlängen im untersuchten Bereich angeben, deren Richtigkeit durch Vergleich mit älteren Messungen an Sauerstoff und solchen an einem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch mit anderem Konzentrationsverhältnis bestätigt wird.

B. Einleitung.

Die vorliegende Untersuchung stellt eine Weiterführung von zwei früheren Arbeiten des Verfassers¹⁾ dar, in denen im gleichen Wellenlängengebiet die Absorption von reinem Sauerstoff gemessen wurde.

In der ersten dieser Arbeiten wurden auch einige Absorptionskoeffizienten für Luft- und Sauerstoff-Stickstoff-Gemische angegeben. Diese waren aber zu ungenau und zu wenig zahlreich, um genaue Aussagen über die Druckabhängigkeit der Absorption machen zu können.

Die Absorption der Luft in diesem Spektralgebiet, deren Kenntnis für die Durchlässigkeit der Atmosphäre gegenüber der Sonnenstrahlung von besonderem Interesse ist, muss gesondert bestimmt werden, weil sie aus der des reinen Sauerstoffs allein nicht berechnet werden kann. Denn, da die Absorption des Sauerstoffs das Beersche Gesetz nicht befolgt, ist anzunehmen, dass in dem untersuchten Spektralbereich der Stickstoff der Luft, ohne selbst zu absorbieren, die Absorption des Sauerstoffs erhöht. Ein solcher Fremdgaseinfluss ist in diesem Spektralbereich schon oft (Literaturangaben hierüber siehe in I), in neuerer Zeit besonders von FINKELNBURG und STEINER²⁾ sowie von SALOW³⁾ festgestellt worden. SALOW hat auch bereits den Fremdgaseinfluss des Stickstoffs quantitativ zu erfassen gesucht. Dabei ging er von der Voraussetzung aus, dass die Absorption des Sauerstoffs bei Anwesenheit von Stickstoff, ebenso wie die des reinen Sauerstoffs, unabhängig vom Druck, rein *quadratisch* mit dem Druck zunimmt. Dass SALOW zu dieser Auffassung gelangte, dürfte dem Umstand zuzuschreiben sein, dass er seine Versuche nur bei hohen Drucken ausführte. (Der Sauerstoffpartialdruck betrug mindestens 15 kg/cm².) Aus den Messungen des Verfassers (siehe I und II) geht aber hervor, dass bei reinem

¹⁾ W. HEILPERN, *Helv. Phys. Acta* **14**, 329 (1941), im folgenden mit I bezeichnet und W. HEILPERN, *Helv. Phys. Acta* **19**, 245 (1946), im folgenden mit II bezeichnet.

²⁾ W. FINKELNBURG und W. STEINER, *Z. f. Phys.* **79**, 69 (1932).

³⁾ H. SALOW, *Diss.*, Berlin 1935.

Sauerstoff die Absorption *bei hohen Drucken schneller* mit dem Druck anwächst als bei tiefen Drucken. Dies folgt daraus, dass sich in der Formel $E_p = E_0 p^x$ (wobei E_p die Extinktion beim Druck p , E_0 und x -Konstanten sind) bei kleinen Drucken (p zwischen 0,2012 und 0,8998 kg/cm²; $\lambda = 2144 \text{ \AA}$; siehe I) ein wesentlich kleinerer Wert als 2, nämlich 1,55 ergab, während bei hohen Drucken (p zwischen 50 und 130 kg/cm²; $\lambda = 2100$ bis 2400 \AA ; siehe II) x etwas grösser als 2 ist (Mittelwert 2.12). Nach Salow müsste dagegen x genau den Wert 2 haben, unabhängig vom Druckintervall.

Nimmt man nun an, dass die Absorption der Luft in ähnlicher Weise vom Druck abhängt wie die des reinen Sauerstoffs, dass also für die Absorption der Luft der Partialdruck des darin enthaltenen Sauerstoffs allein massgebend ist, so muss man nach dem oben Gesagten erwarten, dass in der Formel $E = E_0 P^x$ (wobei P hier der Gesamtdruck ist) x für Luft kleiner ist als für Sauerstoff, wenn man in beiden Fällen das gleiche Druckintervall betrachtet. Der in Wirklichkeit vorhandene sogenannte Fremdgaseinfluss des Stickstoffs wird aber die Druckabhängigkeit der Absorption der Luft noch weiter komplizieren.

Für die Wellenlänge $\lambda = 2144 \text{ \AA}$ wurde die Druckabhängigkeit im Intervall von 0,2 bis 130 kg/cm² in einer weiteren Untersuchung¹⁾ noch genauer betrachtet und gefunden, dass sich die Absorption bei dieser Wellenlänge durch eine Formel von der Form: $E_p = E_1 p + E_2 p^2 + E_3 p^3$ darstellen lässt (dabei ist E_p der Extinktionskoeffizient des Sauerstoffs beim Druck p ; E_1 , E_2 und E_3 sind Konstanten). Es zeigte sich, dass die Experimente fast ebensogut durch eine Formel mit nur 2 Konstanten $E_p = (6,169 \pm 0,224) \cdot 10^{-5} p + (9,300 \pm 0,091) \cdot 10^{-5} p^2$ beschrieben werden konnten²⁾.

Die vorliegenden Untersuchungen sollen hier Klarheit schaffen, besonders auch in Hinsicht darauf, dass man gerade für Luft eine möglichst genaue Interpolationsformel für die Druckabhängigkeit der Absorption benötigt, da man nach sehr kleinen Drucken extrapolieren muss, um Kenntnis über die Absorption der höheren Luftschichten der Atmosphäre zu erhalten. Für die Wellenlänge $\lambda = 2144 \text{ \AA}$, für die allein Absorptionsmessungen an Sauerstoff auch bei kleinen Drucken vorliegen (zwischen 0,2012 und 0,8998 kg/cm²; siehe I), soll versucht werden, eine solche Interpolationsformel *für Luft* aufzustellen.

¹⁾ W. HEILPERN, Helv. Phys. Acta **22**, 105 (1949), im folgenden mit III bezeichnet.

²⁾ In III sind hier 2 Druckfehler: Statt 6.159 soll 6.169 und statt 9.315 soll 9.300 stehen, die Zahlen der Tabelle II sind in Ordnung.

C. Versuchsanordnung.

Die Bestimmung der Extinktionskoeffizienten für Luft und andere O_2-N_2 -Gemische erfolgte im Gebiet der kontinuierlichen Absorption des Sauerstoffs zwischen 2100 und 2400 Å, bei hohen Drucken (zwischen 50 und 126,7 kg/cm²) nach genau dem gleichen Verfahren der photographischen Lösungsspektrophotometrie¹⁾, wie es in der früheren Arbeit II bei Sauerstoff angewandt wurde. Die Versuchsanordnung, sowie die zur Ausführung der Versuche benützte Lichtquelle, die Manometer, die Sektoren, der Spektrograph, die photographischen Platten und deren Ausmessung waren dabei völlig identisch, so dass sich ihre Beschreibung erübrigt.

Wegen der geringeren Absorption bei gleichem Druck mussten grössere Schichtdicken verwendet werden. Neben der Absorptionskammer wie in II (von 1,797 cm Länge) wurde daher eine zweite Kammer von identischer Bauart, aber einer Länge von 30,794 cm verwendet.

Als Gasfüllung wurden Gemische von Sauerstoff und Stickstoff von luftähnlicher oder anderer Zusammensetzung benutzt, die von der Firma Carba, Zürich, hergestellt wurden. Beide Gaskomponenten waren durch besonders sorgfältige fraktionierte Destillation aus flüssiger Luft gewonnen worden. Auch für die Kompression des Stickstoffs wurden ölfreie Kompressoren verwendet. Ferner kamen Proben atmosphärischer Luft zur Anwendung, die im Werk der Carba in Rümlang, 5 km vom Rand der Stadt Zürich entfernt, und in einer Höhe von 5 m über dem Erdboden angesaugt und dann komprimiert wurden. Dabei wurde darauf geachtet, dass bei der Entnahme der Luft der Wind nicht von der Stadt her wehte und dass auch hier ölfreie Kompressoren benutzt wurden²⁾.

Der Sauerstoffgehalt des den vorliegenden Versuchen zugrunde liegenden Sauerstoff-Stickstoff-Gemisches von luftähnlicher Zusammensetzung wurde im technisch-chemischen Laboratorium der Eidgenössischen Technischen Hochschule, unter der Leitung von Herrn Dr. SCHÜTZE³⁾ mit Hilfe einer der üblichen Oxydationsmethoden dreimal bestimmt, wobei sich die Werte: 21,70, 21,75 und 21,70 Volumprozent (Mittelwert 21,72%) Sauerstoff ergaben. Für ein anderes, später verwendetes Gemisch wurde der Sauerstoffgehalt zu 14,20% festgestellt.

¹⁾ H. v. HALBAN, G. KORTÜM und B. SZIGETI, Z. f. Elektrochem. **42**, 628 (1936).

²⁾ Der Firma Carba, im besonderen Herrn Direktor HALLAUER, sei an dieser Stelle für ihr Entgegenkommen und die aufgewandte Mühe herzlich gedankt.

³⁾ Herrn P. D. Dr. SCHÜTZE sei hier der herzlichste Dank für seine Hilfe ausgesprochen.

Die Genauigkeit dieser Analysenmethode konnte an diesem zweiten Gemisch noch mit einer anderen genaueren Methode nachgeprüft werden, welche von Herrn Dr. SCHÜTZE zu diesem Zweck neu entwickelt wurde. Bisher wurde diese Methode nur zur Bestimmung kleiner Sauerstoffmengen, z. B. im Leuchtgas, benutzt. Dabei wird Manganosalz in alkalischer Lösung durch den Sauerstoff zu Manganisalz oxydiert. Nach dem Ansäuern mit Salzsäure wird dann die aus dem zugesetzten Kaliumjodid freigemachte, dem Sauerstoff äquivalente Jodmenge mit Natriumthiosulfat titriert. Es gelang, diese Methode nach längeren Versuchen auch für grössere Sauerstoffkonzentrationen brauchbar zu machen. Bei der Anwendung auf das erwähnte zweite Gemisch erhielt man mit der neuen Methode einen Sauerstoffgehalt von $13,75 \pm 0,06$ Volumenprozent anstatt von $14,20\%$ mit der ersten Methode. Da die zweite Methode viel zuverlässiger zu sein scheint¹⁾, wurde der Wert von $13,75\%$ als richtig angenommen, und auch der nach der ersten Methode für das luftähnliche Gemisch erhaltene Wert ($21,72\%$) als zu gross angesehen und entsprechend korrigiert. Es ergibt sich auf diese Weise ein Sauerstoffgehalt von $21,03 \pm 0,04$ Volumprozent, der innerhalb des Versuchsfehlers mit dem der atmosphärischen Luft ($20,99\%$) übereinstimmt.

D. Ergebnisse und Versuchsgenauigkeit.

Bei 8 verschiedenen Drucken zwischen 50 und $126,7 \text{ kg/cm}^2$ wurden Messungen an dem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch (mit $21,03 \pm 0,04\% \text{ O}_2$), bei zwei Drucken (60 und 70 kg/cm^2) auch an atmosphärischer Luft ($20,99\% \text{ O}_2$), ausgeführt. In Fig. 1 ist das Resultat der Messungen dargestellt, wobei die Extinktion E (definiert durch $I = I_0 \cdot 10^{-E}$) als Funktion der Wellenlänge aufgetragen und der Druck als Parameter angegeben ist. E bedeutet, und zwar für alle angegebenen Messungen, die Extinktion bezogen auf die grosse Schichtdicke $d = 30,794 \text{ cm}$. Die Kreise stellen die Mittelwerte aus mindestens 2 Einzelmessungen dar, die bei dem gleichen Druck des Sauerstoff-Stickstoff-Gemisches und unter Verwendung derselben Öffnung des rotierenden Sektors gewonnen wurden. Die ausgeglichenen Kurven beziehen sich auf diese Punkte.

¹⁾ Herr Dr. SCHÜTZE liess eine Messreihe mit atmosphärischer Luft ausführen, bei der die Werte $20,99, 20,95, 20,86, 21,01, 21,09$ mit einem Mittelwert von $20,98 \pm 0,04$ Volumenprozent erhalten wurden, also in bester Übereinstimmung mit dem bekannten Sauerstoffgehalt der Luft von $20,99\%$.

(Die mit der kleineren Schichtdicke (1,797 cm) erhaltenen Werte für $E > 2,5$ sind in Fig. 1 in verkleinertem Maßstab aufgetragen.)

Zum Vergleich wurden ferner die Einzelmessungen an atmosphärischer Luft bei 60 kg/cm² (als ausgefüllte Kreise) und bei 70 kg/cm² (als ausgefüllte Quadrate) angegeben.

Aus den Kurven der Fig. 1 wurden nun für die 8 verschiedenen Versuchsdrucke bei 7 verschiedenen Wellenlängen von 50 zu 50 Å die Extinktionen entnommen. Aus diesen wurden die Extinktionskoeffizienten $\varepsilon_P = E/d$ des Sauerstoff-Stickstoff-Gemisches für die entsprechenden Drucke P berechnet und in der Tabelle 1 zusammengestellt. In die Tabelle wurde auch noch die Wellenlänge 2144 Å aufgenommen, weil für diese Wellenlänge, wie schon erwähnt, auch Messungen an Sauerstoff bei tiefen Drucken (siehe I) vorliegen, was für die Diskussion der Resultate von Wichtigkeit ist.

Tabelle 1.

Werte der Extinktionskoeffizienten ε_P für das O₂—N₂-Gemisch von 21,03% O₂ bei 18° C.

P in kg/cm ²	$\lambda =$ 2100 in Å	$\lambda =$ 2144 in Å	$\lambda =$ 2150 in Å	$\lambda =$ 2200 in Å	$\lambda =$ 2250 in Å	$\lambda =$ 2300 in Å	$\lambda =$ 2350 in Å	$\lambda =$ 2400 in Å
50	0,0316	0,0281	0,0276	0,0235	0,0195	0,0155	—	—
60	0,0458	0,0408	0,0400	0,0343	0,0285	0,0228	0,0168	—
70	—	0,0567	0,0557	0,0472	0,0387	0,0301	0,0221	0,0149
80	—	—	—	—	0,0499	0,0391	0,0292	0,0209
90	—	—	—	—	—	0,0513	0,0369	0,0265
100	—	—	—	—	—	—	0,0449	0,0323
119	0,1674	0,1479	0,1453	0,1240	0,1051	—	—	—
126,7	0,1822	0,1608	0,1581	0,1355	0,1143	—	—	—

Dass bei den Versuchsdrucken nicht für alle Wellenlängen Extinktionskoeffizienten angegeben werden konnten, liegt daran, dass trotz der Verwendung von 2 verschiedenen Schichtdicken mit den vorhandenen Sektoren nicht im ganzen Wellenlängengebiet Messpunkte erhalten werden konnten. Das Vorgehen ist auch hier ganz analog wie bei den Messungen an reinem Sauerstoff bei hohen Drucken in der Arbeit II, wo auch die Begründung dafür gegeben wurde, dass der Einfluss der Rayleighstreuung und der Temperaturänderung vernachlässigt werden kann (siehe II, Seite 255).

Zur Berechnung der Genauigkeit der Extinktionsmessungen wurde im vorliegenden Fall der gleiche Weg wie in II beschritten.

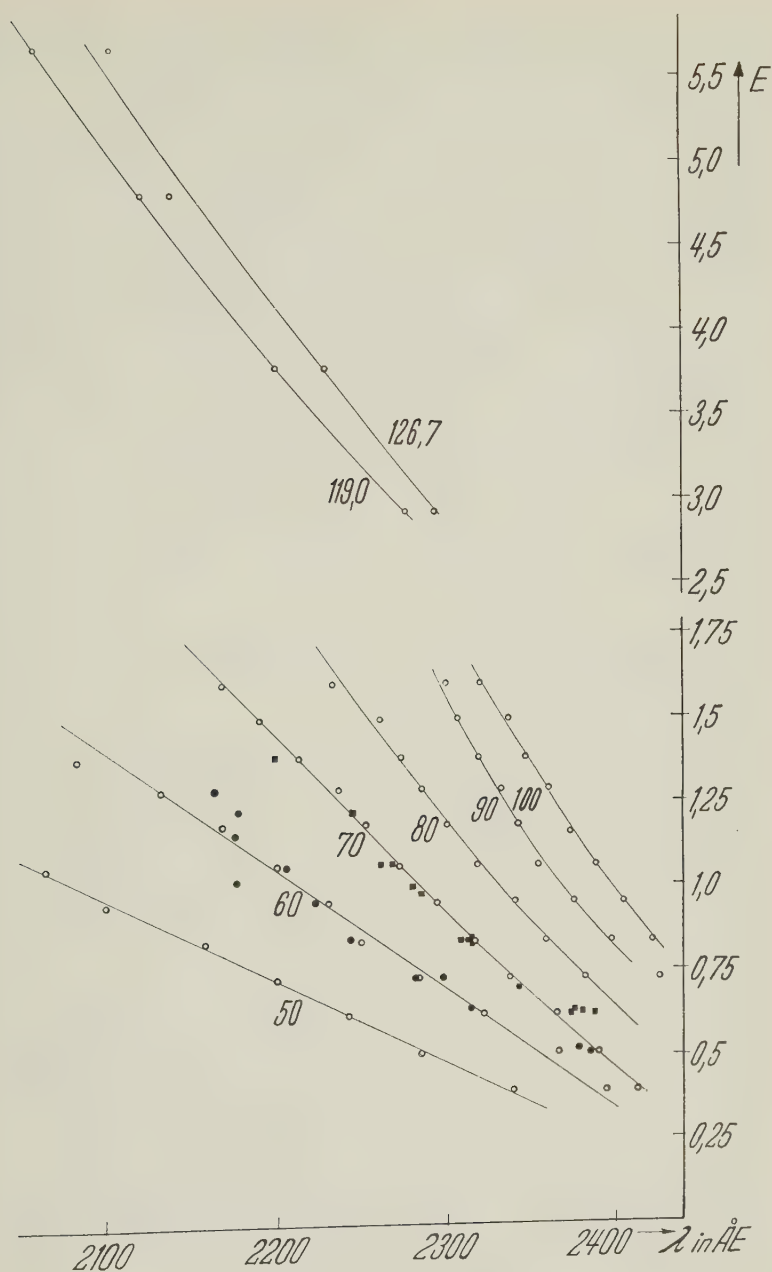


Fig. 1.

Für die Extinktionskoeffizienten ergibt sich als mittlerer absoluter Fehler der Einzelmessung der Wert $\pm 0,0016$ bei insgesamt 141 Messpunkten bei dem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch. Auch hier erscheint es zweckmässig, wie in II, die Fehler für die bei jeder der beiden Schichtdicken erfolgten Messungen gesondert anzugeben. Man erhält für den mittleren Fehler der Einzelmessung für 126 Messpunkte bei der grossen Schichtdicke den Wert $\pm 0,0012$, für 15 Messpunkte bei der kleinen Schichtdicke den Wert $\pm 0,0034$. Dass die Messungen in der kürzeren Absorptionskammer soviel ungenauer sind, hat wohl seinen Grund darin, dass infolge ihrer ungünstigen Länge (sie wurde ja ursprünglich für Messungen an Sauerstoff konstruiert) nur sehr wenige Messpunkte erhalten werden konnten und daher der Betrag der graphischen Ausgleichung durch die Kurvenbildung nur gering ist. Ausserdem konnte der grösste Teil dieser Punkte nur durch Differenzmessungen mit Hilfe von je 2 Sektoren erhalten werden, d. h. es musste auch bei den Aufnahmen *mit* Gasfüllung vom Messdruck in der Kammer noch ein Sektor in den Strahlengang gebracht werden. Die absoluten Fehler in den Extinktionskoeffizienten sind natürlich kleiner als die entsprechenden Werte in II für die Messungen an reinem Sauerstoff ($\pm 0,010$ resp. $\pm 0,029$), weil infolge der im vorliegenden Fall verwendeten grösseren Schichtdicken auch die Extinktionskoeffizienten selbst entsprechend kleiner sind.

Der in II mit ΔE^* bezeichnete Fehler der photographischen Extinktionsmessung (siehe II, Seite 256) ergibt sich hier zu $\pm 0,040$ bis $0,048$ (für alle 141 Messpunkte; und zwar je nachdem, ob der grösste oder kleinste Wert für P in die Rechnung eingesetzt wird). Er ist mehr als doppelt so gross wie der entsprechende Wert in II ($\pm 0,015$ bis $0,018$), aber immer noch von der Grössenordnung des dort aufgeführten, von KORTÜM und von v. HALBAN angegebenen Wertes von $\pm 0,04$.

Der Grund für die Erhöhung der Versuchsfehler gegenüber der früheren Arbeit ist wohl darin zu suchen, dass die vorliegenden Messungen zu einer Zeit (1944/45) angestellt wurden, als das städtische Kraftnetz, aus dem die Lichtquelle gespeist wurde, besonders grossen langzeitigen Spannungsschwankungen (bis zu 40%) unterworfen war. Die als Stabilisatoren vorgeschalteten Eisenwasserstoffwiderstände konnten diese Differenzen nicht ausgleichen.

Wie schon bemerkt, wurden in die Fig. 1 auch die Messpunkte für die Extinktion von atmosphärischer Luft bei 60 und 70 kg/cm² eingetragen. Um diese mit der Extinktion des Sauerstoff-Stickstoff-Gemisches zu vergleichen, wird folgendermassen vorgegangen. Es

wird angenommen, dass die verwendete Luft und das luftähnliche Gemisch in bezug auf den Sauerstoffgehalt von 20,99 Volumenprozent völlig identisch seien. Dies scheint auf Grund der vorangehenden Betrachtung über die Resultate der chemischen Analysemethoden (Abschnitt C) durchaus berechtigt. Dann kann aus den Abweichungen der Messpunkte für Luft gegenüber den Kurven für das Gemisch bei dem gleichen Druck der mittlere Fehler der Einzelmessung an Luft gegenüber den Werten für das Gemisch berechnet werden. Man erhält auf diese Weise einen Fehler von 0,0020 aus insgesamt 28 Messpunkten für Luft, wobei die positiven und negativen Abweichungen ungefähr gleich häufig sind. Dieser Wert ist nun mit dem entsprechenden für das Gemisch zu vergleichen, der aus den Abweichungen der Messpunkte für das Gemisch bei denselben Drucken (von 60 und 70 kg/cm²) gegenüber den ausgeglichenen Kurven berechnet wird. Hierfür erhält man 0,0013 aus insgesamt 74 Messpunkten. Der Fehler der Messungen an Luft ist also zwar etwa 1,5mal grösser, aber es zeigt sich, dass dies gerade der in diesem Fall wesentlich schlechteren Statistik entspricht. (28 Messpunkte für Luft gegenüber 74 für das Gemisch bei denselben Drucken.)

Die Annahme, dass das verwendete luftähnliche Gemisch in bezug auf seinen Sauerstoffgehalt mit atmosphärischer Luft identisch ist, kann also nicht nur auf Grund der Betrachtungen über die Genauigkeit der chemischen Analysemethoden, sondern auch auf Grund der vorliegenden optischen Absorptionsmessungen innerhalb der Versuchsgenauigkeit als berechtigt betrachtet werden.

Ferner scheint aus diesen Messungen auch hervorzugehen, dass der Reinheitsgrad der verwendeten atmosphärischen Luft der des Gemisches entspricht, und dass auch die Bestandteile der Luft von sehr geringer Konzentration wie Argon¹⁾, CO₂ und NH₃ usw. weder durch Eigenabsorption noch durch Fremdgaseinfluss auf die Sauerstoffabsorption innerhalb der Messgenauigkeit bemerkbar sind.

Auf Grund dieser Betrachtungen soll für die Diskussion der Messungen das luftähnliche Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch kurz als Luft bezeichnet und dessen Sauerstoffgehalt entsprechend als 20,99% angenommen werden.

Die Reinheit des im Gemisch benutzten Stickstoffs wurde auch dadurch geprüft, dass eine Messreihe mit genau in gleicher Weise hergestelltem Stickstoff durchgeführt wurde. Bei 70 kg/cm² und

¹⁾ EDGAR MEYER, Verh. d. D. phys. Ges. **6**, 362 (1904), hat festgestellt, dass Argon im Gebiet von $\lambda = 1860$ bis 3000 Å nicht absorbiert.

Benutzung des günstigsten Schwärzungsbereichs der photographischen Platte konnte nicht der geringste Schwärzungsunterschied festgestellt werden, gleichgültig ob die Kammer mit Stickstoff von Atmosphärendruck oder mit solchem von 70 kg/cm^2 gefüllt war.

E. Diskussion der Ergebnisse.

Zunächst soll wie in II versucht werden, die gefundenen Extinktionskoeffizienten des Sauerstoff-Stickstoff-Gemisches als Funktion des Gesamtdruckes P durch die Exponentialfunktion $\varepsilon_P = \varepsilon_0 P^x$ darzustellen (ε_0 und x sind hierbei Konstanten). Nach dem in II und III Gesagten kann es sich dabei nur um eine Interpolationsformel für das untersuchte Druckgebiet handeln, da schon bei reinem Sauerstoff der Exponent x in einem grösseren Druckintervall stark variiert. In Tabelle 2 sind die Werte von x und ε_0 für jede

Tabelle 2.

λ in Å	x_{Luft}	$\varepsilon_0 \cdot 10^5$	m	x	y	m'
2100	1,88	2,05 ₆	0,0029	2	2	0,0029
2144	1,85	2,10 ₂	0,0025	3	2	0,0026
2150	1,85	2,06 ₅	0,0024	3	2	0,0026
2200	1,85	1,76 ₃	0,0019	3	2	0,0026
2250	1,87	1,35 ₃	0,0015	4	2	0,0024
2300	2,03	0,54 ₈	0,0007	5	—	0,0013
2350	1,96	0,54 ₂	0,0003	6	—	0,0013
2400	(2,10)	0,20 ₆	0,0006	5	—	0,0013

Mittelwert $1,90 \pm 0,03$.

der in Tabelle 1 aufgeführten 8 Wellenlängen angegeben. Sie wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate auf 3 Stellen genau berechnet. Um zu zeigen, wie gut die Messungen durch die Formel dargestellt werden, sind in 2 weiteren Kolonnen der Tabelle unter m die mittlere Abweichung der einzelnen Messung sowie die aus den Messfehlern berechnete „mögliche“ mittlere Abweichung m' angegeben¹⁾. Die Definition dieser Fehler ist die gleiche wie in der früheren Arbeit (siehe II, S. 258). Die Werte für m sind wiederum kleiner oder höchstens gleich wie die für m' , wofür bereits in II

¹⁾ x bzw. y geben wieder an, wieviele Messpunkte bei der betreffenden Wellenlänge mit der grossen bzw. kleinen Schichtdicke erhalten wurden.

die Erklärung gegeben wurde. Die Werte der Exponenten κ als Funktion der Wellenlänge schwanken stärker als die entsprechenden Werte für reinen Sauerstoff (siehe II, Tabelle 3, S. 257). Trotzdem wurde auch hier wieder versucht, einen Mittelwert für κ für das Wellenlängengebiet von 2100 bis 2350 Å zu bilden und der Wert $\kappa = 1,90 \pm 0,03$ erhalten. Der Wert für $\lambda = 2400$ Å, der wiederum der grösste ist, wurde dabei wie in II ausgeschlossen.

Tabelle 3.

λ in Å	κ_{O_2}	κ_{Luft}	$\kappa_{O_2} - \kappa_{Luft}$
2100	2,14	1,88	0,26
2144	2,11	1,85	0,26
2150	2,11	1,85	0,26
2200	2,10	1,85	0,25
2250	2,09	1,87	0,22
2300	2,13	2,03	0,10
2350	2,16	1,96	0,20
2400	(2,36)	(2,10)	(0,26)

Mittelwert $2,12 \pm 0,01$ $1,90 \pm 0,03$ $0,22 \pm 0,02$.

Um diese Ergebnisse an dem Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch, das sich, wie oben gezeigt, in bezug auf seine Absorption wie Luft verhält, bequemer mit den alten Ergebnissen an Sauerstoff (siehe II) vergleichen zu können, sind sie beide in Tabelle 3 zusammengestellt. Es ergibt sich, dass sowohl der Mittelwert, wie auch alle Einzelwerte von κ für das Luftgemisch kleiner sind als die entsprechenden Werte für reinen Sauerstoff. Die Differenz der Mittelwerte beträgt (unter Ausschluss des Wertes bei $\lambda = 2400$ Å) 0,22, bei Berücksichtigung aller Werte 0,23. Auffallend ist, dass die Differenzen der Einzelwerte ($\kappa_{O_2} - \kappa_{Luft}$) eine so gute Konstanz zeigen.

Der Unterschied in den Werten von κ hat seinen Grund wohl darin, dass κ mit fallendem Druck abnimmt und daher, bei gleichem Gesamtdruck für das Gemisch mit dem 5mal geringeren Sauerstoffpartialdruck, kleiner sein muss als für reinen Sauerstoff. Auf Grund der Experimente in den Arbeiten I und II konnte in II und III bereits gezeigt werden, dass κ für reinen Sauerstoff bei der Wellenlänge 2144 Å eine Funktion des Druckes ist. Bei dieser Wellenlänge nimmt κ bei einem Druckverhältnis von etwa 200:1 von 2,11 auf 1,55, also um 0,56 ab. Im vorliegenden Fall beträgt diese Differenz 0,22 bei einem Verhältnis der Sauerstoffpartialdrucke von etwa 5:1, und zwar ziemlich gleichmässig im ganzen Gebiet des Absorptionskontinuums zwischen 2100 und 2400 Å.

Es soll nun im folgenden versucht werden, den „Fremdgaseinfluss“ des Stickstoffs genauer zu erfassen. Dass die Änderung der Sauerstoffabsorption durch Zusatz von Stickstoff in der Tat beträchtlich ist, geht aus Tabelle 4 hervor. Als Beispiel sind in Spalte 2 für die Wellenlänge 2350 Å zwei gemessene Extinktionskoeffizienten für *Luft* (ϵ_P^L beob.) bei zwei verschiedenen Drucken P

Tabelle 4.
 $\lambda = 2350 \text{ Å.}$

$P \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$\epsilon_P^L \text{ beob.}$	$\epsilon_p^{O_2} \text{ für } 0,2099 P$ (kein Fremdgaseinfluss)	$\epsilon_p^{O_2} \cdot 0,2099$ (nach ANGSTRÖM)
90	0,0369	0,00867	0,0535
100	0,0449	0,0109	0,0684

aufgeführt. In Spalte 3 sind die Extinktionskoeffizienten $\epsilon_p^{O_2}$ des *Sauerstoffs* bei den Drucken $p = 0,2099 P$ angegeben, d. h. bei den jeweiligen Sauerstoffpartialdrucken p , die zu den entsprechenden Gesamtdrucken P der Luft gehören¹⁾. Diese Werte sollten mit den Luftmessungen der Spalte 2 übereinstimmen, falls überhaupt kein Fremdgaseinfluss vorhanden wäre. Wie man sieht, sind aber die gemessenen Werte etwa 4mal grösser. Nach einer alten Annahme von Angström²⁾ soll die Absorption eines O_2 - N_2 -Gemisches in der gleichen Weise vom *Gesamtdruck* abhängen, wie die Absorption des reinen Sauerstoffs vom *Sauerstoffdruck*. Die Erklärung hierfür ist folgende: Ein Sauerstoffmolekül kann nicht nur durch einen Zusammenstoß mit einem anderen Sauerstoffmolekül, sondern auch durch einen solchen mit einem Fremdgas- (z. B. Stickstoff-) Molekül in einen Zustand höherer Absorptionsfähigkeit gebracht werden, wobei speziell vorausgesetzt wird, dass im zweiten Fall die Absorptionszunahme gleich gross ist, wie im ersten. Die Zunahme der Absorptionsfähigkeit eines Sauerstoffmoleküls bei einem Zusammenstoß mit einem anderen Molekül soll also unabhängig davon sein, ob es sich dabei um ein zweites Sauerstoffmolekül oder um ein Fremdgasmolekül handelt. Diese Auffassung von Angström lässt sich für unseren Fall in der Gleichung darstellen:³⁾

$$\epsilon_P^L = \epsilon_0^{O_2} \cdot P^\infty \cdot c = \epsilon_p^{O_2} \cdot c,$$

1) Die $\epsilon_p^{O_2}$ wurden aus den Messungen in II nach der dort angegebenen Interpolationsformel für die Partialdrucke von etwa 19 und 21 kg/cm² extrapoliert, obwohl diese Formel eigentlich nur im Bereich zwischen 50 und 130 kg/cm² gültig ist. Die dadurch möglicherweise entstehende Diskrepanz ist aber bei dem grossen Unterschied der Werte in den Spalten 2 und 3 sicher zu vernachlässigen.

2) Hierüber und über andere ältere Literatur siehe I, S. 348 ff.

3) Siehe E. WARBURG, Ber. Akad. Ber. 14, 239 (1915) sowie I, S. 352.

wobei P der Gesamtdruck der Luft und c die Konzentration des Sauerstoffs im Gemisch bedeutet.

Die 4. Spalte der Tabelle 4 enthält nun diese Extinktionskoeffizienten $\varepsilon_P^{O_2} \cdot c$, wobei die $\varepsilon_P^{O_2}$ aus II entnommen sind. Diese Werte sollten mit den beobachteten ε_P^L -Werten identisch sein, falls die Angströmsche Auffassung hier gültig wäre. Wie man aber aus der Tabelle ersieht, bestätigen unsere Messungen die Angströmsche Annahme *nicht*, da die $\varepsilon_P^{O_2} \cdot c$ um etwa 50% grösser sind als die beobachteten ε_P^L .

Aus den Versuchen der Tabelle 4 geht aber auch noch hervor, dass im betrachteten Wellenlängenbereich die Absorptionsfähigkeit eines Sauerstoffmoleküls bei einem Zusammenstoss mit einem Stickstoffmolekül wesentlich weniger erhöht wird, als bei einem solchen mit einem zweiten Sauerstoffmolekül, da die Werte nach Angström grösser sind als die ε_P^L beobachtet. Um diesen Tatbestand formelmässig darzustellen, muss man den Extinktionskoeffizienten der Luft als Summe verschiedener Teilabsorptionen zusammensetzen, wovon eine durch Stösse zwischen Sauerstoffmolekülen, eine zweite durch Stösse zwischen Sauerstoff- und Stickstoffmolekülen hervorgerufen wird. Ein dritter Anteil entspricht der Absorption, die einem Sauerstoffmolekül selbst auch ohne Zusammenstoss mit einem anderen Molekül zukommt, deren Vorhandensein in der Arbeit I nachgewiesen wurde.

Auf diese Weise gelangt man zu der folgenden Interpolationsformel, deren Verträglichkeit mit den Experimenten im folgenden geprüft werden soll:

$$\varepsilon_P = \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2^2 + \varepsilon_2' p_1 p_2.$$

Dabei ist ε_P der Extinktionskoeffizient der Luft bei einer bestimmten Wellenlänge und der Schichtdicke 1 cm sowie dem Druck P , ε_1 entspricht der Teilabsorption, die durch die Eigenabsorption der Sauerstoffmoleküle hervorgerufen wird. ε_2 und ε_2' sind die entsprechenden Anteile für die Absorptionserhöhung der Sauerstoffmoleküle beim Zusammenstoss mit anderen Sauerstoff- bzw. Stickstoffmolekülen. p_1 und p_2 sind die Partialdrucke des Sauerstoffs bzw. Stickstoffs beim Gesamtdruck P .

Lässt man in der obigen Formel das dritte Glied fort, so erhält man die „zweikonstantige“ Formel für die Absorption des reinen Sauerstoffs beim Druck P , wie sie in der Arbeit III bei der Wellenlänge $\lambda = 2144 \text{ \AA}$ angewendet wurde. Vernachlässigt man dagegen das erste Glied, so resultiert eine Formel, die im untersuchten Kontinuum und den nach grösseren Wellenlängen daran anschliessenden

zugehörigen Banden bereits von SALOW¹⁾ benützt wurde. Da bei dessen Messungen nur hohe Drucke zur Anwendung kamen, war innerhalb seiner Versuchsgenauigkeit die Eigenabsorption der Sauerstoffmoleküle relativ gering und wurde daher nicht beachtet.

Zur experimentellen Prüfung der obigen Interpolationsformel erscheint es nun zweckmässig, sich zunächst auf die Wellenlänge 2144 Å zu beschränken, weil hier aus den früheren Arbeiten für reinen Sauerstoff (bei kleinen Drucken aus I, bei grossen Drucken aus II) und für Luft bei hohen Drucken aus den vorliegenden Messungen das reichhaltigste experimentelle Material vorliegt. Zudem sind für diese Wellenlänge ε_1 und ε_2 schon aus der Arbeit III bekannt; es muss also nur noch ε_2' bestimmt werden. Dies geschieht in der folgenden Weise: Für jeden der gemessenen Extinktionskoeffizienten ε_P für Luft beim Druck P aus der vorliegenden Arbeit wird unter Benützung der bekannten Konstanten ε_1 und ε_2 die Differenz $\varepsilon_P - (\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_1^2)$ bestimmt und aus diesen Werten, die gleich $\varepsilon_2' p_1 p_2$ sein müssen, ε_2' als Mittelwert erhalten. Auf diese Weise wird die Interpolationsformel:

$$\varepsilon_P = (6,169 \pm 0,224) \cdot 10^{-5} p_1 + (9,300 \pm 0,091) \cdot 10^{-5} p_1^2 + \\ + (4,007 \pm 0,162) \cdot 10^{-5} p_1 p_2$$

gewonnen.

Um die Richtigkeit der abgeleiteten Interpolationsformel zu prüfen, wird mit ihrer Hilfe die Absorption für den Druck $P = 730$ mm Hg ($= 0,9922$ kg/cm²) berechnet. Bei diesem Druck liegt bei der gleichen Wellenlänge (2144 Å) eine Messung von BUISSON und Mitarbeitern²⁾ an atmosphärischer Luft vor, die einen Extinktionskoeffizienten von $\varepsilon_P = 2,40 \cdot 10^{-5}$ ergab. Aus der Formel erhält man dafür den Wert: $\varepsilon_P = 2,34 \cdot 10^{-5}$.

Diese sehr gute Übereinstimmung legt den Gedanken nahe, die sich über das ganze hier untersuchte Absorptionskontinuum erstreckenden Messungen von BUISSON dazu zu benutzen, um auch bei anderen Wellenlängen die Konstanten der obigen Interpolationsformel zu bestimmen. Dies wäre allein aus den früheren und den vorliegenden Messungen des Verfassers nicht möglich, weil im Gegensatz zu der Wellenlänge 2144 Å bei den anderen Wellenlängen keine Messungen bei niedrigen Drucken vorhanden sind. Es könnte

¹⁾ H. SALOW, l. c.

²⁾ H. BUISSON, C. JAUSSEMAN und P. ROUARD, *Rev. d'Optique* **12**, 70 (1933). Es sei bemerkt, dass $p = 730$ mm Hg unsicher ist; siehe I, Seite 349. Wäre p nur um 5 mm Hg grösser, so ergäbe sich schon $\varepsilon_P = 2,37 \cdot 10^{-5}$.

daher die Konstante ε_1 nicht mit genügender Genauigkeit bestimmt werden.

Unter Verwendung der Messungen von BUISSON, grösstenteils durch graphische Interpolation aus seinen Extinktionswerten gewonnen, wird nun das folgende Verfahren zur Berechnung der Konstanten eingeschlagen: Die Formel

$$\varepsilon_P = \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_1^2 + \varepsilon_2' p_1 p_2$$

wird durch Einführung der Konzentration c des Sauerstoffs beim Gesamtdruck P auf folgende Form gebracht:

$$\varepsilon_P = \varepsilon_1 c P + (\varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_2' c(1 - c)) P^2.$$

Aus den Messungen von BUISSON an Luft bei dem Druck von 730 mm Hg = 0,9922 kg/cm² und den Messungen bei hohen Drucken aus der vorliegenden Arbeit werden mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ε_1 sowie der Koeffizient von P^2 bestimmt¹⁾. In diesem Koeffizienten kann nun ε_2 auf Grund der Messungen an reinem Sauerstoff bei grossen Drucken (siehe II) ermittelt werden. Dazu werden die gemessenen Extinktionskoeffizienten ε_p des Sauerstoffs in der Form $\varepsilon_p = \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2$ dargestellt. Da ε_1 aus der Absorption der Luft bekannt ist, lässt sich ε_2 für jeden Messdruck p und die dazugehörige Extinktion berechnen; aus allen bei der gleichen Wellenlänge erhaltenen Werten wird dann der Mittelwert genommen. Durch Einsetzen von ε_2 in den Koeffizienten von P^2 wird nun auch ε_2' bestimmt.

Die auf diese Weise für alle in der Tabelle 1 aufgeführten Wellenlängen bestimmten Konstanten ε_1 , ε_2 und ε_2' sind in der Tabelle 5 zusammengestellt²⁾, wo auch unter m^{O_2} bzw. m^L noch die mittleren Abweichungen zwischen den berechneten und den experimentellen Werten für die Sauerstoff- bzw. Luftmessungen angegeben sind. Die m sind definiert durch

$$m = \sqrt{\frac{\sum (\varepsilon_P \text{ ber.} - \varepsilon_P \text{ beob.})^2}{n-2}} \quad ^3)$$

¹⁾ Bei diesen Rechnungen ist wieder so vorzugehen, wie in Arbeit III, S. 109, angegeben wurde.

²⁾ Leider können deren Fehler nur bei der Wellenlänge 2144 Å angegeben werden, da bei den anderen Wellenlängen die Fehler der zur Berechnung der Konstanten benutzten Messungen von BUISSON nicht bekannt sind. Es dürften aber auch hier wohl kaum wesentlich grössere Fehler auftreten als bei 2144 Å.

³⁾ Auch bei der Berechnung dieser Abweichungen ist auf das Gewicht der Messungen bei kleinen Drucken zu achten (vgl. III, S. 111).

Es geschieht dies, weil die Wiedergabe des gesamten Zahlenmaterials für alle Wellenlängen zu umfangreich wäre, was aber kein Mangel ist, denn einmal wurde in III schon ein Beispiel für Sauerstoff bei $\lambda = 2144 \text{ \AA}$ in extenso gegeben, und andererseits können bei Bedarf die Werte nach unserer Formel ohne viel Mühe berechnet werden.

Tabelle 5.

λ in \AA	$\varepsilon_1 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2 \cdot 10^5$	$\varepsilon_2' \cdot 10^5$	$\pm m_{O_2}$	$\pm m^L$	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$	$\varepsilon_2'/\varepsilon_2$
2100	12,821	10,503	4,067	0,057	0,0036	0,819	0,387
2144	$6,169 \pm 0,224$	$9,300 \pm 0,091$	$4,007 \pm 0,162$	0,027	0,0074	1,51	0,431
2150	6,702	8,807	3,697	0,042	0,0041	1,31	0,420
2200	5,494	7,212	3,247	0,030	0,0033	1,31	0,450
2250	4,104	5,726	2,861	0,022	0,0025	1,40	0,500
2300	2,628	4,310	2,574	0,022	0,0007	1,63	0,597
2350	2,689	3,103	1,869	0,018	0,0003	1,15	0,602
2400	1,466	2,096	1,369	0,023	0,0006	1,43	0,653
$M = 1,39 \pm 0,06$							

Die Gültigkeit der erhaltenen Formeln lässt sich ausser bei $\lambda = 2144 \text{ \AA}$ für den Bereich kleiner Drucke nur noch bei der Wellenlänge 2100 \AA prüfen, da es nur hier experimentelle Werte gibt, die zur Berechnung nicht benutzt werden mussten. Es liegt eine Messung von GRANATH¹⁾ an *Sauerstoff* bei Atmosphärendruck vor, die den Wert 0,000247 ergab. Bei der Berechnung aus den Konstanten der Tabelle 5 erhält man 0,000245. Diese gute Übereinstimmung scheint deshalb besonders für die Genauigkeit der Interpolationsformel zu sprechen, weil ihre Konstanten bei dieser Wellenlänge, in Ermangelung von Messungen an reinem Sauerstoff bei kleinen Drucken, nur aus solchen bei *hohen* Drucken und aus Messungen an Luft (Beobachtungen von Buisson und Arbeit II) bestimmt werden konnten. Dieser berechnete Extinktionswert für Sauerstoff bei einer Atmosphäre entspricht also einer sehr weitgehenden Extrapolation unserer Formel.

Die Messungen an 95%igem Sauerstoff bei $\lambda = 2100 \text{ \AA}$ von WARBURG²⁾ wurden schon in II mit unseren Experimenten verglichen. Da sowohl bei WARBURG als auch in II die Messungen bei

¹⁾ L. P. GRANATH, Phys. Rev. **34**, 1045 (1929); siehe Arbeit I, S. 346, wo auch der infolge der Rayleighstreuung abzuziehende Betrag angegeben ist.

²⁾ E. WARBURG, Berl. Akad. Ber. **14**, S. 230 (1915).

höheren Drucken (27,5 bzw. 50 kg/cm² und darüber) ausgeführt wurden, würde ein Vergleich mit Hilfe der vorliegenden zu tieferen Drucken reichenden Interpolationsformel nichts Neues im Verhältnis zu der früheren Gegenüberstellung bringen. Damals ergaben sich relativ grosse Unterschiede, die darauf zurückgeführt wurden, dass WARBURG kein sehr gut monochromatisches Licht verwendete. Derselbe Grund ist auch für den Vergleich mit Warburgs Messungen an Luft (l. c., Tabelle 4) massgebend. Warburgs Wert bei $P = 97$ kg/cm² fällt in unseren Druckbereich, so dass ein direkter Vergleich möglich ist. Er findet einen Extinktionswert von 0,212 für die Schichtdicke 1,72 cm, was einem Extinktionskoeffizienten von $\varepsilon_P = 0,123$ entspricht, während unsere Formel 0,110 ergibt. Die Übereinstimmung ist also auch hier nicht gut, die Abweichung beträgt etwa 12%.

Bei den übrigen Wellenlängen (mit Ausnahme von 2400 Å) wurden zur Beurteilung der Genauigkeit der erhaltenen Interpolationsformeln Messungen mit einem zweiten Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch mit kleinerem Sauerstoffgehalt als Luft (13,75 Volumenprozent O₂) bei zwei verschiedenen Drucken (70 und 100 kg/cm²) ausgeführt. Die gemessenen Extinktionskoeffizienten ε_P sind in der Tabelle 6 für die einzelnen Wellenlängen den aus den Interpolationsformeln berechneten Werten gegenübergestellt; ausserdem ist der aus den einzelnen Abweichungen berechnete mittlere Fehler m angegeben. Wie man sieht, ist auch hier die Übereinstimmung gut.

Tabelle 6.

ε_P des Sauerstoff-Stickstoff-Gemisches von 13,75 Volumprozent O₂.

λ in Å	$P = 70$ kg/cm ² exp.	$P = 70$ kg/cm ² ber.	$P = 100$ kg/cm ² exp.	$P = 100$ kg/cm ² ber.	$\Delta \cdot 10^4$ $\Delta^2 \cdot 10^8$	
2144	0,0338	0,0325	—	—	- 13	169
2200	0,0268	0,0261	—	—	- 7	49
2250	0,0223	0,0223	—	—	0	0
2250	—	—	0,0437	0,0453	+ 16	256
2300	0,0187	0,0192	—	—	+ 5	25
2300	—	—	0,0346	0,0390	+ 44	1936
2350	—	—	0,0255	0,0284	+ 29	841
					$m = \pm 0,0023$	

Im folgenden sollen auch noch die älteren Messungen bei $\lambda = 2144$ Å an Luft und Sauerstoff-Stickstoff-Gemischen aus I zum Vergleich herangezogen werden, obwohl sie weniger zuverlässig scheinen, da ihr Ergebnis sehr stark von der Methode der chemischen

Reinigung abhängig war. Die Messungen bei hohem Druck sind in dieser Hinsicht wesentlich sicherer, weil kleine Beimengungen von Gasen, deren Absorption sehr intensiv ist und daher linear mit dem Druck zunimmt (z. B. O_3 , NH_3 usw.), wegen der starken Druckabhängigkeit der Absorption von Sauerstoff und Luft bei hohen Drucken kaum mehr ins Gewicht fallen.

In der Tabelle 7 sind die aus der Tabelle 4 der Arbeit I entnommenen Messungen den nach der Interpolationsformel berechneten Werten gegenübergestellt. Wie man sieht, besteht bei den Messungen an atmosphärischer Luft¹⁾ sowie bei dem 49,2% Sauerstoff enthaltenen Gemisch Übereinstimmung innerhalb der Versuchsfehler. Bei dem Gemisch mit 18,9% Sauerstoff ist aber der berechnete Wert um etwa 35% zu klein. Eine so grosse Differenz findet sich sonst nie in unserem umfangreichen Material. Der Verdacht eines hier vorliegenden Versuchsfehlers liegt nahe, besonders da die oben angeführte Übereinstimmung des berechneten Wertes mit den Messungen von Buisson bei derselben Wellenlänge sowie bei ähnlichem Druck und ähnlicher Konzentration so gut ist.

Tabelle 7.

Vergleich mit Messungen aus I ($\lambda = 2144 \text{ \AA}$).

Art des Gases	$P \text{ kg/cm}^2$	$\varepsilon_P \text{ exp.}$	$\varepsilon_P \text{ ber.}$
Luft (Aussenluft gereinigt, 1. Messung vom 12. Dezember 1939)	0,9800 (721 mm Hg)	$(2,15 \pm 0,20) \cdot 10^{-5}$	$2,30 \cdot 10^{-5}$
Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch (49,2 Volumprozent O_2), gereinigt	0,8836 (650 mm Hg)	$(5,36 \pm 0,24) \cdot 10^{-5}$	$5,57 \cdot 10^{-5}$
Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch (18,9 Volumprozent O_2), gereinigt	0,8836 (650 mm Hg)	$(2,76 \pm 0,32) \cdot 10^{-5}$	$1,77 \cdot 10^{-5}$

In Tabelle 5 fällt auf, dass am kurzwelligen Ende des untersuchten Gebietes ε_1 wesentlich stärker zunimmt als die beiden anderen Konstanten. Dies hat wahrscheinlich seinen Grund darin, dass sich dem untersuchten Absorptionskontinuum in diesem Gebiet Banden überlagern, die zu einem anderen Übergang gehören. Es handelt

¹⁾ Hier wurde nur eine Messung aus I herangezogen, die bei weitem die geringste Extinktion ergab (1. Messung unter e), Tabelle 4), also wahrscheinlich am besten gereinigt war.

sich dabei um das Schumann-Runge-Füchtbauer-Bandensystem¹⁾, das sehr intensiv ist und dessen Intensität daher linear mit dem Druck zunimmt. Daher kann natürlich nur ε_1 als Koeffizient des in P linearen Gliedes eine Zunahme zeigen.

Für die übrigen Wellenlängen scheint das Verhältnis $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ konstant zu sein, der Mittelwert ist $M = 1,39 \pm 0,06$ (Tabelle 5). Das würde bedeuten, dass die durch den Stoss von zwei Sauerstoffmolekülen erzeugte Absorptionsfähigkeit im Verhältnis zur Eigenabsorption eines Sauerstoffmoleküls unabhängig von der Wellenlänge ist.

Wesentlich interessanter scheint die Tatsache zu sein, dass der Quotient $\varepsilon_2'/\varepsilon_2$ in Tabelle 5 *nicht konstant ist*, sondern zwischen $\lambda = 2100$ und 2400 \AA von $0,387$ bis auf $0,653$ zunimmt. Dies bedeutet erstens, dass bei einer bestimmten Wellenlänge die Absorptionsfähigkeit eines Sauerstoffmoleküls durch den Zusammenstoss mit einem Stickstoffmolekül um einen $\varepsilon_2'/\varepsilon_2$ mal kleineren Faktor erhöht wird, als beim Zusammenstoss mit einem anderen Sauerstoffmolekül, und zweitens dass diese *relative Erhöhung der Absorptionsfähigkeit, d. h. die Aufhebung des Übergangsverbots eine Funktion der Wellenlänge innerhalb des Absorptionskontinuums ist*. Der Fremdgaseinfluss des Stickstoffs auf die Absorption nimmt also bei konstantem Druck mit zunehmender Wellenlänge zu.

Bei den Versuchen der Tabelle 5 steigt der Wert von $\varepsilon_2'/\varepsilon_2$ bis zu $0,653$. Würde $\varepsilon_2'/\varepsilon_2 = 1$ werden, d. h. $\varepsilon_2' = \varepsilon_2$, so ginge unsere Gleichung für die Extinktion des Gemisches wie folgt in die Angströmsche Formel über:

$$\varepsilon_P = \varepsilon_1 P c + \varepsilon_2 P^2 c^2 + \varepsilon_2 P^2 c (1 - c) \quad \text{oder} \\ \varepsilon_P = (\varepsilon_1 P + \varepsilon_2 P^2) c = \varepsilon_P^0 \cdot c.$$

Esmuss noch darauf hingewiesen werden, dass SALOW (l.c.) annimmt, dass der Quotient $\varepsilon_2'/\varepsilon_2$ (bei seiner Bezeichnung der Konstanten β/α) unabhängig von der Wellenlänge eine Konstante ist. Er glaubt, durch seine Messungen, die sich zum grössten Teil auf das Gebiet der zum gleichen Übergang gehörenden Banden beziehen, den Beweis dafür erbracht zu haben. Eine genaue Betrachtung der Zusammenstellung seiner Experimente (siehe z. B. l. c. Tabelle 3, S. 35) zeigt aber, dass dies keineswegs der Fall ist. So stimmen bei seinen Messungen an Sauerstoff-Stickstoff-Gemischen die Quotienten β/α innerhalb eines jeden Bandentriplets, also bei sehr benachbarten Wellenlängen, relativ gut überein, während sie bei verschiedenen Triplets grosse Abweichungen voneinander zeigen (bis 34%).

¹⁾ Hdb. d. Exper. Phys., Erg. Bd. I, S. 366 (1931); CHR. FÜCHTBAUER und E. HOLM, Phys. ZS. **26**, 34 (1925); siehe auch II, S. 264.

Dass auch die Abweichungen von der quadratischen Druckabhängigkeit, d. h. das Vorhandensein eines Absorptionsanteils, der linear vom Sauerstoffpartialdruck abhängt, sowohl aus den Messungen von SALOW, wie auch aus denen von FINKELNBURG und STEINER (l. c.) hervorgehen, von diesen Autoren aber nicht beachtet wurden, ist bereits in II erwähnt worden.

Die vorliegende Arbeit zeigt also, dass die Absorption der Luft im untersuchten Spektralgebiet in wesentlich komplizierterer Weise vom Gesamtdruck und der Konzentration des Stickstoffs als Funktion der Wellenlänge abhängt, als sowohl FINKELNBURG und STEINER wie auch SALOW annahmen.

Es ergibt sich aber, dass für jede beliebige Wellenlänge des untersuchten Bereiches eine Interpolationsformel aufgestellt werden kann, die mindestens in einem Druckbereich von 1: 120 sehr gut gilt, und aus der auch die Absorption für andere Verhältnisse von Sauerstoff- und Stickstoffkonzentration recht genau berechnet werden kann.

Zum Schluss möchte ich noch Herrn Prof. EDGAR MEYER für das grosse Interesse, mit dem er den Gang der Untersuchungen stets verfolgte und ganz besonders für seine aufopfernde Mitarbeit und seine sehr wesentlichen Anregungen bei der Auswertung und Diskussion der Resultate recht herzlich danken. Herrn Prof. von HALBAN † danke ich für die Überlassung der spektralphotometrischen Apparatur und Herrn Dr. K. WIELAND für seine Unterstützung bei deren Bedienung.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

Zum Fadingeffekt in Kernspurplatten

von **W. Hålg*** und **L. Jenny** (Basel).

(22. VIII. 1952.)

In einer Untersuchung über den Herschel- und Clayden-Effekt in Kernspurplatten haben SCHOPPER, MAGUN und BRAUN¹⁾ Abklingkurven von latenten Protonenspuren einer Ilford C2-Emulsion veröffentlicht. Die Autoren haben die exponierten Platten einem beschleunigten Fading unter Einwirkung von Luft mit 90% relativer Feuchtigkeit unterworfen. In einer früheren Arbeit zeigten wir durch Auswertung von Abklingkurven an der selbsthergestellten Emulsion²⁾, dass das latente Bild als aus einer kurzlebigen und einer langlebigen Komponente bestehend aufgefasst werden kann. Die bei der Exposition erzeugten Mengen der beiden Bildanteile variieren mit der Erzeugungsart, aber auch mit der Zusammensetzung und den Herstellungsbedingungen der photographischen Schicht. So ergibt sich für unsere Platten, welche keine das latente Bild stabilisierende Stoffe enthalten, beispielsweise für 3 MeV Protonen nur ein kurzlebiges Bild, während nach unsern Vergleichsmessungen die gleichen Protonen in einer Ilford C2-Schicht auch einen langlebigen Anteil erzeugen. Tabelle 1 gibt die gefundenen Werte wieder unter Verwendung der bereits früher benutzten Bezeichnungsweise²⁾. Es bedeuten T_L bzw. T_K die Halbwertszeiten der langlebigen bzw. kurzlebigen Bildkomponente und A_L bzw. A_K deren normierte Anfangsanteile.

Tabelle 1.

Normales Fading in Luft 20° C, 50—55% rel. Feuchtigkeit		T_L	T_K	A_L	A_K
Eigene Emulsion: Protonen (3 MeV). . .			8 d		1
Alphateilchen (5,3 MeV)		140 d	3 d	0,85	0,15
Ilford C2:	Protonen (3 MeV). . .	140 d	3 d	0,88	0,12

*) z. Zt. J.E.N.E.R., Kjeller per Lillestrøm (Norge).

¹⁾ E. SCHOPPER, S. MAGUN und W. BRAUN, Z. f. Natforsch. **6 a**, 338 (1951).

²⁾ W. HÅLG und L. JENNY, Helv. Phys. Acta **24**, 508 (1951).

Die Ilford C2-Schicht zeigt wegen ihrer andern Herstellung und Zusammensetzung (Stabilisatoren) auch für die Protonenspuren eine wesentlich bessere Haltbarkeit, da dort der Anteil an langlebigem latentem Bild bereits 88% ist. Die Protonen in der C2-Emulsion verhalten sich gleich, wie die 5,3 MeV Alphateilchen des Poloniums in unserer Platte.

Die von SCHOPPER u. a. veröffentlichten Daten über das beschleunigte Abklingen von Protonenspuren in Ilford-Platten gestatten eine Nachprüfung dieser Anschauung unter Verwendung der entsprechenden Resultate für Alphateilchen in unserer Emulsion. Es ist zu erwarten, dass die Protonenspuren in Ilford C2 einen kurzlebigen und einen langlebigen Anteil des latenten Bildes ergeben werden, mit ähnlichen Halbwertszeiten und Zusammensetzungen, wie wir es an Alphaspuren bei beschleunigtem Fading gefunden haben. Da SCHOPPER u. a. nicht dieselben Versuchsbedingungen wie wir eingehalten haben, ist keine quantitative Übereinstimmung, wie sie beim normalen Fading gefunden worden ist, zu erwarten.

Tabelle 2.

Beschleunigtes Fading		T_L	T_K	A_L	A_K
Ilford C2 (Auswertung der Messungen von SCHOPPER) H ₂ O-Dampf (Luft von 90% rel. Feuchtigkeit)	Protonen (6 MeV)	840 h	32 h	0,75	0,25
Eigene Emulsion Dampf über 3% H ₂ O ₂	Alphateilchen (5,3 MeV)	230 h	2 h	0,75	0,25

Aus Tabelle 2 ist das analoge Verhalten für beschleunigtes Fading von Protonenspuren in der Ilford C2-Platte und Alphateilchen in einer einfachen, nicht stabilisierten Emulsion ersichtlich. Die Verwendung von Stabilisatoren bei der Herstellung von Kernspurplatten ergibt daher eine Verminderung des erzeugten kurzlebigen Bildanteiles zugunsten des haltbareren langlebigen.

Es wäre wünschenswert, die Anteile A_L als Funktion der Anfangsschwarzung S_0 , durch Versuche mit Licht, wie sie für unsere Emulsion beschrieben worden sind, auch an den Ilford C2-Platten zu messen.

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XXV

AUTORENREGISTER — TABLE DES AUTEURS

ALBERS-SCHÖNBERG: s. Aepli, Albers-Schönberg, Frauenfelder u. Scherrer	339
ALDER, KURT: Beiträge zur Theorie der Richtungskorrelation	235
ANLIKER, M., KÄNZIG, W. und PETER M.: Das Verhalten sehr kleiner ferro- elektrischer Teilchen	474
AEPPLI, H., ALBERS-SCHÖNBERG, H., FRAUENFELDER, H. und SCHERRER, P.: Bestimmung des magnetischen Momentes eines angeregten Kernes.	339
ARNOUS, E. und BLEULER, K.: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse. II. Abseparierung der virtuellen Zustände. Korrekturen zweiter Ordnung	581
ARNOUS, E.: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstatio- näre Prozesse. III. e^4 -Korrekturen zur Linienbreite.	631
BALDINGER, E., HUBER, P. und PROCTOR W. G.: Streuung von schnellen Neu- tronen an O^{16}	142
BALDINGER, E.: Analogie-Rechengerät zur Phasenanalyse von Streuexperi- menten mit schnellen Neutronen	446
BALDINGER, E.: s. Huber, Baldinger und Budde	444
BALDINGER, E.: s. Hahn, Baldinger und Huber	505
BALDINGER, E.: s. Haeberli, Huber und Baldinger	467
BALDINGER, E.: s. Huber und Baldinger	435
BAUMGARTNER, E. und HUBER, P.: Zum Nachweis von polarisierten Neutro- nen aus der (d,d)-Reaktion	626
BAUMGARTNER, W. und SCHÄETTI, N.: Über eine mögliche Form eines infra- rotempfindlichen Vervielfachers	611
BAUMGARTNER, W.: s. Schaetti und Baumgartner	605
BÉNÉ, G. J., DENIS, P. M. et EXTERMANN R. C.: Catalyses de Relaxation Magnétique Nucléaire	458
BENER, P.: Ein Szintillationszähler für Alpha-Teilchen, Impulsverteilung für 4,8 MeV Alphateilchen in Anthrazen	463
BICHSEL, H., HÄLG, W., HUBER, P. und STEBLER, A.: Untersuchung der Reaktion $B^{10}(n, \alpha) Li^7$ mit Neutronen verschiedener Energien	119
BLASER, J. P., MARMIER, P. und SEMPET, M.: Anregungsfunktion der Kern- reaktion $N^{14}(p, \alpha) C^{11}$	442
BLEULER, K.: s. Arnous, E. und Bleuler, K	581
BOEHM, F., MARMIER, P. und PREISWERK, P.: Relative Wirkungsquerschnitte für die Anregung von Isomeren- und Grundzuständen durch die (p,n)- Reaktion.	599

BONANOMI, J. und ROSSEL, J.: Scintillations de luminescence dans les iodures d'alcalins	725
BRINER, H. und GRAFFUNDER, W.: Die geometrische Transformation von Impedanzdiagrammen	487
BUDDE, R.: s. Huber, P., Baldinger und Budde	444
BUDDE, R. und HUBER, P.: Spektrum einer Hochfrequenzionenquelle . . .	459
BUSER, W., FEITKNECHT, W. und IMOBERSTEG, U.: Austauschreaktionen von Co zwischen festen Kobaltverbindungen und Lösungen	681
COMPTE RENDU de la réunion de la Société Suisse de Physique	441, 605
DENIS, P. M.: s. Béné, Denis und Extermann	458
DESSAUER, F., MERCIER, A. und SCHAFFHAUSER, E. und J.: Der Einfluss schneller Schwerkraftänderungen auf die Atmosphäre	476
EDER, M. und TELEGDI, V. L.: Die Photospaltung des C^{12} in drei Alpha- teilchen durch γ -Strahlen bis 32 MeV	55
EXTERMANN, R. C.: s. Béné, Denis und Extermann	458
FEITKNECHT, W.: s. Buser, Feitknecht und Imobersteg	618
FIERZ, M.: Bemerkung zur Polarisierung der bei der D-D-Reaktion entstan- denen Protonen und Neutronen	629
FRAUENFELDER, H.: s. Aeppli, Albers-Schönberg, Frauenfelder und Scherrer	339
GLÄTTLI, H. und STOLL, P.: Die Winkelverteilung der Bor-Gammastrahlung $B^{11} (p, \gamma) C^{12}$	455
GLÄTTLI, H., SEIPPEL, O. und STOLL, P.: Absolutbestimmung der Wirkungs- schnitte $Cu^{63} (\gamma, n)$ und $C^{12} (\gamma, 3\alpha)$ in bezug auf Lithium- γ -Strahlung	491
GRAFFUNDER, W. und GÜNTHER, W.: Einige Ergebnisse über die Ausbreitung der quasiperiodischen Luftschwankungen	485
GRAFFUNDER, W.: s. Briner und Graffunder	487
GÜNTHER, W.: s. Graffunder und Günther	485
HÄBERLI, W., HUBER, P. und BALDINGER, E.: Absolutwerte der Arbeit pro Ionenpaar von Po- α -Teilchen in den Gasen He, N_2 , A, O_2 und CO_2 . .	467
HAHN, B., BALDINGER, E. und HUBER, P.: Wirkungsquerschnitt der Paar- erzeugung in Abhängigkeit von der Kernladungszahl für Gamma- Strahlen von Th ($C + C''$), RaC und Co^{60}	505
HÄLG, W. und JENNY, L.: Zum Fadingeffekt in Kernspurplatten	773
HÄLG, W.: s. Bichsel, H., Hälg, Huber und Stebler	119
HÄNNI, H. und ROSSEL, J.: Réactions (n, α) et (n, p) du fer avec les neutrons lents	521
HAMOUDA, I. und DE MONTMOLLIN, G.: Distribution angulaire, dans le do- maine des petits angles, de neutrons de 3,27 MeV diffusés par des deutons	107
HEILPERN, WALTER: Der Fremdgaseinfluss von Stickstoff auf die Lichtabsorp- tion des Sauerstoffs als Funktion vom Druck	753
HUBER, O., HUMBEL, F., SCHNEIDER, H. und DE SHALIT, A.: Spektrometrische Messung von β - β -Koinzidenzen	3
HUBER, O., JOLY, R., SCHERRER, P. und VERSTER, N. F.: Ein 30 sec Isomer Au^{195*}	621
HUBER, O.: s. Schneider, Huber, Humbel, de Shalit und Zünti	259
HUBER, O.: s. de Shalit, Huber und Schneider	279

HUBER, P., BALDINGER, E. und BUDDE, R.: Streuung von schnellen Neutronen an He^4 und C^{12}	444
HUBER, P. und BALDINGER, E.: Winkelverteilung von gestreuten Neutronen an He^4	435
HUBER, P.: s. Bichsel, Hälgi, Huber und Stebler	119
HUBER, P.: s. Baldinger, Huber und Proctor	142
HUBER, P.: s. Budde und Huber	459
HUBER, P.: s. Haerberli, Huber und Baldinger	467
HUBER, P.: s. Hahn, Baldinger und Huber	505
HUBER, P.: s. Baumgartner und Huber	626
HUMBEL, F.: s. Huber, Humbel, Schneider und de Shalit	3
HUMBEL, F.: s. Schneider, Huber, Humbel, de Shalit und Zünti	259
IMBERSTEG, U.: s. Buser, Feitknecht und Imobersteg	618
ISKRAUT, RICHARD, W.: Remarks Concerning a Paper by Wilker	303
JAN, H.-P.: Effet Hall et température dans les conducteurs ferromagnétiques	677
JOLY, R.: s. Huber, Joly, Scherrer und Verster	621
JONA, F. und SCHERRER, P.: Die elastischen Konstanten von Eis-Einkristallen	35
JENNY, L.: s. Hälgi und Jenny	773
KÄLLÉN, GUNNAR: On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics	417
KÄNZIG, W.: s. Anliker, Känzig und Peter	474
KELLER, R.: s. Verdaguer, Sánchez del Rio, Keller und Kind	79
KIND, A.: s. Verdaguer, Sánchez del Rio, Keller und Kind	79
LAMBOSSY, PAUL: Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement	371
MAEDER, D. und WINTERSTEIGER, V.: Die Linienform monochromatischer γ -Strahlungen im Szintillationsspektrographen	465
MAEDER, D., PREISWERK, P. und STEINEMANN, A.: Die Zerfallsreihe Mn^{51} — Cr^{51} — V^{51} und der Spin der Mn -Isotope	461
MAEHLY, H. J. und STÄHELIN, P.: Werte des Kernspins nach dem Schalenmodell	624
MAEHLY, HANS J.: Ein neues Variationsverfahren zur genäherten Berechnung der Eigenwerte hermitescher Operatoren	547
MARMIER, P.: s. Blaser, Marmier und Sempert	442
MARMIER, P.: s. Boehm, F., Marmier und Preiswerk	599
MERCIER, A.: s. Dessauer, Mercier und Schaffhäuser	476
MONTMOLLIN DE, G.: s. Hamouda und de Montmollin	107
MUKERJI, AMBUJ und PREISWERK, PETER: Investigations on the odd-odd isotopes Ga^{64} , Ga^{66} , Ga^{68} and the odd-even isotope Ha^{67}	387
NABHOLZ, H., STOLL, P. und WÄFFLER, H.: Die Energie und Winkelverteilung der Lithium- γ -Strahlung	153
NABHOLZ, H., STOLL, P. und WÄFFLER, H.: (γ , α)-Prozesse an Li_7^2 , O_8^{16} , Br_{35}^{79} und Br_{35}^{81}	701
NEWBURGH, R.: s. Wieland und Newburgh	87
PERRIER, ALBERT: Mesures magnétogalvaniques et champs radiaux	469
PERRIER, ALBERT: Principes expérimentaux pour intensifier les effets magnétothermoélectriques transversaux	472

PERRIER, A. L.: Sur la liaison entre les effets magnétogalvaniques transversaux et la résistivité	615
PERRIER, A.: Rectification	500
PETER, M.: s. Anliker, Känzig und Peter	474
PREISWERK, PETER: s. Mukerji und Preiswerk	387
PREISWERK, P.: s. Maeder, Preiswerk und Steinemann	461
PREISWERK, P.: s. Boehm, Marmier und Preiswerk	599
PROCTOR, W. G.: s. Baldinger, Huber und Proctor	142
REMUND, A. E. und RICAMO, R.: Direkte Messungen der Winkelverteilung gestreuter Neutronen an C^{12}	447
RICAMO, R.: s. Remund und Ricamo	447
ROCHAT, O. und STOLL, P.: Kernphotospaltung am B^{11} und B^{10}	451
ROSSEL, J.: s. Hänni und Rossel	521
ROSSEL, J.: s. Bonanomi und Rossel	725
SÁNCHEZ DEL RIO, C.: s. Verdaguer, Sánchez del Rio, Keller und Kind	79
SAXER, L.: Beziehungen zwischen quasiperiodischen Luftdruckschwankungen und meteorologischen Erscheinungen	478
SEIPPEL, O.: s. Glättli, Seippel und Stoll	491
SEMPERT, M.: s. Blaser, Marmier und Sempert	442
SHALIT, DE A., HUBER, O. und SCHNEIDER, H.: On the decay of some odd isotopes of Pt, Au and Hg	279
SHALIT, DE A.: s. Schneider, Huber, Humbel, de Shalit und Züti	259
SHALIT, DE A.: s. Huber, Humbel, Schneider und de Shalit	3
SULZER, P. und WIELAND, K.: Intensitätsverteilung eines kontinuierlichen Absorptionsspektrums in Abhängigkeit von Temperatur und Wellenzahl	653
SCHAFFHAUSER, E. und J.: Über Herkunft und Ausbreitung der natürlichen Luftunruhe (Luftseismik)	480
SCHAFFHAUSER, E. und J.: s. Dessauer, Mercier und Schaffhauser	476
SCHAETTI, N. und BAUMGARTNER, W.: Untersuchungen über den Dunkelstrom von Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern	605
SCHAETTI, N.: s. Baumgartner und Schaetti	611
SCHERRER, P.: s. Huber, Joly, Scherrer und Verster	621
SCHERRER, P.: s. Aepli, Albers-Schönberg, Frauenfelder und Scherrer	339
SCHERRER, P.: s. Jona und Scherrer	35
SCHERRER, W.: Wirkungsprinzipien zur Feldtheorie der Materie	501
SCHNEIDER, H.: s. Huber, Humbel, Schneider, de Shalit	3
SCHNEIDER, H., HUBER, O., HUMBEL, F., DE SHALIT, A. und ZÜNTI, W.: Elektronenspektren zwischen 1 und 10 KeV	259
SCHNEIDER, H.: s. de Shalit, Huber und Schneider	279
STAEHELIN, P.: s. Maehly und Stähelin	624
STEBLER, A.: s. Bichsel, Hälgi, Huber und Stebler	119
STEINEMANN, A.: s. Maeder, Preiswerk und Steinemann	461
STOLL, P.: s. Nabholz, Stoll und Wäffler	153
STOLL, P.: s. Glättli, Seippel und Stoll	491
STOLL, P.: s. Nabholz, Stoll und Wäffler	701
STOLL, P.: s. Rochat und Stoll	451
STOLL, P.: s. Glättli und Stoll	455

STUECKELBERG, E. C. G.: Théorème H et unitarité de S	577
TALMI, IGAL: Nuclear Spectroscopy with Harmonic Oscillator Wave- Functions	185
TELEGDI, V. L.: s. Eder und Telegdi	55
THELLUNG, A.: Höhere mesontheoretische Näherungen zum magnetischen Moment des Protons	307
VERDAGUER, F., SANCHEZ DEL RIO, C., KELLER, R. et KIND, A.: Diffraction des neutrons lents par les poudres microcristallines d'UO ₂ et de CeO ₂ .	79
VERSTER, N. F.: s. Huber, Joly, Scherrer und Verster	621
WÄFFLER, H.: s. Nabholz, Stoll und Wäffler	153
WÄFFLER, H.: s. Nabholz, Stoll und Wäffler	701
WENTZEL, GREGOR: Bemerkungen zur skalaren Paartheorie	569
WETTSTEIN, ERWIN: Eisenmessgerät für ganze Blechtafeln	488
WIELAND, K. und NEWBURGH, R.: Über einige neue Bandenspektren der Ra- dikale PbCl, PbBr und PbJ	87
WIELAND, K.: s. Sulzer und Wieland	653
WINTERSTEIGER, V.: s. Maeder und Wintersteiger	465
ZÜNTI, W.: s. Schneider, Huber, Humbel, de Shalit und Zünti	259

HELVETICA PHYSICA ACTA

VOLUMEN XXV

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES

Fasciculus I-II

1. II. 1952.

O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER und A. DE SHALIT: Spektrometrische Messung von β - β -Koinzidenzen	3
F. JONA und P. SCHERRER: Die elastischen Konstanten von Eis-Einkristallen	35
M. EDER und V. L. TELEGDI: Die Photospaltung des C^{12} in drei Alphateilchen durch γ -Strahlen bis 32 MeV	55
F. VERDAGUER, C. SÁNCHEZ DEL RIO, R. KELLER et A. KIND: Diffraction des neutrons lents par les poudres microcristallines d' UO_2 et de CeO_2	79
K. WIELAND und R. NEWBURGH: Über einige neue Bandenspektren der Radikale $PbCl$, $PbBr$ und PbJ	87
I. HAMOUDA et G. DE MONTMOLLIN: Distribution angulaire, dans le domaine des petits angles, de neutrons de 3,27 MeV diffusés par des deutons	107
H. BICHSEL, W. HÄLG, P. HUBER und A. STEBLER: Untersuchung der Reaktion $B^{10}(n, \alpha)Li^7$ mit Neutronen verschiedener Energien	119
E. BALDINGER, P. HUBER und W. G. PROCTOR: Streuung von schnellen Neutronen an O^{16}	142
H. NABHOLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER: Die Energie und Winkelverteilung der Lithium- γ -Strahlung	153

Fasciculus III.

30. IV. 1952.

IGAL TALMI: Nuclear Spectroscopy with Harmonic Oscillator Wave-Functions	185
KURT ALDER: Beiträge zur Theorie der Richtungskorrelation	235
H. SCHNEIDER, O. HUBER, F. HUMBEL, A. DE SHALIT und W. ZÜNTI: Elektronenspektren zwischen 1 und 10 KeV	259
A. DE SHALIT, O. HUBER und H. SCHNEIDER: On the decay of some odd isotopes of Pt, Au and Hg	279
RICHARD W. ISKRAUT: Remarks Concerning a Paper by Wilker	305

Fasciculus IV.

30. VI. 1952.

A. THELLUNG: Höhere mesontheoretische Näherungen zum magnetischen Moment des Protons	307
H. AEPPLI, H. ALBERS-SCHÖNBERG, H. FRAUENFELDER und P. SCHERRER: Bestimmung des magnetischen Momentes eines angeregten Kernes (Cd^{111})	339
PAUL LAMBOSSY: Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement . .	371
AMBUJ MUKERJI and PETER PREISWERK: Investigations on the odd-odd isotopes Ga^{64} , Ga^{66} , Ga^{68} and the odd-even isotope Ga^{67}	387
GUNNAR KÄLLÉN: On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics	417
P. HUBER und E. BALDINGER: Winkelverteilung von gestreuten Neutronen an He^4	435

Fasciculus V.

15. IX. 1952.

Compte rendu de la réunion de la Société Suisse de Physique	441
J.-P. BLASER, P. MARMIER und M. SEMPET: Anregungsfunktion der Kernreaktion $\text{N}^{14}(\text{p}, \alpha)\text{C}^{11}$	442
P. HUBER, E. BALDINGER und R. BUDDE: Streuung von schnellen Neutronen an He^4 und C^{12}	444
E. BALDINGER: Analogie-Rechengerät zur Phasenanalyse von Streuexperimenten mit schnellen Neutronen	446
A. E. REMUND und R. RICAMO: Direkte Messungen der Winkelverteilung gestreuter Neutronen an C^{12}	447
O. ROCHAT und P. STOLL: Kernphotospaltung am B^{11} und B^{10}	451
H. GLÄTTLI und P. STOLL: Die Winkelverteilung der Bor-Gammastrahlung. $\text{B}^{11}(\text{p}, \gamma)\text{C}^{12}$	455
G. J. BÉNE, P. M. DENIS, R. C. EXTERMANN: Catalyses de Relaxation Magnétique Nucléaire	458
R. BUDDE und P. HUBER: Spektrum einer Hochfrequenzonenquelle .	459
D. MAEDER, P. PREISWERK und A. STEINEMANN: Die Zerfallsreihe Mn^{51} . $\text{Cr}^{51}\text{-V}^{51}$ und der Spin der Mn-Isotope	461
P. BENER: Ein Szintillationszähler für Alphateilchen. Impulsverteilung für 4,8 MeV Alphateilchen in Anthrazen	463
D. MAEDER und V. WINTERSTEIGER: Die Linienform monochromatischer γ -Strahlungen im Szintillationsspektrographen	465
W. HAEERLI, P. HUBER und E. BALDINGER: Absolutwerte der Arbeit pro Ionenpaar von Po- α -Teilchen in den Gasen He, N_2 , A, O_2 , CO_2 .	467
ALBERT PERRIER: Mesures magnétogalvaniques et champs radiaux . .	469
ALBERT PERRIER: Principes expérimentaux pour intensifier les effets magnétothermoélectriques transversaux	472

M. ANLIKER, W. KÄNZIG, M. PETER: Das Verhalten sehr kleiner ferroelektrischer Teilchen	474
F. DESSAUER, A. MERCIER, E. und J. SCHAFFHAUSER: Der Einfluss schneller Schwerkraftänderungen auf die Atmosphäre	476
L. SAXER: Beziehungen zwischen quasiperiodischen Luftdruckschwankungen und meteorologischen Erscheinungen	478
E. und J. SCHAFFHAUSER: Über Herkunft und Ausbreitung der natürlichen Luftunruhe (Luftseismik)	480
W. GRAFFUNDER und W. GÜNTHER: Einige Ergebnisse über die Ausbreitung der quasiperiodischen Luftdruckschwankungen	485
H. BRINER und W. GRAFFUNDER: Die geometrische Transformation von Impedanzdiagrammen	487
ERWIN WETTSTEIN: Eisenmessgerät für ganze Blechtafeln	488
H. GLÄTTLI, O. SEIPPEL und P. STOLL: Absolutbestimmung der Wirkungsquerschnitte Cu^{63} (γ , n) und C^{12} (γ , 3α) in bezug auf Lithium- γ -Strahlung	491
A. PERRIER: Rectification	500
W. SCHERRER: Wirkungsprinzipien zur Feldtheorie der Materie	501
B. HAHN, E. BALDINGER und P. HUBER: Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung in Abhängigkeit von der Kernladungszahl für Gamma-Strahlen von Th ($\text{C}+\text{C}'$), RaC und Co^{60}	505
H. HÄNNI et J. ROSSEL: Réactions (n, α) et (n, p) du fer avec les neutrons lents	521
HANS J. MAEHLY: Ein neues Variationsverfahren zur genäherten Berechnung der Eigenwerte hermitescher Operatoren	547
GREGOR WENTZEL: Bemerkungen zur skalaren Paartheorie	569
E. C. G. STUECKELBERG: Théorème H et unitarité S	577
E. ARNOUS und K. BLEULER: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse. II. Abseparierung der virtuellen Zustände. Korrekturen zweiter Ordnung	581
F. BOEHM, P. MARMIER und P. PREISWERK: Relative Wirkungsquerschnitte für die Anregung von Isomeren- und Grundzuständen durch die (p, n)-Reaktion	599

Fasciculus VI.

1. XI. 1952.

Compte rendu de la réunion de la Société Suisse de Physique	605
N. SCHAETTI und W. BAUMGARTNER: Untersuchungen über den Dunkelstrom von Photozellen mit Sekundärelektronenvervielfachern	605
W. BAUMGARTNER und N. SCHAETTI: Über eine mögliche Form eines infrarotempfindlichen Vervielfachers	611
A. L. PERRIER: Sur la liaison entre les effets magnétogalvaniques transversaux et la résistivité	615
W. BUSER, W. FEITKNECHT und U. IMBERSTEG: Austauschreaktionen von ^{60}Co zwischen festen Kobaltverbindungen und Lösung	618
O. HUBER, R. JOLY, P. SCHERRER und N. F. VERSTER: Ein 30 sec Isomer Au^{195*}	621

H. J. MAEHLY und P. STÄHELIN: Werte des Kernspins nach dem Schalenmodell	624
E. BAUMGARTNER und P. HUBER: Zum Nachweis von polarisierten Neutronen aus der (d, d)-Reaktion	626
M. FIERZ: Bemerkung zur Polarisation der bei der D-D-Reaktion entstehenden Protonen und Neutronen	629
E. ARNOUS: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse. III. e^4 -Korrekturen zur Linienbreite	631
P. SULZER und K. WIELAND: Intensitätsverteilung eines kontinuierlichen Absorptionsspektrums in Abhängigkeit von Temperatur und Wellenzahl	653

Fasciculus VII.

20. XII 1952.

J.-P. JAN: Effet Hall et température dans les conducteurs ferromagnétiques	677
H. NABHOLZ, P. STOLL und H. WÄFFLER: (γ, α) -Prozesse an Li_7^8 , O_8^{16} , Br_{35}^{79} und Br_{35}^{81}	701
J. BONANOMI et J. ROSSEL: Scintillations de luminescence dans les iodures d'alcalins	725
WALTER HEILPERN: Der Fremdgaseinfluss von Stickstoff auf die Lichtabsorption des Sauerstoffs als Funktion vom Druck	753
W. HÄLG und L. JENNY: Zum Fadingeffekt in Kernspurplatten	773
Autorenregister	775
Inhaltsverzeichnis	780

DATE DUE

UIC OCT 02 2009

UIC Rec'd SEP 29 2009

RENEWALS

996-2724

GAYLORD

PRINTED IN U.S.A.



3 8198 303 490 021

THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

